Контрольная работа №1

Теория.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (**фокусов**) той же плоскости есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

Сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов обычно обозначают через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. По определению $2a > 2c$, то есть $a > c$.

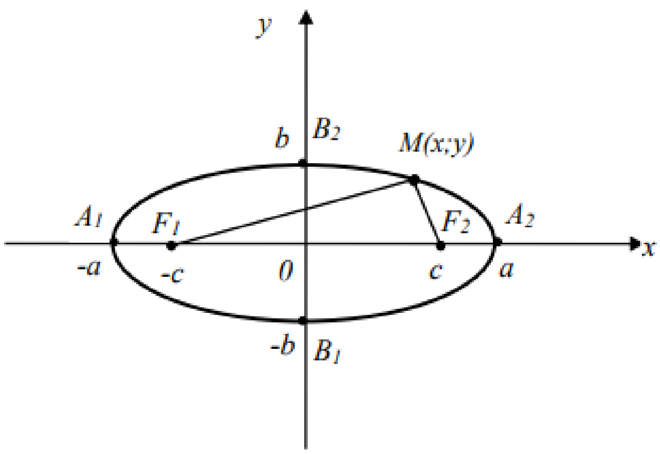
Если оси координат расположены так, что фокусы $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ лежат на оси Ox, а начало координат совпадает с серединой отрезка F_1F_2 (рис. 4.6*а*), то из равенства $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, где $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса, можно вывести **каноническое** или простейшее **уравнение эллипса**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,} \quad (b^2 = a^2 - c^2) \text{ и } (a > b). \tag{4.12}$$

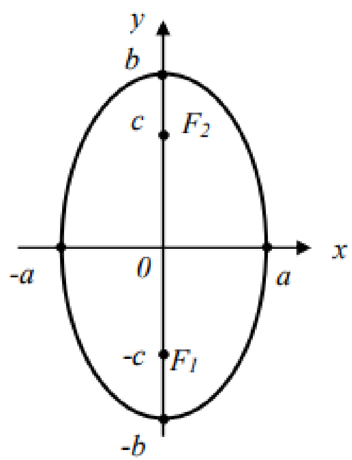
Основными элементами эллипса являются:

- центр симметрии $O(0;0)$ – **центр** эллипса;
- оси симметрии Ox и Oy;
- $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – фокусы;
- точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)$ – **вершины** эллипса;
- отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ – **большая** и **малая ось** эллипса соответственно;
- a и b – **большая** и **малая полуось** эллипса соответственно.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется **эксцентриситетом** $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$.



а



б

Рис. 4.6

Если $a < b$, то уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ задает эллипс, большая полуось которого равна b и лежит на оси Oy, а малая ось равна a и лежит на оси Ox. Фокусы такого эллипса расположены в точках $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$, где $a^2=b^2-c^2$ (рис. 4.6*б*).

Задание 2. Дано уравнение эллипса $4x^2+9y^2=36$. Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Решение

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=1.$$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ — каноническое уравнение эллипса.

Так как $a^2=9$, то $a=3$ — большая полуось, $b^2=4$, $b=2$ — малая полуось.

$A_1(-3;\ 0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;\ -2)$, $B_2(0;2)$ — вершины эллипса.

Найдем c — расстояние от центра эллипса до каждого фокуса по формуле связи $c^2=a^2-b^2$, получим $c^2=9-4=5$, $c=\sqrt{5}$.

Тогда $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$ — фокусы эллипса.

Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$, получим $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

По полученным данным можно построить эллипс (рис. 2).

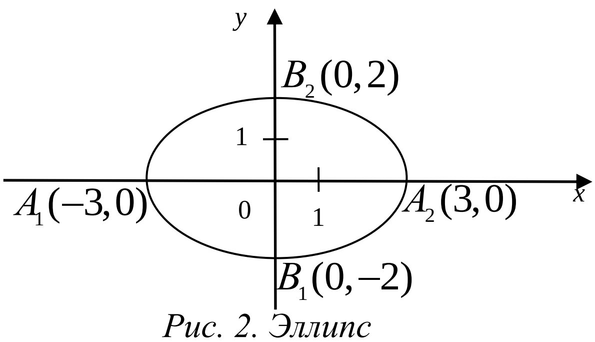


Рис. 2. Эллипс

Теория.

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (**фокусов**) той же плоскости есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов обычно обозначают через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. По определению $2a < 2c$, то есть $a < c$.

Если выбрать систему координат так, что фокусы $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ лежат на оси Ox, а начало координат совпадает с серединой отрезка F_1F_2 (рис. 4.8), то из равенства $|MF_1 - MF_2| = 2a$, где $M(x;y)$ – произвольная точка гиперболы, можно вывести **каноническое уравнение гиперболы**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \quad (b^2 = c^2 - a^2). \tag{4.14}$$

Основными элементами гиперболы являются:

- центр симметрии $O(0;0)$ – **центр** гиперболы;
- оси симметрии Ox и Oy;
- $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – фокусы;
- точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – **вершины** гиперболы;
- отрезок $A_1A_2 = 2a$ – **действительная** ось гиперболы;
- отрезок $B_1B_2 = 2b$ – **мнимая ось** гиперболы;
- a и b – **действительная** и **мнимая полуоси** гиперболы соответственно;
- прямоугольник, образованный прямыми $x = a$; $x = -a$; $y = b$; $y = -b$ – **основной прямоугольник** гиперболы;
- две прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ – **асимптоты** гиперболы.

Замечание. При удалении от начала координат гипербола сколь угодно близко подходит к своим асимптотами, не пересекая их. Построение гиперболы удобно начинать с построения основного прямоугольника и его диагоналей, которые являются асимптотами гиперболы.

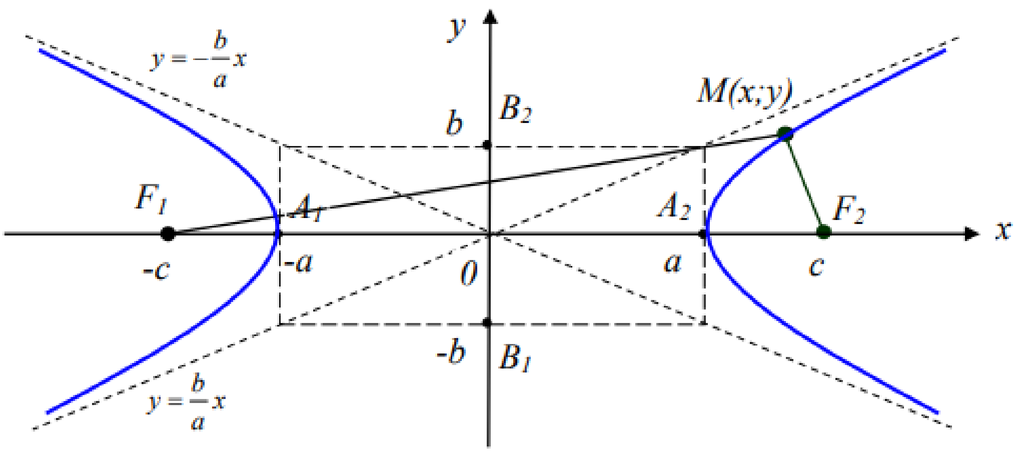


Рис. 4.8

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом гиперболы** и характеризует ее форму. Если $a = b$, то гиперболу называют **равносторонней**.

Задание 3. Даны действительная полуось $a = 2\sqrt{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{3}$ гиперболы. Построить гиперболу и найти координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот гиперболы.

Решение

$A_1\left(-2\sqrt{3};0\right)$, $A_2\left(2\sqrt{3};0\right)$ — вершины гиперболы.

Из формулы для нахождения эксцентриситета гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a}$ найдем значение c — расстояние от центра гиперболы до каждого фокуса:

$$c = \varepsilon a = \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Тогда $F_1\left(-6;0\right)$, $F_2\left(6;0\right)$ — фокусы гиперболы.

Из формулы связи $c^2 = a^2 + b^2$ найдем мнимую полуось b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 36 - 12 = 24,$$

$$b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Составим каноническое уравнение гиперболы, которое имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Получим $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm\frac{b}{a}x$. Подставив $a = 2\sqrt{3}$, и $b = 2\sqrt{6}$, получим $y = \pm\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}x$.

После преобразований имеем: $y = \pm\sqrt{2}x$ — уравнения асимптот данной гиперболы.

Построим гиперболу (рис. 3).

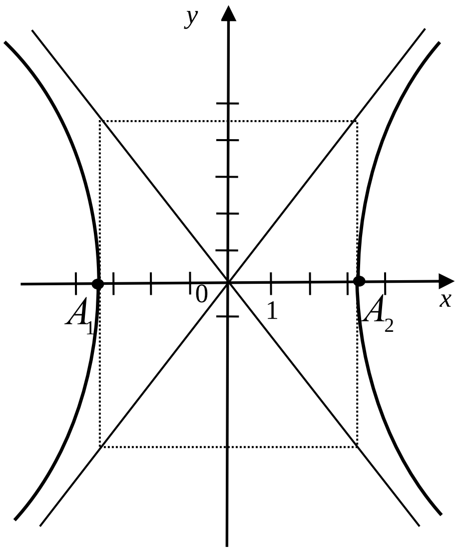


Рис. 3. Гипербола

Теория.

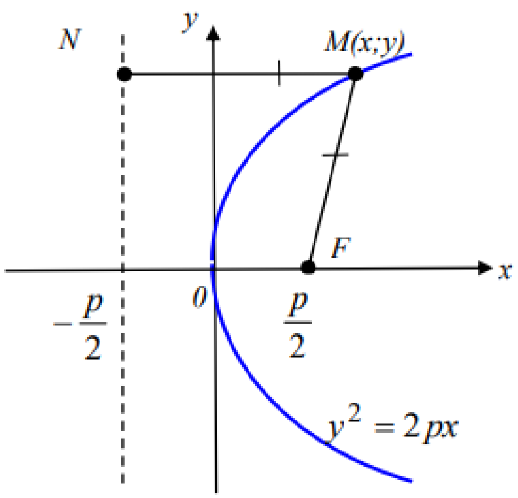


Рис. 4.10

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (**фокуса**) и данной прямой (**директрисы**), расположенных в той же плоскости (рис. 4.10). Расстояние от фокуса до директрисы обозначают p и называют **параметром** параболы. Если выбрать систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокус, перпендикулярно директрисе по направлению от директрисы к фокусу и начало координат посредине между фокусом и директрисой, то уравнение директрисы будет

$x = -\frac{p}{2}$, а фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

Тогда из равенства $|MF| = |MN|$, где $M(x;y)$ – произвольная точка параболы, можно вывести **каноническое уравнение параболы**

$$\boxed{y^2 = 2px.} \qquad (4.16)$$

Основными элементами параболы являются:

- ось Ox – **ось симметрии** параболы;
- точка $O(0;0)$– **вершина** параболы;
- прямая $x = -\frac{p}{2}$ – **директриса** параболы;
- точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – **фокус** параболы.

Возможны другие расположения параболы на плоскости (рис. 4.11), которые задаются уравнениями:

а) $y^2 = -2px$; б) $x^2 = 2py$; в) $x^2 = -2py$.

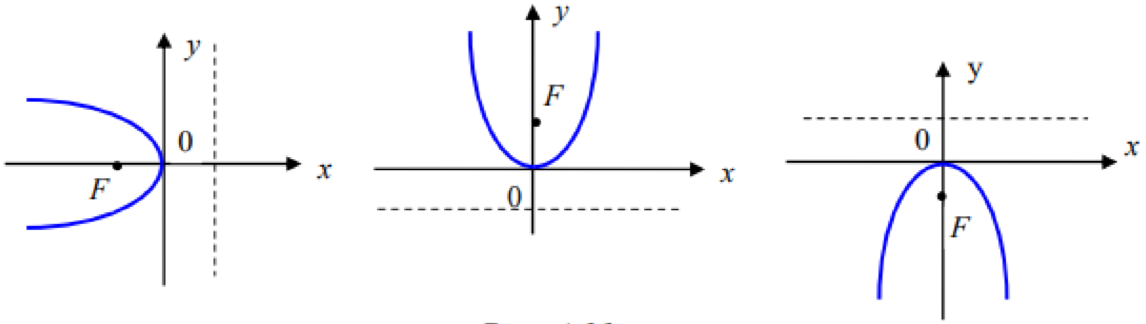


Рис. 4.11

Задание 4. Дано уравнение параболы $y^2 = 4x$. Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.

Решение

$y^2 = 4x$ — уравнение параболы, с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox, с ветвями, идущими вправо.

$y^2 = 2px$ — общий вид уравнения такой параболы, где p — расстояние между фокусом и директрисой.

Из уравнения находим: $2p = 4$, откуда $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$.

Директрисой параболы $y^2 = 2px$ является прямая, параллельная оси Oy, с уравнением $x = -\frac{p}{2}$, а фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Таким образом, для данной параболы директрисой служит прямая $x = -1$, а точка $F(1; 0)$ — фокусом.

По данным исследования построим параболу.