

Задача С4

Шесть невесомых стержней соединены концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам А, В, С, D (рис. С4.0-С4.9, табл. С4). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах Н, К, L или М прямоугольного параллелепипеда) на рисунках

не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным таблицы. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила $P=200$ Н; во втором узле приложена сила $Q=100$ Н. Сила \vec{P} образует с положительными направлениями координатных осей x, y, z заданные углы, равные соответственно $\alpha_1 = 45^\circ, \beta_1 = 60^\circ, \gamma_1 = 60^\circ$, а сила Q – углы $\alpha_2 = 60^\circ, \beta_2 = 45^\circ, \gamma_2 = 60^\circ$. Грани параллелепипеда, параллельные плоскости xy , – квадраты. Диагонали других (боковых) граней образуют с плоскостью xy угол $\varphi = 60^\circ$, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол $\theta = 51^\circ$. Определить усилия в стержнях полученной пространственной фермы.

Указания. Задача С4 – на равновесие пространственной системы сходящихся сил. При ее решении следует рассмотреть отдельно равновесие каждого из двух узлов.

Таблица С4

Номер условия	0	1	2	3	4
Узлы	Н, М	L, М	К, М	L, Н	К, Н
Стержни	НМ, НА, НВ, МА, МС, МD	LM, LA, LD, МА, МВ, МС	KM, КА, КВ, МА, МС, MD	LH, LC, LD, НА, НВ, НС	КН, КВ, КС, НА, НС, НD
Номер условия	5	6	7	8	9
Узлы	М, Н	L, Н	К, Н	L, М	К, М
Стержни	МН, МВ, МС, НА, НС, НD	LH, LB, LD, НА, НВ, НВ	КН, КС, КD, НА, НВ, НС	LM, LB, LD, МА, МВ, МС	KM, КА, КD, МА, МВ, МС

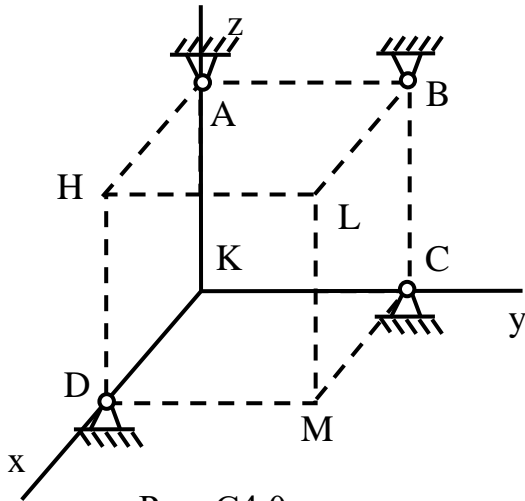


Рис. С4.0

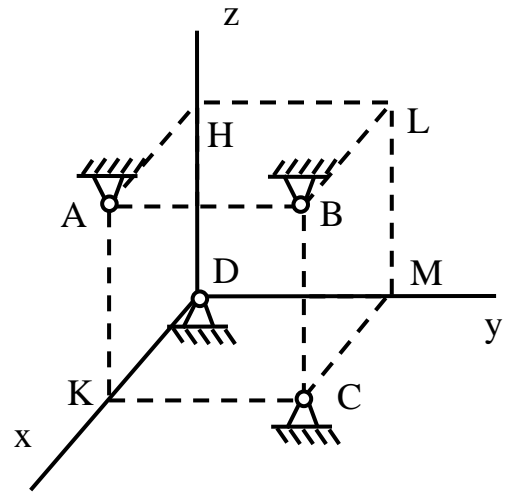


Рис. С4.1

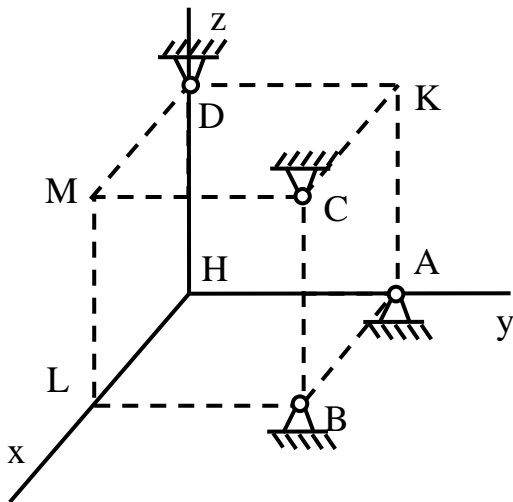


Рис. С4.2

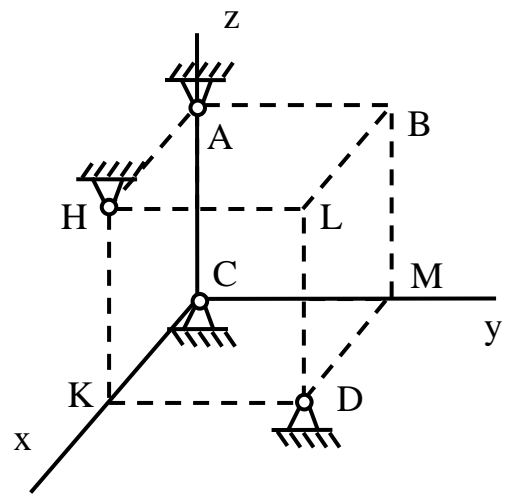


Рис. С4.3

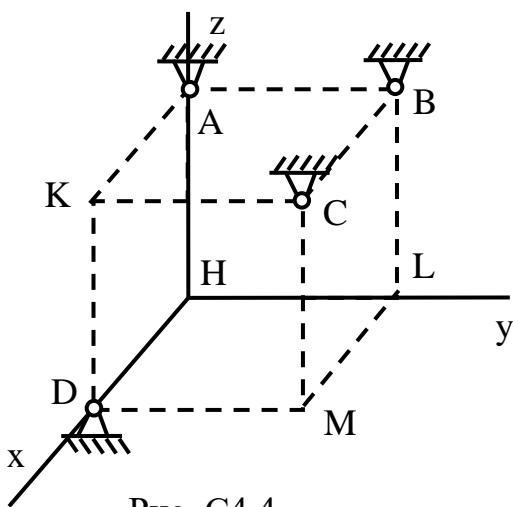


Рис. С4.4

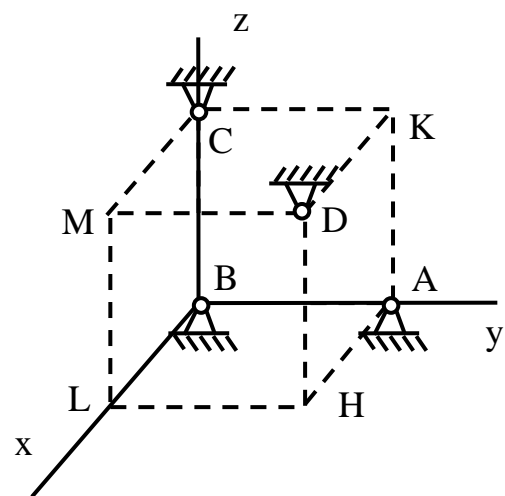


Рис. С4.5

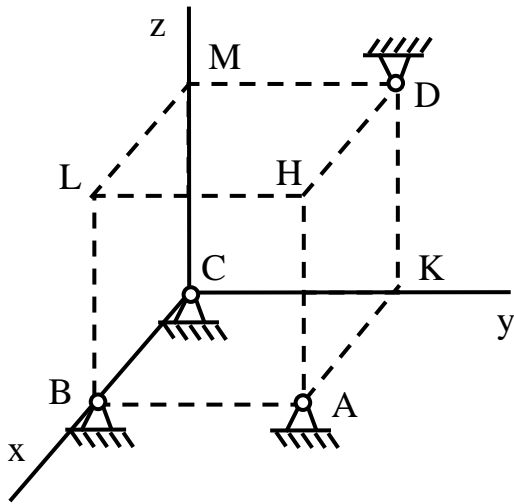


Рис. С4.6

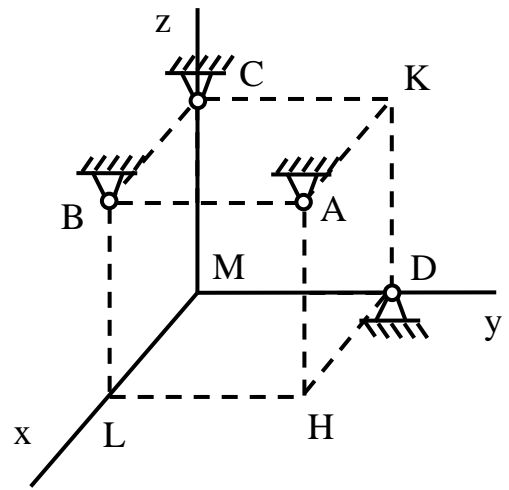


Рис. С4.7

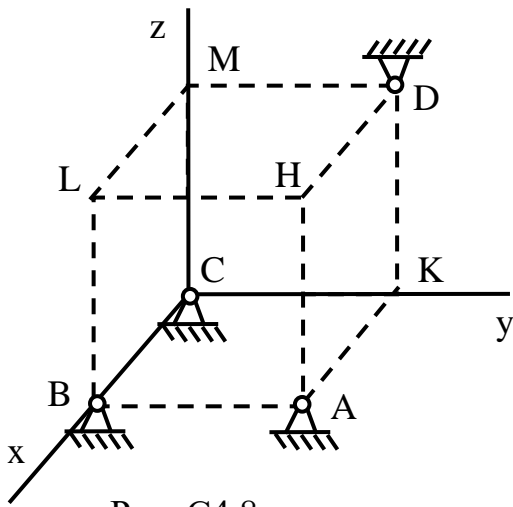


Рис. С4.8

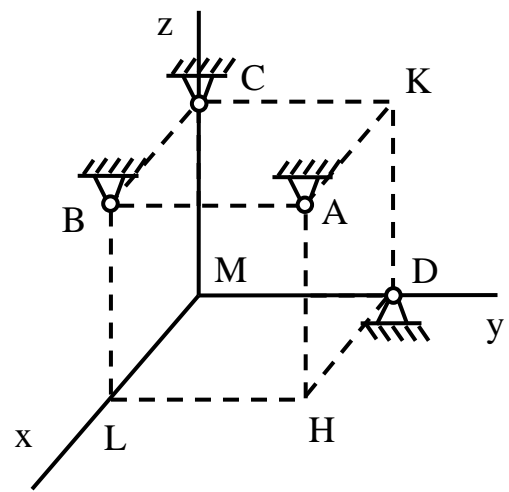


Рис. С4.9

Пример С4.

Конструкция (пространственная ферма) состоит из невесомых стержней 1, 2, ..., 6, соединенных друг с другом (в узлах К и М) и с неподвижными опорами А, В, С, D шарнирами (рис. С4). В узлах К и М приложены силы \vec{P} и \vec{Q} , образующие с координатными осями углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ соответственно (на рисунке показаны только углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$). Дано: $P = 100 \text{ Н}$, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\gamma_1 = 45^\circ$, $Q = 50 \text{ Н}$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\beta_2 = 60^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ$;

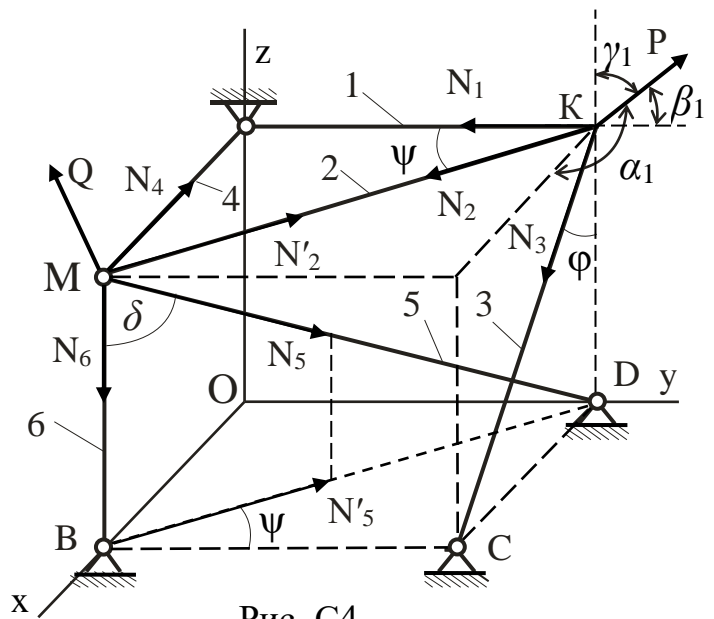


Рис. С4

$\psi = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\delta \approx 74^\circ$. Определить: усилия в стержнях 1- 6.

Решение

1. Рассмотрим равновесие узла К, в котором сходятся стержни 1, 2, 3. На узел действуют сила \bar{P} и реакции $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ стержней, которые направим по стержням от узла, считая стержни растянутыми. Составим уравнения равновесия этой пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad P \cos \alpha_1 + N_2 \sin \psi + N_3 \sin \varphi = 0; \quad (\text{C4.1})$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad P \cos \beta_1 - N_1 - N_2 \cos \psi = 0; \quad (\text{C4.2})$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad P \cos \gamma_1 - N_3 \cos \varphi = 0. \quad (\text{C4.3})$$

Решив уравнения (C4.1) - (C4.3) при заданных числовых значениях силы P и углов, получим: $N_1 = 349 \text{ Н}$, $N_2 = -345 \text{ Н}$, $N_3 = 141 \text{ Н}$.

2. Рассмотрим равновесие узла М. На него действует силы $\bar{Q}, \bar{N}'_2, \bar{N}_4, \bar{N}_5, \bar{N}_6$.

При этом по закону о равенстве действия и противодействия реакция \bar{N}'_2

направлена противоположно \bar{N}_2 , численно же $N'_2 = N_2$.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad Q \cos \alpha_2 - N_2 \sin \psi - N_4 - N_5 \sin \delta \sin \psi = 0; \quad (\text{C4.4})$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Q \cos \beta_2 + N_2 \cos \psi + N_5 \sin \delta \cos \psi = 0; \quad (\text{C4.5})$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Q \cos \gamma_2 - N_5 \cos \delta - N_6 = 0. \quad (\text{C4.6})$$

При определении проекций силы \bar{N}_5 на оси x и y в уравнениях (C4.4) и (C4.5) удобно сначала найти проекцию \bar{N}'_5 этой силы на плоскость xOy (по величине $N'_5 = N_5 \sin \delta$), а затем найденную проекцию на плоскость спроецировать на оси. Решив систему уравнений (C4.4) - (C4.6) и учитывая, что: $N'_2 = N_2 = -345 \text{ Н}$, найдем силы N_4, N_5, N_6 .

Ответ: $N_1 = 349 \text{ Н}$; $N_2 = -345 \text{ Н}$; $N_3 = 141 \text{ Н}$; $N_4 = 50 \text{ Н}$; $N_5 = 329 \text{ Н}$; $N_6 = -66 \text{ Н}$.

Знаки показывают, что стержни 2 и 6 сжаты; остальные – растянуты.