Рассмотрим пример выполнения задания 1 (*базовый уровень*) из Контрольной работы № 2 «Дифференцирование функций одной».

Задание 1. Найти производные заданных функций

1) $y=\left(x^4-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^3$;

2) $y=\dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$;

3) $y=e^{ctgx}\arcsin\sqrt{x}$;

4) $y=3^{\cos^2 x}+\mathrm{arctg}\,5x$.

Решение

1) $y=\left(x^4-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^3$ — сложная функция.

Применим формулы дифференцирования:

$$\left(u^3\right)'=3u^2u',\ \left(x^n\right)'=nx^{n-1},$$

а также формулы

$$\frac{1}{x^n}=x^{-n},\ \ \sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}.$$

Имеем

$$y'=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)'=.$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-2x^{-3}+x^{\frac{2}{3}}-6\right)'=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+6x^{-4}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+\frac{6}{x^4}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right).$$

2) Для дифференцирования функции $y=\dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$ применим правило производной частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Получим

$$y' = \frac{\left(\cos\frac{x}{4}\right)' x^2 - \cos\frac{x}{4}\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-\sin\frac{x}{4}\left(\frac{1}{4}x\right)' - \cos\frac{x}{4}\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4} - 2x\cos\frac{x}{4}}{x^4}.$$

3) Для дифференцирования функции $y = e^{\operatorname{ctg} x}\arcsin\sqrt{x}$ применим правило производной произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Получим

$$y' = \left(e^{\operatorname{ctg} x}\right)' \arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(\operatorname{ctg} x\right)' \arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right) =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x}\right).$$

4) Для дифференцирования функции $y = 3^{\cos^2 x} + \operatorname{arctg} 5x$ применяем правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$y' = 3^{\cos^2 x} \ln 3 \left(\cos^2 x\right)' + \frac{1}{1+(5x)^2}(5x)' =$$

$$= 3^{\cos^2 x} \ln 3 \cdot 2\cos x (\cos x)' + \frac{1}{1+25x^2} 5 =$$

$$= 3^{\cos^2 x} \ln 3 \cdot 2\cos x (-\sin x) + \frac{5}{1+25x^2} =$$

$$= -3^{\cos^2 x} \ln 3 \sin 2x + \frac{5}{1+25x^2}.$$