

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}.$$

После интегрирования получаем: 
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ h^2 + R^2 \right]^{\frac{1}{2}} - h.$$

Подставляя числовые значения, находим  $\varphi = 500$  В.

**Пример 2.22.** Внутри заземленной сферической оболочки радиусом  $R=10$  см, помещен точечный заряд  $q = 2 \cdot 10^{-9}$  Кл в точке, удаленной от центра на расстояние  $a = 3$  см.

Определить потенциал в центре сферы, если среда – воздух.

**Решение.** Точечный заряд  $q$  индуцирует на внутренней поверхности заземленной оболочки заряд с плотностью  $\sigma$ . Согласно методу наложения потенциал в заданной точке равен сумме потенциалов от каждого из зарядов:

$$\varphi = \varphi_q + \varphi_\sigma,$$

где  $\varphi_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$  - потенциал поля точечного заряда;

$\varphi_\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{\sigma dS}{r}$  - потенциал поля индуцированных зарядов.

Поскольку потенциал определяется в точке, равноудаленной от внутренней поверхности оболочки, то  $r=R$  и  $\varphi_\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \oint_s \sigma dS$ .

Согласно закону электростатической индукции  $\oint_s \sigma dS = -q$ ,

где  $q$  – заряд, помещенный внутрь оболочки.

Таким образом, для потенциала в центре сферы будем иметь

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Подставляя числовые данные, получаем  $\varphi \approx 420$  В.

## 2.4. Общие методы и приемы расчета поля

В данном разделе приведены задачи, требующие знаний уравнений поля, граничных условий, методов наложения и зеркальных изображений. В ряде задач используются уравнения с потенциальными коэффициентами, а также уравнения Лапласа и Пуассона для одномерного по-

ля. При этом особое внимание уделено методике определения постоянных интегрирования по известным граничным условиям.

**Пример 2.23.** Электрическая ось с линейной плотностью заряда  $+\tau$  расположена в диэлектрике  $\epsilon_a$  параллельно проводящей поверхности на расстоянии  $h$  от нее (рис. 2.8).

Определить поверхностную плотность индуцированного заряда  $\sigma$  в точке  $a$  с известной координатой  $x$ .

**Решение.** Точка  $a$  лежит на границе раздела сред проводник – диэлектрик. Поле в проводнике в условиях электростатики отсутствует, поэтому из (2.10) следует  $\sigma = D_n$ . Поскольку  $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$ , то задача сводится к определению  $E_n$ .

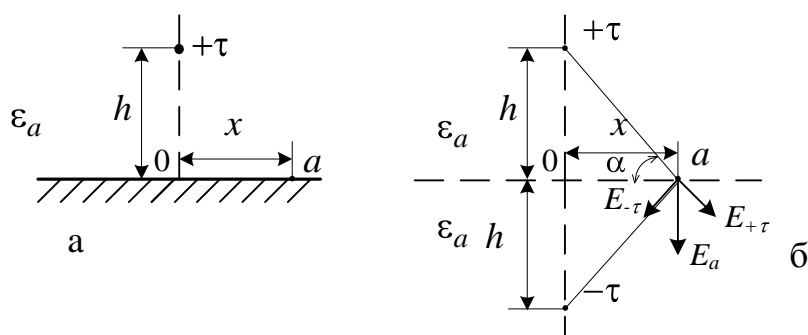


Рис. 2.8

Поле в диэлектрике  $\epsilon_a$  создается не только заряженной осью  $\tau$ , но и зарядами, индуцированными на проводящей поверхности (явление электростатической индукции). Закон изменения индуцированных зарядов не известен, однако их воздействие на рассматриваемое поле можно учесть по **методу зеркальных отображений**.

Метод основан на втором следствии теоремы единственности. Его суть - в замене индуцированных зарядов зарядом-изображением, численно равным исходному заряду, взятому с обратным знаком ( $-\tau$ ) и помещенному в точку зеркального изображения в однородной среде с той же проницаемостью  $\epsilon_a$ . При такой замене условия на границе диэлектрик – проводник не изменяются, и, следовательно, не изменяется поле в диэлектрике.

На рис. 2.8, б показаны исходный заряд  $+\tau$  и отраженный  $-\tau$ , а также направления векторов напряженности, обусловленные этими зарядами. Суммарный вектор  $\mathbf{E}_a = \mathbf{E}_{+\tau} + \mathbf{E}_{-\tau}$  находят графически или аналитически через проекции соответствующих векторов. При этом нетрудно видеть, что суммарный вектор  $\mathbf{E}_a$  нормален поверхности. Напряженность поля заряженной оси в общем виде определяется как

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r},$$

где  $r$  – расстояние от оси до рассматриваемой точки.

Учитывая геометрическое положение исходной и отраженной осей, находим напряженность в точке  $a$

$$E_a = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a \sqrt{h^2 + x^2}} 2 \sin \alpha = \frac{\tau h}{\pi\epsilon_a (h^2 + x^2)}.$$

Таким образом искомая плотность поверхностного заряда составит величину  $\sigma = \frac{\tau h}{\pi (h^2 + x^2)}$ .

**Замечание.** Аналогично рассчитывается поле точечного заряда (сферы малого радиуса по сравнению с расстоянием до поверхности) вблизи проводящей поверхности. Величина отраженного заряда и его местоположение такие же, как в рассмотренном примере.

**Пример 2.24.** На поверхности земли под одиночным заряженным проводом напряженность поля  $E_0 = 750$  В/м. Определить потенциал провода, если его радиус  $R = 1$  см, а высота подвеса  $h = 4$  м.

**Решение.** Как в предыдущем примере, потенциал провода определяется зарядом самого провода и зарядом, индуцированным на поверхности земли. Индуцированный заряд заменим зеркальным изображением заряда провода (с изменением знака) и пренебрежем смещением электрической оси провода ( $h \gg R$ ). Тогда по методу наложения потенциал провода определится как

$$\varphi = \varphi_{+\tau} + \varphi_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r}.$$

Напряженность поля в заданной точке (под проводом) имеет только одну, нормальную к поверхности, составляющую и будет равна сумме напряженностей от каждого из зарядов

$$E_0 = E_{+\tau} + E_{-\tau} = \frac{\tau}{\epsilon_0 h}.$$

Выразив  $\tau$  через  $E_0$ , найдем  $\tau = E_0 \pi \epsilon_0 h$ , а затем  $\varphi = \frac{E_0 h}{2} \ln \frac{2h}{r}$ .

Подставляя числовые данные, получим  $\varphi = 10$  кВ.

**Пример 2.25.** Двухпроводная воздушная линия (рис. 2.9), отключенная от источника, находится в однородном поле грозовой тучи с напряженностью  $E_0 = 2$  кВ/м, направленной перпендикулярно поверхности

земли. Провод 1 – изолирован от земли; провод 2 – заземлен. Высота подвеса проводов  $h = 5$  м; расстояние между ними  $d = 1$  м, а их радиусы  $R = 1$  см.

Найти потенциал провода 1.

**Решение.** Потенциалы проводов определяются действием внешнего поля  $E_0$  и полем линейных зарядов проводов ( $\tau_1$  и  $\tau_2$ ).

По методу наложения определяем  $\varphi_1 = \varphi_1^E + \varphi_1^\tau$ ;  $\varphi_2 = \varphi_2^E + \varphi_2^\tau$ .

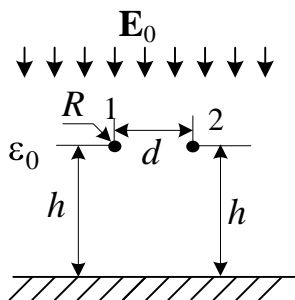


Рис. 2.9

Поскольку провода подвешены на одном уровне, то очевидно, что  $\varphi_1^E = \varphi_2^E = E_0 h$ .

Так как провод 1 изолирован, а линия была отключена от источника, его заряд следует принять равным нулю  $\tau_1 = 0$ . На основании (2.16) заряд  $\tau_2$  и потенциалы проводов взаимосвязаны соотношениями:

$$\varphi_1^\tau = \alpha_{12}\tau_2; \quad \varphi_2^\tau = \alpha_{22}\tau_2, \quad (2.21)$$

где  $\alpha_{12}$  и  $\alpha_{22}$  - потенциальные коэффициенты.

С учетом поля тучи записываем:  $\varphi_1 = \alpha_{12}\tau_2 + E_0 h$ ;  $0 = \alpha_{22}\tau_2 + E_0 h$ .

Решая относительно  $\varphi_1$ , находим  $\varphi_1 = E_0 h \left( 1 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \right)$ .

Собственный потенциальный коэффициент  $\alpha_{22}$ , как следует из (2.22), - это потенциал провода 2, а взаимный потенциальный коэффициент  $\alpha_{12}$  - это потенциал провода 1 при условии, что заряд  $\tau_2$  равен единице. Потенциал поля провода, расположенного над заземленной поверхностью, найден в примере 2.24 методом зеркальных изображений. Используя полученные результаты, получаем:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2h^2 + d^2}}{d} \quad \text{и} \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу искомого потенциала, а затем числовые данные, получим  $\varphi_1 = 6,6$  кВ.

**Пример 2.26.** Заземленный трос находится в однородном поле положительно заряженной тучи. Определить напряженность поля на поверхности троса, если его радиус  $R_0 = 1$  см, высота подвеса относительно земли  $h = 4$  м, а напряженность поля тучи  $E_0 = 0,51$  кВ/см.

**Решение.** Напряженность поля на поверхности провода обусловлена полем грозовой тучи, линейным зарядом провода и зарядом, индуцированным на поверхности земли:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_\tau + \mathbf{E}_\sigma$ .

Заряд провода определим из условия, что его потенциал равен нулю. Используя методы зеркальных изображений и наложения, а также результат предыдущего примера, записываем:

$$\varphi = E_0 h + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R_0}.$$

Решая относительно  $\tau$ , при  $\varphi = 0$  получаем  $\tau = -E_0 h \cdot 2\pi\epsilon_0 / \ln \frac{2h}{R_0}$ .

Зная величину заряда, определяем суммарную напряженность поля на поверхности провода со стороны земли, учитывая поле тучи, действие заряда провода и заряда – изображения:

$$E = -E_0 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 2h} \quad \text{или} \quad E = E_0 h \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2h} \right) / \ln \frac{2h}{R_0} - E_0.$$

Подставляя числовые значения, найдем:  $E \cong 30$  кВ/см.

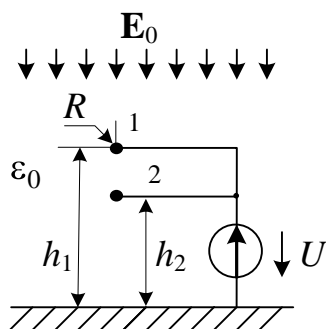


Рис. 2.10

**Пример 2.27.** Двухпроводная линия (радиус проводов  $R=1$  см, высота подвеса  $h_1 = 5,5$  м;  $h_2 = 4,5$  м) находится в однородном поле грозовой тучи с напряженностью  $E_0 = 2$  кВ/м, направленной вертикально. После аварии оба провода находятся под напряжением  $U=11$  кВ (рис. 2.10).

Найти линейную плотность зарядов провода 2.

**Решение.** Линейные заряды проводов и их потенциалы связаны между собой системой уравнений (2.16), которая для данного случая записывается:

$$\varphi_1 = U = \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12} + E_0 h_1;$$

$$\varphi_2 = U = \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} + E_0 h_2,$$

где  $\alpha_{11}, \alpha_{22}$  – собственные;  $\alpha_{12} = \alpha_{21}$  – взаимные потенциальные коэффициенты.

Решаем систему уравнений относительно  $\tau_1$ :  $\tau_1 = \Delta_1 / \Delta$ ,

где 
$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} U - E_0 h_1 & \alpha_{12} \\ U - E_0 h_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Потенциальные коэффициенты, зависящие только от геометрии системы, были определены в предыдущих примерах:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{R}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{R}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}.$$

Подставляя потенциальные коэффициенты в формулу искомого линейного заряда, и учитывая числовые данные, найдем

$$\tau_1 = -6 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м.}$$

**Пример 2.28.** Протяженный провод радиусом  $R$  с плотностью линейного заряда  $+\tau$  проходит в воздухе на известном расстоянии  $(a, b)$  параллельно ребру прямого угла, образованного заземленными проводящими пластинами (рис. 2.11).

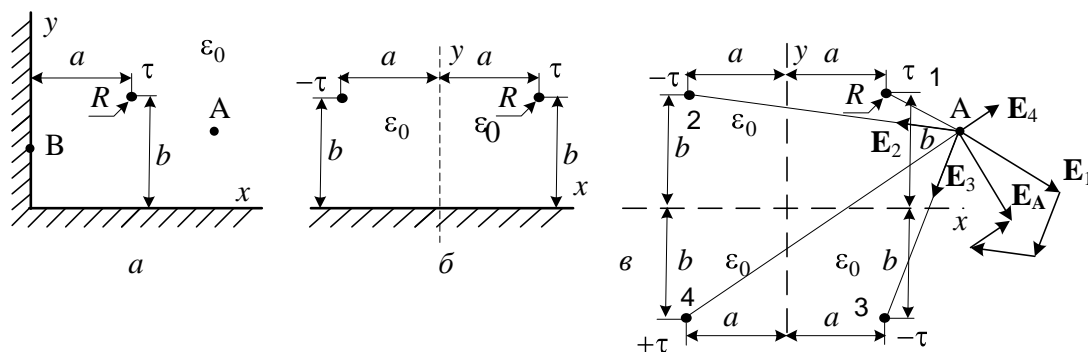


Рис. 2.11

Определить напряженность электрического поля в точке  $A$  с известными координатами  $x_A$  и  $y_A$ , плотность наведенных поверхностных зарядов в точке 2 с координатами  $x_B$  и  $y_B$ , а также потенциал провода.

**Решение.** Для эквивалентной замены зарядов, индуцированных на двух гранях угла, теперь необходимы три заряда – изображения, размещенные, как показано на рис. 2.11, в. Полученная система 4-х линейных зарядов полностью определяет рассматриваемое поле в воздухе. При этом замена заряженных проводов линейными зарядами (осями) возможна только при условии  $R \ll a$  и  $b$ , когда смещением электрических осей проводов можно пренебречь.

Будем полагать, что это условие выполняется.

Напряженность поля от четырех линейных зарядов равна сумме напряженностей от каждой из осей:

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_{1A} + \mathbf{E}_{2A} + \mathbf{E}_{3A} + \mathbf{E}_{4A},$$

где  $E_{kA} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_{kA}}$ ;  $r_{kA}$  - расстояние от точки  $A$  до  $k$ -ой оси. Эти расстояния определяются координатами рассматриваемой точки и заряженных осей:

$$\begin{aligned} r_{1A} &= \sqrt{x_A - a^2 + b - y_A^2}; & r_{2A} &= \sqrt{x_A + a^2 + b - y_A^2}; \\ r_{3A} &= \sqrt{x_A - a^2 + b + y_A^2}; & r_{4A} &= \sqrt{x_A + a^2 + b + y_A^2}. \end{aligned}$$

Напряженность поля – вектор и его направление определяется с учетом знака заряда (для положительного – от заряда, для отрицательного – к заряду). Результирующий вектор напряженности находится сложением векторов графически или аналитически через проекции векторов на координатные оси. Например, напряженность поля в точке А:

$$E_{Ax} = \sum_{k=1}^4 E_{kAx}, \quad E_{Ay} = \sum_{k=1}^4 E_{kAy}, \quad E_A = \sqrt{E_{Ax}^2 + E_{Ay}^2},$$

где  $E_{kAx} = E_{kA} \cos \alpha_k$ ;  $E_{kAy} = E_{kA} \sin \alpha_k$ ;  $\alpha_k$  - угол между осью  $x$  и соответствующим вектором.

Аналогичным образом определяют напряженность в любой точке, в том числе и на поверхности проводящей грани в точке  $B$ . На поверхности проводника касательная составляющая напряженности поля  $E_\tau$  отсутствует, поэтому плотность заряда  $\sigma$  в точке  $B$  будет равна

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{nB}.$$

Если смещением электрических осей пренебречь нельзя, то вектор напряженности находят, представив систему из 4-х проводов двумя двухпроводными линиями, рассчитывая положения электрических осей.

При расстояниях между проводами линии  $2a$  расстояние между осями проводов составляет величину  $2S$ , где  $S = \sqrt{a^2 - R^2}$ .

Потенциал поля в любой точке при известном расположении электрических осей находят алгебраическим суммированием потенциалов, вызванных каждой из осей. Например, для точки А:

$$\varphi_A = \sum_{k=1}^4 -1^{k+1} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{r_{kA}},$$

где  $r_{kA}$  - расстояния от заряженных осей до рассматриваемой точки.

Если точка лежит на поверхности провода, то найденная величина определит потенциал провода.

**Пример 2.29.** Над плоской границей раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_{a1}$  и  $\varepsilon_{a2}$  на высоте  $h$  расположен провод радиусом  $R \ll h$  с линейной плотностью заряда  $\tau$ . (рис. 2.12, а).

Определить потенциал провода, а также напряженность электрического поля в точке А с координатами  $x_A, y_A$ .

**Решение.** По методу зеркальных изображений расчет поля в области с диэлектриком  $\varepsilon_{a1}$  проводят по схеме рис. 2.12, б, где вводят дополнительный фиктивный заряд  $\tau_1 = k_1 \tau$ , а все пространство заполняется средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_{a1}$ .

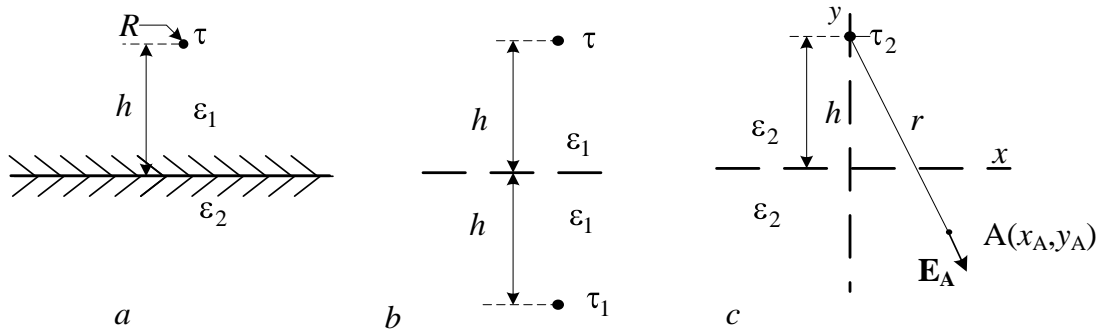


Рис. 2.12

В области с диэлектриком  $\varepsilon_{a2}$  расчет проводят по схеме рис. 2.12, в, где вводят фиктивный заряд  $\tau_2 = k_2 \tau$ , а все пространство заполняется диэлектриком  $\varepsilon_{a2}$ .

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  находят из двух граничных условий (2.10):

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau; \quad k_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau.$$

Таким образом, величины фиктивных зарядов-изображений равны:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau; \quad \tau_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau.$$

Местоположение заряда  $\tau_1$  - точка зеркального отражения исходного заряда, а заряда  $\tau_2$  - в точке расположения заряда  $\tau$ , как видно из рис. 2.12. При известном расположении зарядов и их величинах расчет поля ведется методом наложения.

Потенциал провода (он расположен в верхнем полупространстве) будет равен сумме потенциалов, обусловленных зарядами  $\tau$  и  $\tau_1$

$$\varphi_{\text{пр}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_{1a}} \ln \frac{1}{R} + \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_{2a}} \ln \frac{1}{2h} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_{1a}} \left( \ln \frac{1}{R} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{1}{2h} \right),$$

а напряженность поля в точке А (точка находится в диэлектрике  $\varepsilon_2$ ) определяется линейным зарядом  $\tau_2$ :

$$E_A = \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_{2a}r},$$

где  $r$  - расстояние до точки А, равное  $r = \sqrt{h + y_A^2 + x_A^2}$ .

**Замечания.** 1. Знак заряда  $\tau_1$  зависит от соотношения диэлектрических проницаемостей диэлектриков, если  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , он совпадает со знаком заданного заряда. Знак заряда  $\tau_2$  всегда тот же, что у исходного.



2. Если требуется определить плотность зарядов поляризации на границе раздела диэлектриков  $\sigma_{св}$ , то в указанной точке по схемам рис. 2.12, б и в находят нормальные составляющие вектора напряженности  $E_{1n}$  и  $E_{2n}$  (соответственно со стороны первого и второго диэлектриков), а затем - плотность зарядов  $\sigma_{св} = \varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n})$ .

**Пример 2.30.** Между пластинами плоского конденсатора в диэлектрике с проницаемостью  $\varepsilon_0$  помещен объемный заряд  $\rho = 10^{-6}$  Кл/м<sup>3</sup>. К пластинам конденсатора приложено напряжение  $U=200$  В.

Найти потенциал поля в центре конденсатора, если расстояние между пластинами  $d = 10$  см, а одна из пластин заземлена.

**Решение.** Поле плоского конденсатора с объемным зарядом  $\rho$  удовлетворяет уравнению Пуассона (2.7). В декартовых координатах с учетом изменения поля только по координате  $x$ , уравнение записывается:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Интегрируя по переменной  $x$ , найдем  $\varphi = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + C_1x + C_2$ ,

где  $C_1$  и  $C_2$  - постоянные интегрирования.

Совместив пластину конденсатора нулевого потенциала с началом отсчета координаты  $x$ , будем иметь:  $x = 0$ ;  $\varphi = 0$ . Подставляя это условие в формулу для  $\varphi$ , получаем  $C_2 = 0$ .

Учитывая, что при  $x = d$   $\varphi = U_0$ , имеем  $U_0 = -\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0} + C_1d$ .

Отсюда находим  $C_1 = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} + \frac{U_0}{d}$ , а затем  $\varphi = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho d \cdot x}{2\varepsilon_0} + \frac{U_0 x}{d}$ .

Для точки, лежащей в центре конденсатора ( $x=d/2$ ), после подстановки числовых значений, получаем  $\varphi_{ц} = 241$  В.

**Пример 2.31.** Как изменится потенциал точек в центре конденсатора (пример 2.30), если его пластины замкнуть накоротко и заземлить?

**Решение.** Положив в решении для потенциала  $\varphi$  в примере 2.28 разность потенциалов между пластинами  $U_0 = 0$ , найдем  $\varphi_{ц} = 141$  В.

**Пример 2.32.** В поле цилиндрического конденсатора распределен заряд короны с объемной плотностью  $\rho = 15,1 \cdot 10^{-6}$  Кл/м<sup>3</sup>. Радиусы ци-

линдров  $R_1 = 1$  см;  $R_2 = 3$  см. Конденсатор подключен к источнику с напряжением  $U_0 = 100$  В, причем внутренний цилиндр заземлен. Изоляция конденсатора – воздух.

Определить потенциал поля в точке  $a$ , удаленной от центра на 2 см.

**Решение.** Поле цилиндрического конденсатора с объемным зарядом удовлетворяет уравнению Пуассона (2.7).

В цилиндрической системе координат с учетом симметрии рассматриваемого поля оно записывается:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Двойное интегрирование по  $r$  приведет к выражению

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln r + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - постоянные интегрирования, которые определяются граничными условиями.

Граничные условия в данной задаче таковы: при  $r = R_1$ ;  $\varphi_1 = 0$ , при  $r = R_2$ ;  $\varphi_2 = U_0$ . Подставляя граничные условия в выражение для  $\varphi$ , получаем:

$$0 = -\frac{\rho R_1^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln R_1 + C_2; \quad U_0 = -\frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln R_2 + C_2.$$

Отсюда находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{U_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}; \quad C_2 = \frac{\rho R_1^2}{4\varepsilon_0} - \ln R_1 \left[ \frac{U_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right].$$

Искомый потенциал определится теперь таким образом:

$$\varphi = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \left( R_1^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1} \right) + \frac{U_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}.$$

Подставляя числовые значения, получим  $\varphi = 150$  В.

**Пример 2.33.** Двухслойный цилиндрический конденсатор с радиусом жилы  $r_1 = 1$  см, радиусом границы раздела слоев  $r_2 = 1,8$  см и внутренним радиусом заземленной оболочки  $r_3 = 3$  см (рис. 2.13) находится под напряжением  $U_1 = 100$  В.

Определить распределение потенциала и вектора напряжённости электрического поля внутри конденсатора, если относительные диэлектрические проницаемости материала слоев  $\varepsilon_1=12$ ,  $\varepsilon_2=6,8$ . Конденсатор считать протяженным, краевым эффектом пренебречь.

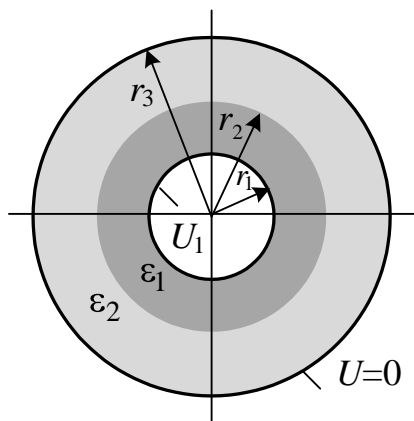


Рис. 2.13

**Решение.** Поле внутри каждого из однородных слоев обладает осевой симметрией и является одномерным. Совместив ось цилиндрической системы координат с осью конденсатора, записываем уравнение Лапласа для каждого из слоев:

$$\Delta\varphi_1(r) = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_1(r) \quad \text{для области} \\ r_1 \leq r \leq r_2;$$

$$\Delta\varphi_2(r) = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_2(r) \quad \text{для области} \\ r_2 \leq r \leq r_3.$$

После интегрирования получаем:

$$\text{для области } r_1 \leq r \leq r_2 \quad \varphi_1(r) = C_1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C_2;$$

$$\text{для области } r_2 \leq r \leq r_3 \quad \varphi_2(r) = C_3 \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C_4,$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (непрерывность потенциала и нормальной составляющей вектора электрического смещения).

Выражая радиальные составляющие вектора напряженности согласно (2.6) в соответствующих областях через потенциалы

$$E_1(r) = -\nabla\varphi_1(r) = \frac{C_1}{r};$$

$$E_2(r) = -\nabla\varphi_2(r) = \frac{C_3}{r},$$

получаем систему алгебраических уравнений, определяющих постоянные интегрирования:

$$C_1 \ln \frac{1}{r_1} + C_2 = U_1; \quad C_1 \ln \frac{1}{r_2} + C_2 = C_3 \ln \frac{1}{r_2} + C_4 \\ C_3 \ln \frac{1}{r_2} + C_4 = 0; \quad \frac{C_1}{r_2} \varepsilon_1 - \frac{C_3}{r_2} \varepsilon_2 = 0.$$

Постоянные интегрирования, а также распределение потенциала и напряженности поля по слоям конденсатора найдем, обращая матрицу коэффициентов  $\mathbf{A}$  и умножая её на вектор  $\mathbf{U}$  в системе MathCAD:

Графические построения также выполним в системе MathCAD.

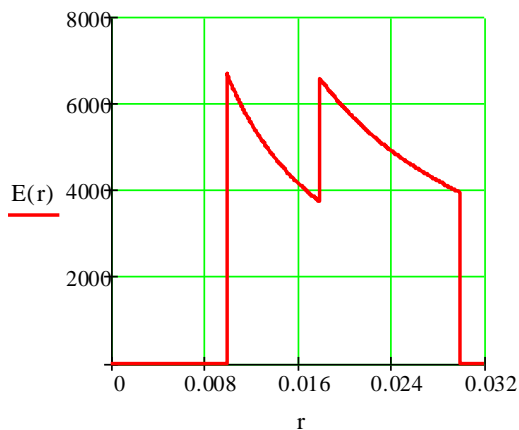
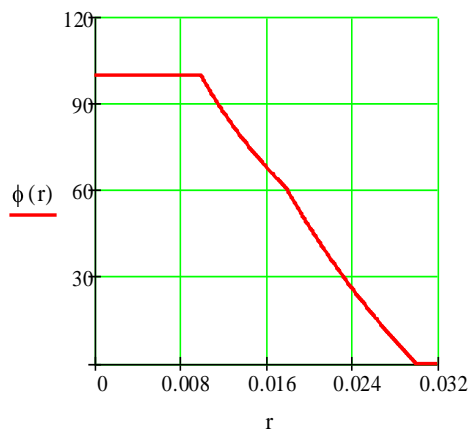
$$r_1 := 0.01 \quad r_2 := 0.018 \quad r_3 := 0.03 \quad U_1 := 100 \quad \varepsilon_1 := 12 \quad \varepsilon_2 := 6.8$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{1}{r_1}\right) & 1 & 0 & 0 \\ \ln\left(\frac{1}{r_2}\right) & 1 & -\ln\left(\frac{1}{r_2}\right) & -1 \\ 0 & 0 & \ln\left(\frac{1}{r_3}\right) & 1 \\ \frac{\varepsilon_1}{r_2} & 0 & \frac{-\varepsilon_2}{r_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} := \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 67.148 \\ -209.229 \\ 118.497 \\ -415.516 \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(r) := C_0 \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C_1 \quad \phi_2(r) := C_2 \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C_3 \quad E_1(r) := \frac{C_0}{r} \quad E_2(r) := \frac{C_2}{r}$$

$$\phi(r) := \begin{cases} \phi_1(r_1) & \text{if } r \leq r_1 \\ \phi_1(r) & \text{if } r_1 \leq r \leq r_2 \\ \phi_2(r) & \text{if } r_2 \leq r \leq r_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(r) := \begin{cases} 0 & \text{if } r \leq r_1 \\ E_1(r) & \text{if } r_1 \leq r \leq r_2 \\ E_2(r) & \text{if } r_2 \leq r \leq r_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Зависимости потенциала  $\phi(r)$ , В и напряженности  $E(r)$ , В/м

**Замечание.** Наличие многослойной изоляции, имеющей различные диэлектрические проницаемости слоев, позволяет выровнять распределение напряженности поля внутри конденсатора. Наилучшее использование свойств диэлектриков при условии  $\varepsilon_k r_k = \text{const}$ .

## 2.5. Емкость, сила и энергия поля

В задачах данного раздела определяются сила  $F$ , энергия  $W$  и емкость  $C$  некоторых практических конструкций. Для решения задач необходимо иметь представление о понятиях: емкость, сила и энергии поля, а также знать их взаимосвязи с источниками поля – зарядами, или векторами поля. Это уравнения (2.12) - (2.14), (2.15), а также

$$\mathbf{F} = -\text{grad}W. \quad (2.23)$$

где  $\mathbf{F}$  – вектор силы, действующей между заряженными телами.

**Пример 2. 34.** Определить емкость между двумя дисками диаметром  $d$ , расположенными в воздухе параллельно друг другу на расстоянии  $h$ . Краевым эффектом пренебречь.

**Решение.** Емкость между любыми двумя телами согласно (2.15) равна  $C = q/U$ . Поскольку краевой эффект не учитывается, считаем, что заряд по диску распределен равномерно с плотностью  $\sigma = \varepsilon_0 E$ . Тогда  $q = \sigma S$ , где  $S$  – площадь диска, равная  $\pi d^2/4$ .

Разность потенциалов между дисками определим по (2.6), считая поле вектора  $\mathbf{E}$  однородным:

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \int \mathbf{E} d\mathbf{l} = hE.$$

Подставляя составляющие в формулу (2.15) получаем:

$$C = \frac{\varepsilon_0 ES}{hE}, \text{ или } C = \frac{\varepsilon_0 \pi d^2}{4h}.$$

**Пример 2.35.** Определить емкость двухслойного цилиндрического конденсатора с радиусами электродов  $r_1$  и  $r_3$  и радиусом поверхности раздела слоев  $r_2$  (рис. 2.13). Длина конденсатора  $l$ . Относительные диэлектрические проницаемости слоев  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Искажением поля у краев конденсатора – пренебречь.

**Решение.** По-прежнему используем формулу (2.15)  $C = q/U$ , где  $U = \varphi_1 - \varphi_3$  ( $\varphi_1$  – потенциал внутреннего электрода,  $\varphi_3$  - внешнего).

Учитывая цилиндрическую симметрию поля, выразим разность потенциалов между электродами через напряженности первого  $E_1$  и второго  $E_2$  слоев, воспользовавшись соотношением (2.6):

$$\varphi = - \int \mathbf{E} d\mathbf{r}; \quad U = \int_{r_2}^{r_1} E_1 dr - \int_{r_3}^{r_2} E_2 dr.$$

Напряженность поля цилиндрического конденсатора в каждом из слоев определяется по известным формулам:

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_{1a}rl}, \quad E_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_{2a}rl},$$

где  $q$  – заряд одной из оболочек (электродов).

Подставляя в формулу для разности потенциалов выражения  $E_1$  и  $E_2$ , после интегрирования получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi l} \left[ \frac{1}{\epsilon_{a1}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{a2}} \ln \frac{r_3}{r_2} \right].$$

На основании (2.15) емкость цилиндрического конденсатора составляет величину

$$C = \frac{2\pi l}{\frac{1}{\epsilon_{1a}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{2a}} \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

**Замечание.** Емкость двухслойного конденсатора можно определить, рассматривая ее как последовательное соединение емкостей первого  $C_1 = \frac{2\pi\epsilon_{a1}l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$  и второго слоев  $C_2 = \frac{2\pi\epsilon_{a2}l}{\ln \frac{r_3}{r_2}}$  конденсатора, т.е. как

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

**Пример 2.36.** Плоский конденсатор емкостью 20 пФ со слюдяным диэлектриком  $\epsilon_r = 6,28$ ;  $E_{пр} = 800$  кВ/см должен быть рассчитан на рабочее напряжение  $U_p = 20$  кВ и четырехкратный запас прочности по напряженности.

Определить толщину диэлектрика  $d$  и площадь пластин  $S$ .

**Решение.** Четырехкратный запас прочности обеспечивается, если напряженность поля конденсатора не превысит величины  $E_p = 200$  кВ/см. Чтобы обеспечить заданное напряжение  $U_p$ , толщина изоляции должна быть не менее  $d = U_p / E_p$ . Для заданных параметров получим  $d = 0,1$  см.

Емкость плоского конденсатора определяется как  $C = \epsilon_a S / d$ . Отсюда находим площадь пластин  $S = Cd / \epsilon_a$ .

Подставляя числовые значения, получаем  $S = 3,6 \text{ см}^2$ .

**Пример 2. 37.** Определить емкость единицы длины двухпроводной линии в воздухе с учетом влияния земли (рис 2.14).

Радиус проводов  $R_1=R_2=R$ , высота подвеса обоих проводов  $h$ , расстояние между проводами  $d$ . Смещением электрических осей пренебречь ( $R \ll h$ ).

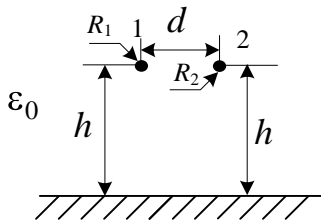


Рис. 2.14

**Решение.** Емкость единицы длины линии (при равенстве зарядов проводов эту емкость называют рабочей) определяется по формуле

$$C = \frac{\tau}{\Phi_1 - \Phi_2},$$

где  $\tau$ - линейный заряд одного из проводов;  
 $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  - потенциалы проводов,

Потенциалы проводов определим через потенциальные коэффициенты:

$$\Phi_1 = \alpha_{11}\tau - \alpha_{12}\tau; \quad \Phi_2 = \alpha_{21}\tau - \alpha_{22}\tau,$$

где  $\alpha_{11}, \alpha_{22}$ - собственные и  $\alpha_{12}, \alpha_{21}$ - взаимные потенциальные коэффициенты. В силу симметрии расположения проводов

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21}.$$

Потенциальные коэффициенты найдены в примерах 2.25, 2.27:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{d^2 + (2h)^2}}{d}.$$

Подставляя потенциальные коэффициенты в формулу емкости, получаем

$$C = \frac{1}{2 \alpha_{11} - \alpha_{12}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left[ \frac{2h}{R} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + 2h^2}} \right]}.$$

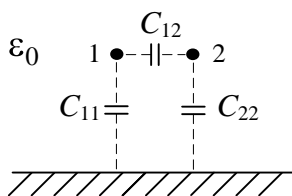


Рис. 2.14, а

**Замечание.** Если известны частичные емкости, рабочую емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли легко найти через эти емкости. Так, в случае двухпроводной линии, как видно из рис. 2.15, а, рабочая емкость будет

$$C = C_{12} + \frac{C_{11} \cdot C_{22}}{C_{11} + C_{22}},$$

**Пример 2.38.** Внутри полого тонкостенного и заземленного цилиндра радиусом  $R=25$  см помещена двухпроводная линия (рис. 2.14). Радиус проводов линии  $r_0=0,5$  см, расстояние между проводами  $2a=25$  см. Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon=1$ .

Определить емкость двухпроводной линии на единицу длины.

**Решение.** Так как радиус проводов линии много меньше радиуса цилиндра ( $r_0/R=0,02$ ), смещением электрических осей в проводах можно пренебречь и считать распределение электрических зарядов по поверхности проводов равномерным с линейной плотностью  $\tau$ . Примем на левом проводе знак заряда отрицательным, справа - положительным.

В поле каждой пары двухпроводных линий, лежащих по разные стороны оси  $y$ , экран будет эквипотенциальным, если выполняется условие  $ab = R^2$ , т.е. если  $b = R^2/a = 25^2/12,5 = 50$  см.

Потенциал любой точки, например  $M$ , поверхности экрана по условию равен нулю

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left( \ln \frac{b-R}{R-a} + \ln \frac{R+a}{R+b} \right) + C = 0,$$

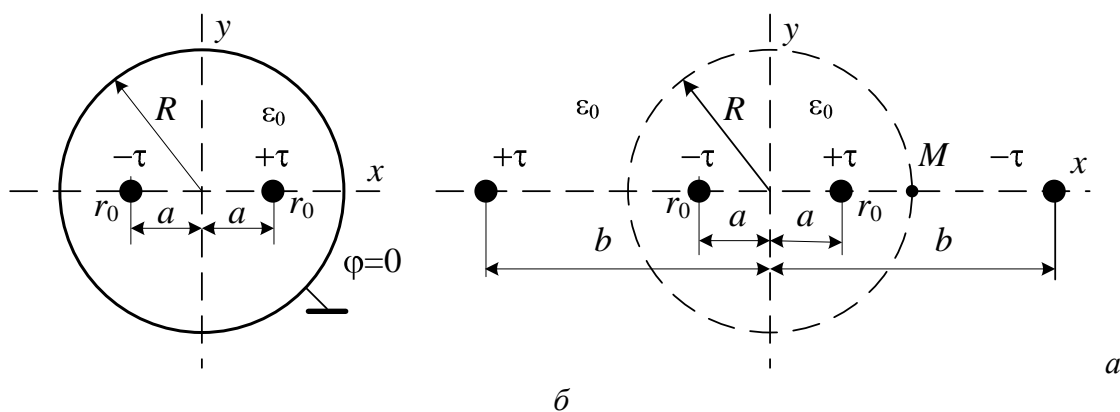


Рис. 2. 15

откуда следует 
$$C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left( \ln \frac{25}{12,5} + \ln \frac{37,5}{75} \right) = 0.$$

Потенциалы проводов:

$$\varphi_{+\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left( \ln \frac{b-a+r_0}{r_0} + \ln \frac{2a-r_0}{b+a-r_0} \right);$$

$$\varphi_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left( \ln \frac{b+a-r_0}{2a-r_0} + \ln \frac{r_0}{b-a+r_0} \right).$$

Емкость проводов на единицу длины



$$C = \frac{\tau}{\varphi_{+\tau} - \varphi_{-\tau}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{(b-a+r_0)(2a-r_0)}{r_0(b+a-r_0)}\right) - \ln\left(\frac{r_0(b+a-r_0)}{(b-a+r_0)(2a-r_0)}\right)}.$$

После некоторых преобразований получаем

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{(b-a+r_0)(2a-r_0)}{r_0(b+a-r_0)}\right)}.$$

Численно

$$C = \frac{\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}}{\ln\left(\frac{(50-12,5+0,5)(25-0,5)}{0,5(50+12,5-0,5)}\right)} = \frac{10^{-9}}{36 \cdot \ln 30,032} = 8,164 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

**Пример 2.39.** Плоский конденсатор с пластинами площадью  $S=10\text{см}^2$  и расстоянием между ними  $d=0,5$  см подключен к источнику напряжением  $U=10$  кВ.

Определить силу притяжения пластин конденсатора друг к другу, если относительная диэлектрическая проницаемость изоляции  $\varepsilon=5$ .

**Решение.** Согласно (2.23) сила, действующая в электрическом поле, равна градиенту энергии. Действие силы в плоском конденсаторе – одномерное, с направлением действия перпендикулярно пластинам.

Совместив в плоскости чертежа след пластины с осью  $y$ , для модуля силы будем иметь  $F = dW/dx$ , где  $x$  – переменная (направление действия силы). Энергия плоского конденсатора согласно (2.12) равна

$$W = \varepsilon_a E^2 V / 2,$$

где  $V=Sx$  – объем, занятый полем.

Взяв производную, получаем

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 S.$$

Определяя напряженность поля плоского конденсатора по формуле  $E=U/d$ , найдем:

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2} S.$$

$$\text{Численно: } F = \frac{1}{2} 5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{10 \cdot 10^3}{0,05^2} 10 \cdot 10^{-4} = 8,85 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

**Пример 2.40.** Диэлектрик в плоском конденсаторе примера 2.39 заменен двумя слоями с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1=2,6$  и  $\epsilon_2=5,2$ . Емкость конденсатора при этом не изменилась.

Определить толщину каждого из слоев ( $d_1$  и  $d_2$ ).

**Решение.** Двухслойный плоский конденсатор можно рассматривать как два плоских конденсатора, соединенных последовательно.

При последовательном соединении конденсаторов их общая емкость определяется по формуле

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2.$$

Заменяя емкости  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$  их выражениями, получаем:

$$d/\epsilon = d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2.$$

Численное решение приведено в документе MathCad.

$\text{Given } d_1 + d_2 = 0.5 \quad \frac{d}{\epsilon} = \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \quad x := \text{Find } d_1, d_2 \quad x = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.48 \end{pmatrix}$
--

Таким образом, толщина слоев будет:  $d_1=0,02$  см;  $d_2=0,48$  см.

**Пример 2.41.** Определить энергию на единицу длины цилиндрического конденсатора с радиусами электродов  $r_1=10$  см;  $r_2=20$  см, если между электродами включен источник ЭДС  $U=20$  кВ, а диэлектрическая проницаемость изоляции  $\epsilon_a = 4\epsilon_0$ .

**Решение.** Проще всего определить энергию цилиндрического конденсатора, воспользовавшись формулой

$$W = CU^2/2 \tag{2.23}$$

В примере 2.35 емкость цилиндрического конденсатора найдена:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Подставляя в формулу (2.23) выражение емкости, получаем

$$W = \frac{2\pi\epsilon_a U^2 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Численно энергия равна  $W=6,4 \cdot 10^{-2}$  Дж.

**Пример 2.42.** Как изменится энергия на единицу длины цилиндрического конденсатора в примере 2.41, если изоляцию между электродами выполнить двухслойной, а емкость конденсатора оставить прежней?

Останется ли при этом удельная плотность энергии вблизи электродов конденсатора без изменения?

**Решение.** Если емкость конденсатора не изменилась, то согласно соотношению (2.23) его энергия останется прежней. Однако плотность энергии вблизи поверхности электродов конденсатора при изменении диэлектрической проницаемости изоляции, как следует из формулы (2.12), изменится.

**Пример 2.43.** Определить силу, действующую на единицу поверхности тонкой стеклянной пластинки больших размеров, помещенную перпендикулярно линиям напряженности ( $E_0=50$  кВ/см) однородного поля в среде с  $\epsilon_1=1$ . Относительная диэлектрическая проницаемость пластинки  $\epsilon_2=8$ .

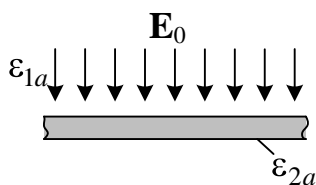


Рис. 2.16

**Решение.** На поверхности раздела двух диэлектриков возникают механические силы, стремящиеся деформировать диэлектрик, находящийся в электрическом поле. Это явление называется электрострикцией. Силы взаимодействия внутри однородных диэлектриков взаимно уравновешиваются и проявляются лишь на границах

разнородных сред. Значение этих сил, отнесенных к единице поверхности, определяется согласно (2.23) и численно равно плотности энергии

$$f = \frac{ED}{2}.$$

Силы, действующие с каждой из сторон границы раздела сред, можно представить в виде двух составляющих: нормальной к поверхности и касательной. Касательные составляющие силы по обе стороны границы раздела сред всегда равны друг другу и направлены противоположно, т.е. компенсируют друг друга. В нашем случае их вообще нет, так как вектор напряженности поля перпендикулярен границе раздела сред. Нормальные составляющие силы также направлены противоположно друг другу, но их величина по разные стороны границы различны, так что результирующая сила будет равна

$$f_n = \frac{ED}{2} \left( \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) = \frac{\epsilon_{1a}(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\epsilon_1\epsilon_2} E_n^2.$$

Подставляя числовые данные, находим

$$f_n = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} (8-1)}{2 \cdot 1 \cdot 8} (50 \cdot 10^3 \cdot 10^2)^2 = 96,8 \text{ Н/м}^2.$$

Эта сила действует в сторону среды с меньшей проницаемостью ( $\epsilon_1$ ).