1. Логические выражения и логические операции

Исследования в алгебре логики тесно связаны с изучением ***высказываний*** (хотя высказывание — предмет изучения формальной логики). ***Высказывание*** — это языковое образование, в отношении которого имеет смысл говорить о его истинности или ложности (Аристотель).

Простым высказыванием называют повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл говорить, ***истинно*** оно или ***ложно***.

Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Примеры высказываний:

1. Москва – столица России.
2. Число 27 является простым.
3. Волга впадает в Каспийское море.

Высказывания 1 и 3 являются ***истинными***. Высказывание 2 – ***ложным*** , потому что число 27 составное 27=3•3•3.

Следующие предложения высказываниями не являются:

- Давай пойдем гулять.
- $2•x>8$.
- $a•x^2+b•x+c=0$.
- Который час?

Итак, отличительным признаком высказывания является свойство быть истинным или ложным, последние четыре предложения этим свойством не обладают.

С помощью высказываний устанавливаются свойства, взаимосвязи между объектами. Высказывание истинно, если оно адекватно отображает эту связь, в противном случае оно ложно.

Примеры высказываний:

1. Сегодня светит солнце.
2. Трава растет.

Каждое из этих высказываний характеризует свойства или состояние конкретного объекта (в пермом предложении - погоды, во втором - окружающего мира). Каждое из этих высказываний несет значение ***«истина»*** или ***«ложь»***.
В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, ***истинно*** оно или ***ложно***. Поэтому высказывание можно представить некоторой ***переменной величиной***, значением которой может быть только ***0*** или ***1***. Если высказывание ***истинно***, то его значение равно ***1***, если ***ложно - 0***.

Простые высказывания назвали ***логическими переменными***, а ***сложные - логическими функциями***. Значения логической функции также только ***0*** или ***1***. Для простоты записи высказывания обозначаются латинскими буквами ***А, В, С***.

В булевой алгебре простым высказываниям ставятся в соответствие логические переменные, значение которых равно ***1***, если высказывание ***истинно***, и ***0***, если высказывание ***ложно***. Обозначаются логические переменные, ***большими буквами латинского алфавита***.

Сложные (составные) высказывания представляют собой набор простых высказываний (по крайней мере двух) связанных ***логическими операциями***.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно ***формализовать***, то есть заменить ***логической формулой (логическим выражением)***.

Логическое выражение - это символическая запись высказывания, состоящая из ***логических величин (констант или переменных)***, объединенных ***логическими операциями (связками)***.

Связки ***"НЕ", "И", "ИЛИ"*** заменяются логическими операциями ***отрицание***, ***конъюнкция***, ***дизъюнкция***. Это **основные логические операции**, при помощи которых можно записать любое логическое выражение.

Введем перечисленные ***логические операции***.

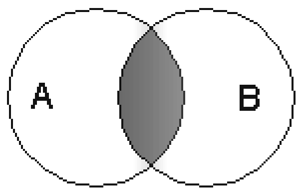
Конъюнкция - логическое умножение (от латинского conjunctio - союз, связь):

- в естественном языке соответствует союзу ***«И»***
- в алгебре высказываний обозначение ***«∧»***

Конъюнкция - это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым (или исходным) высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны. Если хотя бы одно из составляющих высказываний ложно, то и полученное из них с помощью союза ***«И»*** сложное высказывание также считается ложным.
В алгебре множеств ***конъюнкции*** соответствует операция ***пересечения*** множеств, т.е. множеству получившемуся в результате умножения множеств ***А*** и ***В*** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно двум множествам.

Таблица истинности	Диаграмма Эйлера-Венна

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

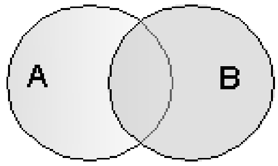


Итак, если два высказывания соединены союзом ***"И"***, то полученное сложное высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны оба исходных высказывания.

Дизъюнкция - логическое сложение (от латинского disjunctio - ***разобщение, различие***):

- в естественном языке соответствует союзу ***«ИЛИ»***
- в алгебре высказываний обозначение ***«∨»*** или ***«+»***

Дизъюнкция - это логическая операция, которая каждым двум простым (или исходным) высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.
В алгебре множеств ***дизъюнкции*** соответствует операция ***объединения*** множеств, т.е. множеству получившемуся в результате сложения множеств ***A*** и ***B*** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо множеству ***A***, либо множеству ***B***.

<table>
<tr><th>Таблица истинности</th><th>Диаграмма Эйлера-Венна</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \vee B$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>


</td></tr>
</table>

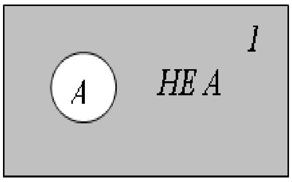
Итак, если два высказывания соединены союзом ***"ИЛИ"***, то полученное сложное высказывание истинно когда истинно хотя бы одно из составляющих высказываний.

Рассмотренные выше операции были двуместными (бинарными), т.е. выполнялись над двумя операндами (высказываниями). В алгебре логики определена и широко используется и одноместная (унарная) операция ***отрицание.***

Отрицание (от латинского disjunctio - ***разобщение, различие***):

- в естественном языке соответствует словам ***«неверно, что...»*** и частице ***«не»***
- в алгебре высказываний обозначение ***«$\bar{A}$»***

Отрицание - логическая операция, которая с помощью связки ***«не»*** каждому исходному высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.
В алгебре множеств ***логическому отрицанию*** соответствует операция ***дополнения*** до универсального множества, т.е. множеству получившемуся в результате отрицания множества ***A*** соответствует множество, дополняющее его до универсального множества.

<table>
<tr><th>Таблица истинности</th><th>Диаграмма Эйлера-Венна</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>$\bar{A}$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>


</td></tr>
</table>

Итак, если исходное выражение истинно, то результат ***отрицания*** будет ложным, и наоборот, если исходное выражение ложно, то результат ***отрицания*** будет истинным.

Логическое следование (импликация):
Высказывание, составленное из двух высказываний при помощи связки ***«если ..., то ...»***, называется ***логическим следованием, импликацией*** (импликация от латинского implico - ***тесно связываю***).

A	B	A=>B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A => B

"Из A следует B"

Итак, новое высказывание, полученное с помощью импликации, является ложным тогда и только тогда, когда условие (посылка ***A***) - истинно, а следствие (заключение ***B***) - ложно и истинно во всех остальных случаях.

Пример. Дано сложное высказывание: «Если выглянет солнце, то станет тепло». Требуется записать его в виде логической формулы. Обозначим через ***A*** простое высказывание «выглянет солнце», а через ***B*** - «станет тепло». Тогда логической формулой этого сложного высказывания будет импликация: **A => B**.

Эквивалентность (логическое тождество):
Высказывание, составленное из двух высказываний при помощи связки ***«тогда и только тогда, когда»***, называется ***эквивалентностью*** (эквивалентность - ***логическое тождество, равнозначность, взаимная обусловленность.***)

A	B	A<=>B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

A <=> B

"A равносильно B"

Итак, новое высказывание, полученное с использованием эквивалентности, является истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

В алгебре логики логические связки и соответствующие им логические операции имеют специальные названия и обозначаются следующим образом:

Логическая связка	**Название логической операции**	**Обозначения**
не	Отрицание	$\bar{A}$
и, а, но	Конъюнкция, логическое умножение	•, $\wedge$

или	Дизъюнкция, логическое сложение	$\vee$, +
если ..., то	Импликация, следование	$\Rightarrow$, $\rightarrow$
тогда и только тогда, когда	эквивалентность, равнозначность	$\Leftrightarrow$, $\leftrightarrow$

Примеры записи сложных высказываний с помощью обозначения логических связок:

1. "Быть иль не быть - вот в чем вопрос." (В. Шекспир) $A \vee \bar{A} <=> B$
2. "Если хочешь быть красивым, поступи в гусары." (К. Прутков) A => B

2. Построение таблиц истинности и логических функций

Логическая функция - это функция, в которой переменные принимают только два значения: ***логическая единица*** или ***логический ноль***. Истинность или ложность сложных суждений представляет собой функцию истинности или ложности простых. Эту функцию называют ***булевой функцией суждений f (a, b)***.

Любая логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности, в левой части которой записывается набор аргументов, а в правой части - соответствующие значения логической функции. При построении таблицы истинности необходимо учитывать порядок выполнения логических операций.

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении:
1. инверсия;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция;
4. импликация;
5. эквивалентность.

Для изменения указанного порядка выполнения операций используются скобки.

Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:
1. Определить количество строк:
   количество строк = 2^n + строка для заголовка,
   n - количество простых высказываний.
2. Определить количество столбцов:
   количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;
3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Пример: Составить таблицу истинности логического выражения:

$$\boldsymbol{D = \bar{A} \wedge (B \vee C)}.$$

<u>Решение:</u>

1. Определить количество строк:
   на входе три простых высказывания: ***A, B, C*** поэтому n=3 и количество строк = 2^3 +1 = 9.
2. Определить количество столбцов:
   - простые выражения (переменные): ***A, B, C***;
   - промежуточные результаты (логические операции):
     $\boldsymbol{\bar{A}}$ - инверсия (обозначим через ***E***);
     $\boldsymbol{B \vee C}$ - операция дизъюнкции (обозначим через ***F***);
     а также искомое окончательное значение арифметического выражения:
     $\boldsymbol{D = \bar{A} \wedge (B \vee C)}$. т.е. $\boldsymbol{D = E \wedge F}$ - это операция конъюнкции.
3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций.

A	**B**	**C**	**E**	**F**	**E $\wedge$ F**
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0