Предмет: <u>Специальная математика</u>

Преподаватель: <u>Головина Людмила Юрьевна</u>

<u>Раздел</u>: Поверхностные интегралы. Элементы теории поля

Двойные и криволинейные интегралы (повторение)

Для повторения данной темы из курса «Высшая математика» рассмотрите примеры:

103. Задан интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^4 dy$.

Требуется:

1) построить на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла;
2) изменить порядок интегрирования;
3) вычислить площадь области.

Решение

1. Определим область интегрирования: переменная x изменяется в пределах от 0 до 2, переменная y – от функции $y = x^2$ (парабола) до функции $y = 4$ (горизонтальная прямая).

Область интегрирования выделена на рис. 4.

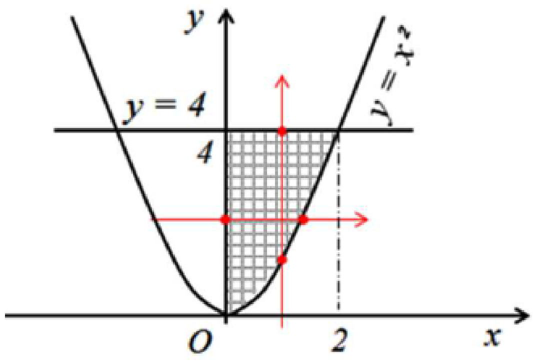

Рис. 4

2. При изменении порядка интегрирования область переменная y будет изменяться от 0 до 4, переменная x – от прямой $x = 0$ до параболы $x = \sqrt{y}$.

Таким образом, получаем:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^4 dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} dx.$$

3. Площадь области

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^4 dy = \int\limits_0^2 y\Big|_{x^2}^4 dx = \int\limits_0^2 \left(4 - x^2\right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

104. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$ по области D, ограниченной указанными линиями: $y=\sqrt{x}$; $y=x$; $x=1$.

Решение

Построим область интегрирования (рис. 5).

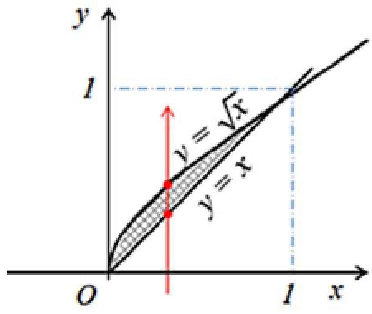

Рис. 5

Переменная x изменяется в пределах от 0 до 1, переменная y – от функции $y=x$ (прямая) до функции $y=\sqrt{x}$ (часть параболы).

Запишем двойной интеграл в виде повторного интеграла:

$$\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_x^{\sqrt{x}} ydy=\int\limits_0^1 x\frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{\sqrt{x}} dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-3}{12}=\frac{1}{24}.$$

Ответ: $\iint\limits_D xydxdy=\frac{1}{24}$.

121. Даны криволинейный интеграл $\int\limits_L (3x^2-y)dx-(x+3y)dy$ и точки $A(0;-1)$, $B(3;1)$, $C(3;8)$.

Вычислить данный интеграл:

1) по прямой AC;

2) по ломаной ABC;

3) по дуге AC параболы $y=x^2-1$.

Решение

Кривая интегрирования может быть задана в явном виде $y=f(x)$, следовательно, криволинейный интеграл сводится к определенному интегралу по формуле

$$\int\limits_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b P(x,y)dx+Q(x,f(x))f'(x)dx.$$

1. Составим уравнение прямой AC:

$$\frac{y+1}{8+1}=\frac{x-0}{3-0}\Leftrightarrow\frac{y+1}{9}=\frac{x}{3}\Leftrightarrow 3(y+1)=9x\Leftrightarrow y=3x-1.$$

Тогда $dy = 3dx$. Переменная x меняется на отрезке $[0;3]$. Получаем

$$\int\limits_{AC} (3x^2 - y)dx - (x+3y)dy = \int\limits_0^3 (x^2 - (3x-1))dx - (x + 3(3x-1))3dx =$$

$$= \int\limits_0^3 (3x^2 - 3x + 1 - 30x + 9)dx = \int\limits_0^3 (3x^2 - 33x + 10)dx =$$

$$= \left(\frac{3x^3}{3} - \frac{33x^2}{2} + 10x \right)\Bigg|_0^3 = 27 - \frac{33}{2}\cdot 9 + 30 = -91{,}5.$$

2. Ломаная ABC состоит из двух прямых: прямой AB, заданной уравнением:

$$\frac{y+1}{1+1} = \frac{x-0}{3-0} \Leftrightarrow \frac{y+1}{2} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3(y+1) = 2x \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 1. \Rightarrow dy = \frac{2}{3}dx$$

(переменная x меняется на отрезке $[0;3]$) и прямой BC, заданной уравнением $x = 3 \Rightarrow dx = 0$ (переменная y меняется на отрезке $[1;8]$).

Таким образом

$$\int\limits_{ABC} (3x^2 - y)dx - (x+3y)dy =$$

$$= \int\limits_{AB} (3x^2 - y)dx - (x+3y)dy + \int\limits_{BC} (3x^2 - y)dx - (x+3y)dy =$$

$$= \int\limits_0^3 \left(3x^2 - \frac{8x}{3} + 3 \right)dx - \int\limits_1^8 (3+3y)dy = \left(x^3 - \frac{8x^2}{3\cdot 2} + 3x \right)\Bigg|_0^3 - \left(3y + \frac{3y^2}{2} \right)\Bigg|_1^8 =$$

$$= (27 - 12 + 9) - (24 + 96) + (3 + 1{,}5) = 24 - 120 + 4{,}5 = -91{,}5.$$

3. Для параболы $y = x^2 - 1$ имеем $dy = 2xdx$, x меняется на отрезке $[0;3]$.
Получаем

$$\int\limits_{AC} (3x^2 - y)dx - (x+3y)dy = \int\limits_0^3 (3x^2 - (x^2 - 1))dx - (x + 3(x^2 - 1))2xdx =$$

$$= \int\limits_0^3 (3x^2 - x^2 + 1 - 2x^2 - 6x^3 + 6x)dx = \int\limits_0^3 (1 - 6x^3 + 6x)dx =$$

$$= \left(x - \frac{3x^4}{2} - +3x^2 \right)\Bigg|_0^3 = 3 - 121{,}5 + 27 = -91{,}5.$$

Ответ: $\int\limits_L (3x^2 - y)dx - (x+3y)dy = -91{,}5.$

5 Поверхностные интегралы первого рода

5.1 Теоретическая часть

Поверхностный интеграл является таким же обобщением двойного интеграла, каким криволинейный интеграл является по отношению к определенному интегралу.

Рассмотрим поверхность S в пространстве $Oxyz$, в каждой точке которой определена непрерывная функция $f(x, y, z)$:

1) разобьём поверхность S на n частей с площадями ΔS_i;

2) выберем на каждой из частичных площадок ΔS_i произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$;

3) составим интегральную сумму: $\sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)\Delta S_i$;

4) обозначим: $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n}\left\{d_i\right\}$, где d_i – диаметр площадки ΔS_i.

Если существует предел интегральной суммы, который не зависит от способа разбиения поверхности S на площадки ΔS_i и от выбора точек M_i, то этот предел называется *поверхностным интегралом от функции* $f(x, y, z)$ *по поверхности* S или *поверхностным интегралом первого рода (ПИ-1)*:

$$\iint_S f(x, y, z)ds = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)\Delta S_i . \quad (5.1)$$

Поверхностные интегралы первого рода обладают теми же свойствами, что и КРИ-1 (линейность, аддитивность, справедлива теорема о среднем), и имеют те же условия существования. Значение ПИ-1 не зависит от выбора стороны поверхности S, по которой ведётся интегрирование. Её проекция на координатную плоскость должна быть однозначна, т.е. прямая, перпендикулярная плоскости проекции, пересекает поверхность в одной точке.

Вычисление ПИ-1 производится сведением его к двойному интегралу.

1 Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, где $z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ – непрерывны в замкнутой области D_{xy}, которая является проекцией поверхности S на плоскость xOy, тогда

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy. \qquad (5.2)$$

2 Если поверхность S задана уравнением $x = x(y, z)$, где $x(y, z), \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial z}$ – непрерывны в замкнутой области D_{yz}, которая является проекцией поверхности S на плоскость yOz, то

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz. \qquad (5.3)$$

3 Если поверхность S задана уравнением $y = y(x, z)$, где $y(x, z), \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}$ – непрерывны в замкнутой области D_{xz}, которая является проекцией поверхности S на плоскость xOz, то

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dxdz. \qquad (5.4)$$

5.2 Образцы решения примеров

5.2.1 Вычислить $\iint_S \left(x^2 + \frac{7}{2} y + z\right) ds$, S – часть плоскости $4x + 3y + 2z - 4 = 0$, расположенная в первом октанте.

Решение

Изобразим плоскость $4x + 3y + 2z - 4 = 0$ (рисунок 5.1) и её проекцию на плоскость xOy (рисунок 5.2).

Запишем уравнение плоскости в виде $z = 2 - 2x - \frac{3}{2}y$. Найдём частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = -2, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}$. Применим формулу (5.2):

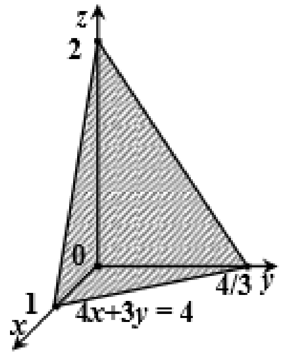

Рисунок 5.1

$$\iint_S \left(x^2 + \frac{7}{2}y + z \right) ds = \iint_{D_{xy}} \left(x^2 + \frac{7}{2}y + 2 - 2x - \frac{3}{2}y \right) \times$$

$$\times \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} dxdy = \iint_{D_{xy}} (x^2 - 2x + 2y + 2) \frac{\sqrt{29}}{2} dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \int_0^1 dx \int_0^{\frac{4-4x}{3}} \left(x^2 - 2x + 2y + 2 \right) dy =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \int_0^1 \left(x^2 y - 2xy + y^2 + 2y \right) \Big|_0^{\frac{4-4x}{3}} dx =$$

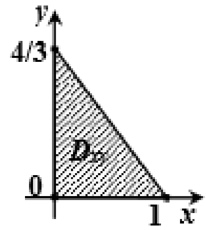

Рисунок 5.2

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \int_0^1 \left(\frac{4x^2 - 4x^3}{3} - \frac{8x - 8x^2}{3} + \left(\frac{4 - 4x}{3} \right)^2 + \frac{8 - 8x}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{18} \int_0^1 \left(52x^2 - 12x^3 - 80x + 40 \right) dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{29}}{9} \left(\frac{13x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} - 10x^2 + 10x \right) \Big|_0^1 = \frac{43\sqrt{29}}{54}.$$

5.2.2 Вычислить $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} ds, S -$ часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, расположенной между плоскостями $z = 0, z = 2$.

Решение

Изобразим поверхность $x^2 + y^2 = z^2$ (рисунок 5.3). Из уравнения конуса $x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$, т.к. $0 \le z \le 2$. Найдём частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Применим формулу (5.2):

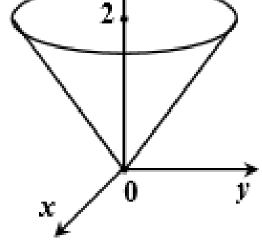

Рисунок 5.3

$$I=\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds=\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Проекцией конуса на плоскость xOy является круг $x^2+y^2\le 4$ (рисунок 5.4). Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\rho; \quad D:\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi, \\ 0\le\rho\le 2. \end{cases}$$

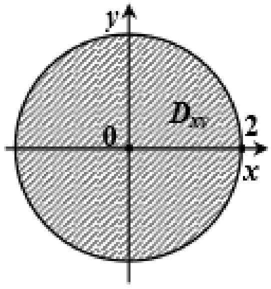

Рисунок 5.4

Имеем:

$$I=\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 \rho\cdot\rho\,d\rho=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 d\varphi=\frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot 2\pi=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}.$$

5.2.3 Вычислить $\iint\limits_S \frac{x^2+y+2z}{\sqrt{1+4x^2}}ds$, $S-$часть цилиндрической поверхности $y=x^2-4$, отсекаемая плоскостями $z=-2y$, $z=0$.

Решение

Построим поверхность S, которая однозначно проецируется на плоскость xOz (рисунок 5.5).

В этом случае уравнение поверхности имеет вид: $y=x^2-4$. Найдём частные производные: $\frac{\partial y}{\partial x}=2x, \frac{\partial y}{\partial z}=0$. Применим формулу (5.4):

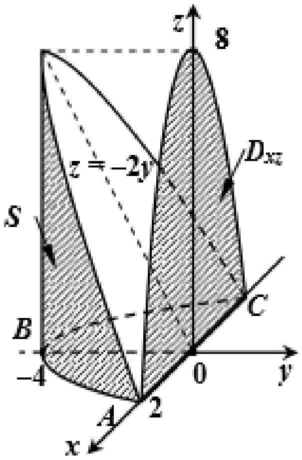

Рисунок 5.5

$$I=\iint\limits_S \frac{x^2+y+2z}{\sqrt{1+4x^2}}ds=\iint\limits_{D_{xz}} \frac{x^2+x^2-4+2z}{\sqrt{1+4x^2}}\sqrt{1+4x^2}\,dxdz=$$

$$=\iint\limits_{D_{xz}}\left(2x^2+2z-4\right)dxdz.$$

Граница области D_{xz} состоит из отрезков оси Ox и дуги параболы, уравнение которой получено из системы: $\begin{cases} y=x^2-4, \\ z=-2y \end{cases} \Rightarrow z=8-2x^2.$

Итак, $D_{xz}:\begin{cases} -2\le x\le 2, \\ 0\le z\le 8-2x^2. \end{cases}$ Имеем:

$$I=\int_{-2}^{2}dx\int_{0}^{8-2x^2}\left(2x^2+2z-4\right)dz=\int_{-2}^{2}\left(2x^2z+z^2-4z\right)\Big|_0^{8-2x^2}dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(16x^2-4x^4+64-32x^2+4x^4-32+8x^2\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(32-8x^2\right)dx=$$

$$=16\int_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=16\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=16\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{256}{3}.$$