Практическое занятие
Решение задач по теории вероятностей

На занятии рассматриваются вопросы:

1. Вероятность события. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
2. Повторные независимые испытания.
3. Дискретные и непрерывные случайные величины, их числовые характеристики.
4. Нормальный закон распределения.

1. Вероятность события. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Примеры решения задач:

Задание № 1.

В бригаде 15 рабочих, из которых 12 специалистов высшей квалификации. Случайным образом из этой бригады выбрали 5 рабочих. Найдите вероятность того, что среди них 3 специалиста высшей квалификации.

Решение.

Пусть событие A={Среди отобранных 5 рабочих 3 специалиста высшей квалификации}.

Запишем условие в виде схемы:

$$\begin{array}{ccccc} 15 \text{ р.} & — & 12 \text{ спец.} & — & 3 \text{ ост.} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 \text{ р.} & — & 3 \text{ спец.} & — & 2 \text{ ост.} \end{array}$$

(В первой строке указано то, что дано, во второй — то, что хотим получить).

Так как порядок выбора рабочих не имеет значения, то общее число исходов испытаний будет равно числу сочетаний из 15 элементов по 5 элементов, т.е.

$$n = C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} = 1\cdot13\cdot7\cdot3.$$

При вычислении числа исходов, благоприятствующих событию A, так же используем формулу числа сочетаний и правило умножения:

$$m = C_{12}^{3} C_{3}^{2} = \frac{12!}{3!9!}\cdot\frac{3!}{2!1!} = \frac{1\cdot\ldots\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot\ldots\cdot9}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2} = 10\cdot11\cdot2\cdot3.$$

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10\cdot11\cdot2\cdot3}{11\cdot13\cdot7\cdot3} = \frac{20}{91}.$$

Ответ: $\frac{20}{91}$.

Задание № 2.

В первом ящике 10 деталей, из них 2 бракованных, а во втором ящике 14 деталей, из которых 3 бракованные. Из каждого ящика взяли по одной детали. Найти вероятность того, что:

1) обе детали бракованные;

2) только одна бракованная.

Решение:

1) Обозначим события:

$Б_1$ – {Деталь из первого ящика бракованная},

$Б_2$ – {Деталь из второго ящика бракованная},

$\overline{Б_1}$ – {Деталь из первого ящика не бракованная},

$\overline{Б_1}$ – {Деталь из второго ящика не бракованная}.

По классическому определению вероятности события:

$$P(Б_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

$$P(Б_2) = \frac{3}{14}.$$

Найдем вероятности противоположных событий:

$$P(\overline{Б_1}) = 1 - P(Б_1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},$$

$$P(\overline{Б_2}) = 1 - P(Б_2) = 1 - \frac{3}{14} = \frac{11}{14}.$$

Пусть событие A ={Обе детали бракованные}.

$$A = Б_1 \cdot Б_2.$$

Тогда по теореме о вероятности произведения независимых событий:

$$P(A) = P(Б_1 \cdot Б_2) = P(Б_1) \cdot P(Б_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{70}.$$

2) Пусть событие B ={Только одна деталь бракованная}.

$$B = Б_1 \cdot \overline{Б_2} + \overline{Б_1} \cdot Б_2.$$

Тогда по теоремам о вероятности суммы несовместных событий и вероятности произведения независимых событий:

$$P(B) = P\left(Б_1 \cdot \overline{Б_2} + \overline{Б_1} \cdot Б_2\right) = P\left(Б_1 \cdot \overline{Б_2}\right) + \cdot P\left(\overline{Б_1} \cdot Б_2\right) =$$

$$= P(Б_1) \cdot P(\overline{Б_2}) + P(\overline{Б_1}) \cdot P(Б_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{14} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{14} = \frac{11}{70} + \frac{12}{70} = \frac{23}{70}.$$

Ответ: 1) $\frac{3}{70}$; 2) $\frac{23}{70}$.

Задание № 3.

Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,9 для первого, 0,8 для второго и 0,7 для третьего. Найти вероятность того, что при аварии:

1) сработает только один сигнализатор;

2) сработает хотя бы один сигнализатор;

3) все три сигнализатора сработают.

Решение.

Обозначим события:

A — сработает только один сигнализатор;

A_i — i-й сигнализатор сработает, где $i = 1, 2, 3$.

Тогда $\overline{A_i}$ — i-й сигнализатор не сработает, где $i = 1, 2, 3$.

По условию

$$P(A_1) = 0{,}9,\ P(A_2) = 0{,}8,\ P(A_3) = 0{,}7.$$

Найдем вероятности противоположных событий:

$$P(\overline{A_1}) = 0{,}1,\ P(\overline{A_2}) = 0{,}2,\ P(\overline{A_3}) = 0{,}3.$$

Событие A можно представить в виде:

$$A = A_1\ \overline{A_2}\ \overline{A_3} + \overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3} + \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3.$$

1. Используя теоремы о нахождении вероятности суммы несовместных событий и произведения независимых событий, получим вероятность события A:

$$P(A) = P\left(A_1\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3\right) =$$

$$= P(A_1)\ P\left(\overline{A_2}\right)\ P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}092.$$

Итак, $P(A) = 0{,}092$.

2. Пусть событие B — сработает хотя бы один сигнализатор.

Рассмотрим событие $\overline{B}$, противоположное к событию B: $\overline{B}$ — все три сигнализатора не сработают, т.е.

$$\overline{B} = \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}.$$

Тогда вероятность события B:

$$P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right) =$$

$$= 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}994.$$

Итак, $P(B) = 0{,}094$.

3. Пусть событие C — все три сигнализатора сработают, т.е.

$$C = A_1 A_2 A_3 .$$

По теореме о нахождении вероятности произведения независимых событий получим вероятность события C:

$$P(C) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504 .$$

Итак, $P(C) = 0,504$.

2. Повторные независимые испытания

Примеры решения задач:

Задание № 4.

Вероятность рождения бычка при отеле коровы 0,5. Найти вероятность того, что от 9 коров будет ровно 3 бычка.

Решение:

Вероятность того, что событие A в n повторных независимых испытаниях произойдет ровно k раз, находится по *формуле Бернулли:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} ,$$

где n — число повторных независимых испытаний;
p — вероятность наступления события A в каждом испытании;
q — вероятность непоявления события A в каждом испытании ($q = 1–p$);
k — число наступлений события A,

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ –число сочетаний из n по k элементов.

Обозначим событие: A — {Родился бычок от отдельной коровы}.

По условию: $n = 9$; $p = 0,5$; $q = 1–p = 1–0,5 = 0,5$.

Найдем вероятность того, что событие А произойдет ровно три раза, т.е. $k = 3$.

По формуле Бернулли:

$$P_9(3) = C_9^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^{9-3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^6 = \frac{9!}{3!6!} \cdot 0,5^9 = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 6!} \cdot 0,5^9 =$$

$$= 7 \cdot 12 \cdot 0,5^9 = \frac{7 \cdot 12}{2^9} = \frac{7 \cdot 3}{2^7} = \frac{21}{128} .$$

Ответ: $\dfrac{21}{128}$.

Задание № 5.

Производится четыре независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0,8$. Найти вероятность того, что при этом будет:

1) ровно три попадания;

2) не менее трех попаданий;

3) не более одного попадания;

4) хотя бы одно попадание.

Решение.

Обозначим событие:

A — попадание в цель при отдельном выстреле.

По условию: $n = 4$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

1. Найдем вероятность того, что событие A произойдет ровно три раза, т.е. $k = 3$.

Вероятность того, что событие A в n повторных независимых испытаниях произойдет ровно k раз, находится по *формуле Бернулли:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где n — число повторных независимых испытаний;

p — вероятность наступления события A в каждом испытании;

q — вероятность непоявления события A в каждом испытании ($q = 1-p$);

k — число наступлений события A,

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k элементов.

Тогда

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{3!\ 1!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096.$$

2. Событие, заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло не менее трех попаданий в цель, означает, что было либо три попадания, либо четыре. Следовательно, $k = 3, 4$.

Тогда, используя теорему о нахождении вероятности суммы несовместных событий и формулу Бернулли, имеем:

$$P_4(3,\ 4) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0 =$$
$$= 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^4 = 0{,}8192.$$

3. Событие, заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло не более одного попадания в цель, означает, что было либо одно попадание, либо ни одного. Следовательно, $k = 0, 1$.

Тогда, используя теорему о нахождении вероятности суммы несовместных событий и формулу Бернулли, имеем:

$$P_4(0,\ 1) = P_4(0) + P_4(1) = C_4^0 p^0 q^4 + C_4^1 p^1 q^3 =$$
$$= 0{,}2^4 + \frac{4!}{1!\ 3!} \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0272.$$

4. Событие, заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло хотя бы одно попадание в цель, означает, что $k \geq 1$, т.е. $k = 1, 2, 3, 4$. Найдем вероятность противоположного события — в серии из четырех выстрелов нет ни одного попадания в цель, т.е. $k = 0$:

$$P_4\left(0\right) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,2^4 = 0,0016.$$

Тогда

$$P_4\left(1,\ 4\right) = 1 - P_4\left(0\right) = 1 - 0,0016 = 0,9984.$$

Ответ: 1) 0,4096, 2) 0,8192, 3) 0,0272, 4) 0,9984.

Задание № 6.

Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено:

1) ровно три изделия;
2) менее трех изделий;
3) более трех изделий;
4) хотя бы одно изделие.

Решение.

Обозначим событие:

A — изделие повреждено в пути.

По условию: $n = 500$, $p = 0,002$.

Так как n велико, а p мало, используем формулу Пуассона:

$$P_n\left(k\right) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda = np = 500 \cdot 0,002 = 1$.

1. Найдем вероятность того, что будет повреждено ровно три изделия, т.е. $k = 3$:

$$P_{500}\left(3\right) \approx \frac{e^{-1}}{3!} \approx \frac{0,36788}{6} \approx 0,0613.$$

2. Найдем вероятность того, что будет повреждено менее трех изделий, т.е. $k < 3$ или $k = 0, 1, 2$.

$$P_{500}\left(0,\ 2\right) = P_{500}\left(0\right) + P_{500}\left(1\right) + P_{500}\left(2\right) \approx \frac{1^0 e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 e^{-1}}{2!} \approx$$

$$\approx e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \approx \frac{5}{2} e^{-1} \approx \frac{5}{2} \cdot 0,36788 \approx 0,9197.$$

3. Найдем вероятность того, что будет повреждено более трех изделий, т.е. $k > 3$ или $k = 4, 5, \ldots, 500$.

Рассмотрим противоположное событие — повреждено не более трех изделий, т.е. $k \leq 3$ или $k = 0, 1, 2, 3$.

Тогда

$$P_{500}(4,\ 500)=1-P_{500}(0,\ 3)=1-\left(P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)+P_{500}(3)\right).$$

Используя результаты, полученные выше, имеем:

$$P_{500}(4,\ 500)\approx 1-(0{,}9197+0{,}0613)\approx 0{,}019.$$

4. Найдем вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие, т.е. $k \ge 1$ или $k = 1, 2, \ldots, 500$.

Рассмотрим противоположное событие — ни одно из изделий не повреждено, т.е. $k = 0$.

Тогда

$$P_{500}(1,\ 500)=1-P_{500}(0)\approx 1-\frac{1^0 e^{-1}}{0!}\approx 1-e^{-1}\approx 1-0{,}3679\approx 0{,}632.$$

Ответ: а) 0,0613, б) 0,9197, в) 0,019, г) 0,632.

Задание № 7.

Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

Решение.

Обозначим событие: A — деталь высшего сорта.

По условию:

$n = 26$;

$p = 0{,}4$;

$q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$;

$k = 13$.

Найдем вероятность $P_{26}(13)$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Вычислим x:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{13-26\cdot 0{,}4}{\sqrt{26\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\approx\frac{2{,}6}{2{,}498}\approx 1{,}04.$$

По таблице найдем $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\varphi(1{,}04)\approx 0{,}2323.$$

Тогда искомая вероятность

$$P_{26}(13)\approx\frac{1}{2{,}498}\cdot 0{,}2323\approx 0{,}093.$$

Ответ: 0,093.

Задание № 8.

Вероятность появления события A в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0,8$. Найти вероятность того, что событие A появится не менее 75 раз и не более 90 раз.

Решение.

По условию:

$n = 100$;

$p = 0,8$;

$q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$;

$k_1 = 75$;

$k_2 = 90$.

Найдем вероятность $P_{100}(75,\ 90)$. Так как n велико, воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,5.$$

Тогда

$$\Phi_{100}(75,\ 90) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) \approx \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

Найдем $\Phi(1,25)$, $\Phi(2,5)$ по таблице:

$$\Phi(1,25) \approx 0,3944;$$

$$\Phi(2,5) \approx 0,4938.$$

Тогда искомая вероятность

$$P_{100}(75,\ 90) \approx 0,4938 + 0,3944 \approx 0,8882.$$

Ответ: 0,8882.

3. Дискретные и непрерывные случайные величины, их числовые характеристики

Примеры решения задач:

Задание № 9.

Задан закон распределения дискретной случайной величины в виде таблицы; в первой строке таблицы указаны возможные значения случайной величины, во второй — соответствующие вероятности.

X	–2	1	3
p	0,1	0,6	0,3

Вычислить:

1) математическое ожидание;

2) дисперсию;

3) среднее квадратическое отклонение.

Решение.

1) Математическое ожидание случайной величины X найдем по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Получим

$$M(X) = (-2)\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}6 + 3\cdot 0{,}3 = -0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}9 = 1{,}3 .$$

2) Дисперсию случайной величины X найдем по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 ,$$

где

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i .$$

Получим

$$D(X) = (-2)^2\cdot 0{,}1 + 1^2\cdot 0{,}6 + 3^2\cdot 0{,}3 - (1{,}3)^2 = 0{,}4 + 0{,}6 + 2{,}7 - 1{,}69 = 2{,}01 .$$

3) Среднее квадратическое отклонение случайной величины X найдем по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Получим $\sigma(X) = \sqrt{2{,}01} \approx 1{,}42$.

Ответ: 1) 1,3; 2) 2,01; 3) 1,42.

Задание № 10.

Непрерывная с.в. X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) дифференциальную функцию распределения $f(x)$;

2) математическое ожидание $M(X)$;

3) дисперсию $D(X)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

1. Дифференциальную функцию распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X:

$$f\left(x\right)=F^{/}\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 3x^2 & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

2. Математическое ожидание непрерывной случайной величины X найдем по формуле

$$M\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx.$$

Так как функция $f(x)$ при $x < 0$ и при $x > 1$ равна нулю, то имеем

$$M\left(X\right)=\int_0^1 xf\left(x\right)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\frac{3x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}.$$

3. Дисперсию $D(X)$ определим по формуле

$$D\left(X\right)=M\left(X^2\right)-\left(M\left(X\right)\right)^2.$$

Найдем математическое ожидание $M\left(X^2\right)$ по формуле

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f\left(x\right)dx.$$

Так как функция $f(x)$ при $x < 0$ и при $x > 1$ равна нулю, то имеем

$$M\left(X^2\right)=\int_0^1 x^2f\left(x\right)dx=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx=\frac{3x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$D\left(X\right)=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}.$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$ (рис. 1, 2):

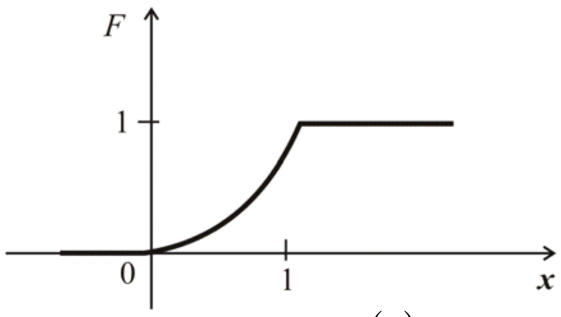

Рис. 1. График функции $F(x)$

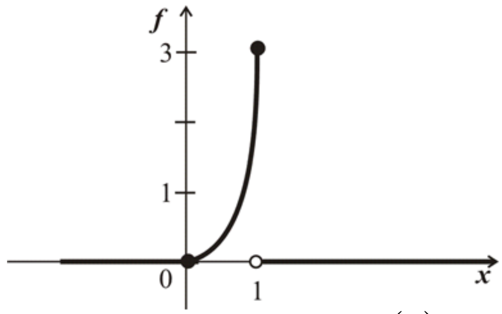

Рис. 2. График функции $f(x)$

Ответ: $M(X)=\frac{3}{4}$, $D(X)=\frac{3}{80}$.

4. Нормальный закон распределения

Примеры решения задач:

Задание № 11.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны соответственно 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (12; 14).

Решение.

Воспользуемся формулой нахождения вероятности попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (α, β):

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

По условию задачи: $a = 10$, $\sigma = 2$, $\alpha = 12$, $\beta = 14$.

Тогда

$$P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

$\Phi(2)$ и $\Phi(1)$ находим по таблице:

$$\Phi(2) \approx 0{,}4772,\ \Phi(1) \approx 0{,}3413.$$

Тогда искомая вероятность

$$P(12 < X < 14) \approx 0{,}4772 – 0{,}3413 = 0{,}1359.$$

Ответ: 0,1359.

Задание № 12.

Случайные значения веса зерна распределены нормально с математическим ожиданием 0,15 г и средним квадратическим отклонением 0,03 г. Нормальные всходы дают зерна, вес которых более 0,1 г. Определить процент семян, от которых можно ожидать нормальные всходы.

Решение.

Пусть случайная величина X — вес зерна.

По условию: $M(X) = a = 0{,}15$ г, $\sigma = 0{,}03$ г.

Нормальные всходы дадут зерна, вес которых больше 0,1 г. Найдем вероятность того, что значения случайной величины X больше 0,1. Используем формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

$$P(0{,}1 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 0{,}15}{0{,}03}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}1 - 0{,}15}{0{,}03}\right) = \Phi(\infty) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \approx$$

$$\approx 0{,}5 + \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}5 + \Phi(1{,}67) \approx 0{,}5 + 0{,}4525 \approx 0{,}9525.$$

Значения $\Phi(\infty)$ и $\Phi(1{,}67)$ находим по таблице.

Значит, от 95,25% семян можно ожидать нормальные всходы.

Ответ: 0,9525.

Задание № 13.

Длина детали представляет собой нормально распределенную с.в. с математическим ожиданием 40 мм и средним квадратическим отклонением 3 мм. Найти вероятность того, что длина детали отклонится от ее математического ожидания меньше чем на 1,5 мм.

Решение.

Пусть X — длина детали.

По условию: $a = M(X) = 40$, $\sigma = 3$.

Искомая вероятность $P(|X - 40| < 1{,}5)$ находится по формуле

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \text{ где } \varepsilon = 1{,}5.$$

Имеем:

$$P(|X - 40| < 1{,}5) = 2\Phi\left(\frac{1{,}5}{3}\right) = 2\Phi(0{,}5) \approx 2 \cdot 0{,}1915 \approx 0{,}383.$$

Значение $\Phi(0{,}5)$ находим по таблице.

Ответ: 0,383.

Тренажеры:

Журбенко Л.Н., Никонова Г.А., Никонова Н.В., Нуриева С.Н., Дегтярева О.М. **Математика в примерах и задачах** : учеб. пособие. – М. : ИНФРА-М, 2009. – 373 с. – (Высшее образование):

1) Стр. 314–315: Задачи для самостоятельного решения № 11–17.

2) Стр. 317: Задачи для самостоятельного решения № 20–23, 25.
3) Стр. 319: Задачи для самостоятельного решения № 26, 27.
4) Стр. 323: Задачи для самостоятельного решения № 1.
5) Стр. 325: Задачи для самостоятельного решения № 5 (а), 6 (а).
6) Стр. 327: Задачи для самостоятельного решения № 11, 12.