САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Дифференциальные уравнения

Рассматриваются вопросы:

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Общее решение.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
6. Уравнения Бернулли.
7. Основные понятия о дифференциальных уравнениях второго порядка.
8. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
9. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго поряка с постоянными коэффициентами
10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях

- ***Дифференциальным уравнением*** называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и производные искомой функции y', y'', y''', …, $y^{(n)}$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 .$$

- ***Порядком*** дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной.

Например, $yy' + x = 0$ — дифференциальное уравнение первого порядка; $y'' - 6y' + 8y = 0$ — дифференциальное уравнение второго порядка.

- ***Решением*** дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, функция $y = e^x$ есть решение уравнения $y' - y = 0$, т.к. при подстановке ее в уравнение получаем тождество $e^x - e^x = 0$.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Общее решение

- ***Дифференциальное уравнение первого*** порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение разрешить относительно производной y', то получим

$$y' = f(x, y),$$

дифференциальное уравнение первого порядка, ***разрешенное относительно производной.***

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в ***дифференциальной форме***

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесчисленное множество решений.

- ***Общим решением*** дифференциального уравнения первого порядка называется такое его решение $y = \varphi(x, C)$, которое является функцией переменной x и произвольной постоянной C.

- Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения.

- ***Частным решением*** дифференциального уравнения первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C_0)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

- Если частное решение дифференциального уравнения первого порядка найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C_0) = 0$, то такое решение называется ***частным интегралом*** дифференциального уравнения.

- График любого частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***. Общему решению $y = \varphi(x, C)$ соответствует ***семейство интегральных кривых***.

На практике искомое частное решение дифференциального уравнения первого порядка получают из общего решения исходя из ***начальных условий***

$$y(x_0) = y_0.$$

Найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0)=y_0$, геометрически означает выделение из семейства интегральных кривых, которое соответствует общему решению $y=\varphi(x,C)$, единственной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0).

- Задача отыскания частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши***.

Теорема (Коши) (о существовании и единственности решения):

Если в уравнении $y'=f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области *D*, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

- Точки, в которых условия теоремы существования и единственности нарушаются, называются ***особыми точками***.

3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

- Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением ***с разделяющимися переменными***, если оно может быть представлено в виде

$$y'=f(x)g(y)$$

или

$$P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0.$$

Рассмотрим способ решения уравнения $P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$.

Его особенность состоит в том, что при дифференциалах dx и dy стоят произведения функций, по отдельности зависящих от *x*, от *y*.

Разделим обе части уравнения на произведение $Q_1(y)P_2(x)\neq 0$, получим

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0.$$

Интегрируем обе части уравнения

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0.$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Пример:

Решить уравнение $x(1-y^2)dx+y(1-x^2)dy=0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на произведение $(1-y^2)(1-x^2)$, получим

$$\frac{x}{1-x^2}dx+\frac{y}{1-y^2}dy=0.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{x}{1-x^2}dx+\int\frac{y}{1-y^2}dy=0.$$

Получим:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right|=C.$$

Преобразуя, получим общий интеграл:

$$(1-x^2)(1-y^2)=C.$$

Рассмотрим способ решения уравнения $y'=f(x)g(y)$.

Его особенность состоит в том, что в правой части стоит произведение функций, по отдельности зависящих от *x*, от *y*.

Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y).$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy=f(x)g(y)dx.$$

Разделим на $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx.$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Пример:

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'=tgx(y+1)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi)=0$.

Решение.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение (общий интеграл). Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=tgx(y+1).$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy=tgx(y+1)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $(y+1)$:

$$\frac{dy}{y+1} = tgxdx.$$

Интегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int tgxdx.$$

Получим:

$$\ln|y+1| = -\ln|\cos x| + C \text{ — общий интеграл.}$$

Подставим в общий интеграл начальные условия $x = \pi$, $y = 0$ и найдем соответствующее им значение C:

$$\ln 1 = -\ln|\cos\pi| + C,$$

$$C = 0.$$

Подставим найденное значение $C = 0$ в общий интеграл и получим частный интеграл, удовлетворяющий заданным начальным условиям:

$$\ln|y+1| = -\ln|\cos x|.$$

Преобразуем:

$$y + 1 = \frac{1}{\cos x}.$$

Тогда $y = \frac{1}{\cos x} - 1$ — частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $y = f(x, y)$ называется ***однородной порядка n***, если для произвольного числа t выполняется равенство

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Например, $f(x, y) = x^2 - xy$ — однородная функция второго порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — однородная функция нулевого порядка, называется ***однородным***.

Для решения этого уравнения следует привести его к виду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и сделать замену:

$$u = \frac{y}{x},$$

$$y = ux,$$

$$y' = u'x + u.$$

В результате замены получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = \varphi(u),$$

$$u'x = \varphi(u) - u,$$

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u,$$

$$xdu = (\varphi(u) - u)dx\,,$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}\,,$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}\,.$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение может быть в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\,,$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — однородные функции одинакового порядка.

Для его решения разделим обе части на dx:

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0\,,$$

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\,,$$

т.е. получили уравнение предыдущего вида.

Пример: Решить уравнение $\left(x^2 - y^2\right)dx + xydy = 0$.

Решение.

Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части на dx:

$$x^2 - y^2 + xy\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

$$x^2 - y^2 + xyy' = 0\,,$$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}\,,$$

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}\,.$$

Сделаем замену:

$$u = \frac{y}{x}\,,$$

$$y = ux\,,$$

$$y' = u'x + u\,,$$

получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = u - \frac{1}{u}\,,$$

$$u'x = -\frac{1}{u}\,,$$

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u}\,,$$

$$xdu = -\frac{1}{u}dx\,,$$

$$udu = -\frac{dx}{x},$$

$$\int udu = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^2}{2} = -\ln|x| + C,$$

$$\frac{y^2}{2x^2} - \ln|x| + C$$ — общий интеграл.

5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + p(x)y = f(x)$ называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***. Оно содержит искомую функцию y и ее производную y' в первой степени и не содержит произведение yy'.

Для его решения сделаем ***замену*** $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$.

В результате замены получим уравнение

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x),$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

Так как искомая функция $y(x)$ представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. $v(x)$ найдем как одно из частных решений уравнения

$$v' + p(x)v = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

При таком выборе функции $v(x)$ уравнение примет вид:

$$u'v = f(x).$$

Подставим в него найденную функцию $v(x)$. Получим также уравнение с разделяющимися переменными. Найдем из него функцию $u(x)$, как его общее решение.

Зная функции $v(x)$ и $u(x)$, получим общее решение $y = uv$ данного линейного уравнения.

Пример: Решить уравнение $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

Решение.

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Сделаем замену $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тогда данное уравнение преобразуется к виду:

$$u'v + uv' - 2xuv = 2xe^{x^2},$$

$$u'v+u(v'-2xv)=2xe^{x^2}.$$

Функцию v найдем как частное решение уравнения с разделяющимися переменными

$$v'-2xv=0,$$
$$\frac{dv}{dx}=2xv,$$
$$dv=2xvdx,$$
$$\frac{dv}{v}=2xdx,$$
$$\int\frac{dv}{v}=2\int xdx,$$
$$\ln|v|=x^2+C,\ C=0,$$
$$\ln|v|=x^2,$$
$$v=e^{x^2}.$$

Для нахождения функции u имеем уравнение

$$u'v=2xe^{x^2}.$$

Подставим в него найденную функцию $v=e^{x^2}$:

$$u'e^{x^2}=2xe^{x^2},$$
$$u'=2x.$$

Находим общее решение этого уравнения:

$$\frac{du}{dx}=2x,$$
$$du=2xdx,$$
$$\int du=2\int xdx,$$
$$u=x^2+C.$$

Зная u и v, находим искомую функцию y:

$$y=uv=(x^2+C)e^{x^2}.$$

6. Уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y'+p(x)y=f(x)y^n$ называется ***уравнением Бернулли***. Оно, в отличие от линейного уравнения, содержит в правой части y^n.

Разделим обе части уравнения на y^n:

$$\frac{y'}{y^n}+p(x)\frac{y}{y^n}=f(x),$$
$$\frac{y'}{y^n}+p(x)y^{1-n}=f(x).$$

Сделаем замену6

$$z=y^{1-n},$$
$$z'=(1-n)y^{-n}y'=\frac{(1-n)y'}{y^n}.$$

Откуда

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}.$$

В результате замены получим уравнение

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = f(x).$$

Получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для его решения используем замену $z = uv$, $z' = u'v + uv'$.

Заметим, что практически нет необходимости вводить новую переменную z. Уравнение Бернулли можно решить с помощью замены $y = uv$, не сводя его к линейному.

Пример: Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$.

Решение.

Данное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли.

Разделим обе части уравнения на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \ln x.$$

Сделаем замену:

$$z = \frac{1}{y},$$

$$z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'.$$

Из последнего равенства

$$\frac{y'}{y^2} = -z'.$$

Тогда данное уравнение преобразуется к виду:

$$-z' + \frac{1}{x} \cdot z = \ln x,$$

$$z' - \frac{1}{x} \cdot z = -\ln x.$$

Получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $z = uv$, $z' = u'v + uv'$.

В результате замены получим уравнение

$$u'v + uv' - \frac{1}{x} \cdot uv = -\ln x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x} \cdot v\right) = -\ln x.$$

Функцию v найдем из уравнения

$$v' - \frac{1}{x} \cdot v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x},$$

$$dv = \frac{v}{x} dx,$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=\ln|x|,$$

$$v=x.$$

Функцию u найдем из уравнения

$$u'v=-\ln x,$$

$$u'x=-\ln x,$$

$$x\frac{du}{dx}=-\ln x,$$

$$xdu=-\ln xdx,$$

$$du=-\frac{\ln xdx}{x},$$

$$\int du=-\int\frac{\ln xdx}{x},$$

$$u=-\int\ln xd(\ln x),$$

$$u=-\frac{\ln^2 x}{2}+C.$$

Зная u и v, найдем z:

$$z=uv=\left(-\frac{\ln^2 x}{2}+C\right)x.$$

Так как $z=\frac{1}{y}$, то получим общий интеграл данного уравнения:

$$\frac{1}{y}=\left(-\frac{\ln^2 x}{2}+C\right)x.$$

7. Основные понятия о дифференциальных уравнениях второго порядка

- ***Дифференциальным уравнением второго порядка*** называется уравнение вида $F(x,y,y',y'')=0$ или вида $y''=f(x,y,y')$.

- ***Общим решением*** дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y=\varphi(x,C_1,C_2)$, обращающая уравнение в тождество при любых значениях постоянных C_1 и C_2.

- Решение уравнения второго порядка, получаемое из общего решения при фиксированных значениях постоянных C_1 и C_2, называется ***частным решением*** уравнения.

Частное решение уравнения второго порядка находят из общего его решения заданием ***начальных условий***: $y_0=y(x_0)$, $y'_0=y'(x_0)$.

- Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши***.

8. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим три типа дифференциальных уравнений второго порядка, сводящихся к уравнениям первого порядка.

1 тип: $y'' = f(x)$.

<u>Особенность:</u> уравнение не содержит y, y'.

<u>Способ решения</u>: $\dfrac{dy'}{dx} = f(x)$,

$$dy' = f(x)dx,$$
$$\int dy' = \int f(x)dx,$$
$$y' = \varphi_1(x) + C_1,$$
$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) + C_1,$$
$$dy = (\varphi_1(x) + C_1)dx,$$
$$\int dy = \int (\varphi_1(x) + C_1)dx,$$
$$y = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2.$$

Пример:

Решить уравнение $y'' = \cos x + \sin x$.

Решение. $y' = \int (\cos x + \sin x)dx = \sin x - \cos x + C_1$,

$y = \int (\sin x - \cos x + C_1)dx = -\cos x - \sin x + C_1 x + C_2$.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным интегрированием n раз.

2 тип: $y'' = f(x, y')$.

<u>Особенность:</u> уравнение не содержит явным образом y.

<u>Способ решения</u>: замена $y' = p$, где $p = p(x)$. Тогда $y'' = p'$. В результате уравнение приводится к уравнению $p' = f(x, p)$ — уравнению первого порядка относительно p. Найдем его общее решение $p = \varphi(x, C_1)$, т.е. $y' = \varphi(x, C_1)$. Тогда $y = \int \varphi(x, C_1)dx$. Получим общее решение данного уравнения.

Пример:

Найти общее решение уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

Решение. Уравнение не содержит явным образом y.

Замена: $y' = p$, где $p = p(x)$.

Тогда $y'' = p'$.

Получим $p' = \frac{p}{x}$,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x},$$

$$dp = \frac{p}{x}dx,$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln C_1,$$

$$\ln|p| = \ln C_1|x|,$$

$$p = C_1 x,$$

$$y' = C_1 x,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x,$$

$$dy = C_1 x dx,$$

$$\int dy = \int C_1 x dx,$$

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

3 тип: $y'' = f(y, y')$.

Особенность: уравнение не содержит явным образом *x*.

Способ решения: Замена: $y' = g$, где $g = g(y)$.

Тогда по правилу производной сложной функции $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g\frac{dg}{dy}$.

Получим уравнение первого порядка $g\frac{dg}{dy} = f(y, g)$. Из него найдем общее решение $g = \varphi(y, C_1)$, $y' = \varphi(y, C_1)$. Из последнего уравнения найдем *y*.

Пример:

Найти частное решение уравнения $y''y^3 - 1 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение не содержит явным образом *x*.

Замена: $y' = g$, где $g = g(y)$. Тогда $y'' = g\frac{dg}{dy}$.

Уравнение примет вид $g\frac{dg}{dy}y^3 = 1$,

$$gy^3 dg = dy,$$

$$gdg = \frac{dy}{y^3},$$

$$\int g dg = \int y^{-3} dy,$$

$$\frac{g^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1,$$

$$\frac{(y')^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1.$$

Так как $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$, то $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C_1$, откуда $C_1 = 1$.

Тогда $\frac{(y')^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + 1$,

$$(y')^2 = -\frac{1}{y^2} + 2,$$

$$(y')^2 = \frac{2y^2 - 1}{y^2},$$

$y' = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}$ — дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y},$$

$$\frac{y dy}{\sqrt{2y^2 - 1}} = dx,$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{2y^2 - 1}} = \int dx,$$

$$\frac{1}{4} \int \left(2y^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(2y^2 - 1\right) = x,$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2y^2 - 1} = x + C_2.$$

Так как $y(0) = 1$, то $\frac{1}{2} = C_2$.

Тогда $\frac{1}{2} \sqrt{2y^2 - 1} = x + \frac{1}{2}$,

$$\sqrt{2y^2 - 1} = 2x + 1,$$

$$2y^2 - 1 = (2x + 1)^2,$$

$2y^2 = (2x + 1)^2 + 1$ — частный интеграл.

5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим один тип дифференциальных уравнений второго порядка, сводящихся к уравнениям первого порядка, $y'' = f(x)$.

Особенность: уравнение не содержит y, y'.

Способ решения: $\frac{dy'}{dx} = f(x)$,

$$dy' = f(x)dx,$$
$$\int dy' = \int f(x)dx,$$
$$y' = \varphi_1(x) + C_1,$$
$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) + C_1,$$
$$dy = (\varphi_1(x) + C_1)dx,$$
$$\int dy = \int (\varphi_1(x) + C_1)dx,$$
$$y = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2.$$

Пример.
Решить уравнение $y'' = \cos x + \sin x$.

Решение. $y' = \int (\cos x + \sin x)dx = \sin x - \cos x + C_1$,
$y = \int (\sin x - \cos x + C_1)dx = -\cos x - \sin x + C_1 x + C_2$.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным интегрированием n раз.

9. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

- Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q — действительные числа, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.

- ***Характеристическим уравнением*** для уравнения $y'' + py' + qy = 0$ является уравнение вида $k^2 + pk + q = 0$, квадратное относительно k.

В зависимости от знака дискриминанта $D = p^2 - 4q$ возможны ***три случая***:

1) $D > 0$, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня k_1 и k_2. Тогда общее решение линейного однородного уравнения имеет вид
$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) $D = 0$, характеристическое уравнение имеет два совпадающих действительных корня $k_1 = k_2 = k$. Тогда общее решение линейного однородного уравнения имеет вид
$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

3) $D<0$, характеристическое уравнение имеет два комплексных сопряженных корня $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$. Тогда общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

Пример.

Найти общее решение уравнения $y''-5y'+6y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2-5k+6=0$. Его корни $k_1=2$, $k_2=3$. Поэтому общее решение данного уравнения $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

Пример.

Найти общее решение уравнения $y''-10y'+25y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2-10k+25=0$. Оно имеет два совпадающих корня $k=5$. Поэтому общее решение данного уравнения $y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$.

Пример.

Найти общее решение уравнения $y''+4y'+13y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2+4k+13=0$; $D=-36$. Оно имеет два комплексных сопряженных корня $k_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=-2\pm 3i$. Поэтому общее решение данного уравнения $y=e^{-2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$.

Пример.

Найти частное решение уравнения $y''-4y'+3y=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=6$, $y'(0)=10$.

Решение. Найдем сначала общее решение данного уравнения. Составим характеристическое уравнение $k^2-4k+3=0$. Оно имеет два различных действительных корня $k_1=1$, $k_2=3$. Тогда общее решение данного уравнения $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$. Найдем производную от общего решения: $y'=C_1e^{x}+3C_2e^{3x}$. Подставим начальные условия $y(0)=6$, $y'(0)=10$ в общее решение и его производную, получим систему относительно C_1 и C_2: $\begin{cases}C_1+C_2=6,\\ C_1+3C_2=10\end{cases}$. Решая ее, находим $C_1=4$, $C_2=2$. Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, получим частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

- Уравнение вида $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q — действительные числа, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.

Теорема: Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения данного неоднородного уравнения, т.е.

$$\boxed{y_{он} = y_{оо} + y_{чн}},$$

где $y_{он}$ — общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения;
$y_{оо}$ — общее решение линейного однородного дифференциального уравнения;
$y_{чн}$ — частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Нахождение $y_{оо}$ см. выше.

Для нахождения $y_{чн}$ для некоторых специальных видов функций $f(x)$ используют метод неопределенных коэффициентов. Сначала по виду правой части устанавливается вид частного решения с неопределенными коэффициентами, затем эти коэффициенты определяются.

Рассмотрим некоторые виды функции $f(x)$, стоящей в правой части уравнения.

Случай 1. Пусть правая часть уравнения $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

Тогда частное решение $y_{чн}$ следует искать в виде:

$y_{чн} = Q_n(x)$, если корни характеристического уравнения $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n с буквенными коэффициентами, подлежащими определению;

$y_{чн} = xQ_n(x)$, если $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$, т.е. один из корней характеристического уравнения равен нулю;

$y_{чн} = x^2 Q_n(x)$, если $k_1 = k_2 = 0$, т.е. оба корня характеристического уравнения равны нулю (в этом случае уравнение лучше решать, как уравнение, допускающее понижение порядка).

Для определения буквенных коэффициентов находят $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ и подставляют их и $y_{чн}$ в данное линейное неоднородное уравнение.

Пример: Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1.$$

Решение

Уравнение $y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1. Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k = 0.$$

Его корни: $k_1 = 0$ и $k_2 = -2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x}$$

или

$$y_{оо} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2. Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой многочлен второй степени и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y''_{чн} = 6Ax + 2B.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$6Ax + 2B + 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = x^2 + 2x - 1$$

или

$$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2 + 2x - 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x*:

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 2, \\ 2B + 2C = -1. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$A = \frac{1}{6},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{3}{4}.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

3. Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$

Случай 2. Пусть правая часть уравнения есть показательная функция $f(x) = ae^{mx}$.

Тогда частное решение $y_{чн}$ следует искать в виде:

$y_{чн} = Ae^{mx}$, если корни характеристического уравнения $k_1 \neq m$, $k_2 \neq m$, где *A* — коэффициент, подлежащий определению;

$y_{чн} = Axe^{mx}$, если $k_1 = m$ или $k_2 = m$, т.е. один из корней характеристического уравнения равен *m*;

$y_{чн} = Ax^2e^{mx}$, если $k_1 = k_2 = m$, т.е. оба корня характеристического уравнения равны *m*.

Пример:

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - y' - 2y = 9e^{2x}.$$

Решение.

Уравнение $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1. Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Его корни: $k_1 = -1$ и $k_2 = 2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

2. Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой показательную функцию вида $f(x) = ae^{mx}$ и $m = 2$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = Axe^{2x}.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$

$$y''_{чн} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - Ae^{2x} - 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = 9e^{2x}.$$

Приведя подобные слагаемые и разделив обе части уравнения на e^{2x}, определим коэффициент A:

$$3Ae^{2x} = 9e^{2x},$$

$$3A = 9,$$

$$A = 3.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = 3xe^{2x}.$$

3. Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}$.

Случай 3. Пусть правая часть уравнения есть тригонометрическая функция $f(x) = a\cos nx + b\sin nx$, где a, b, n — действительные числа и $n \neq 0$.

Тогда частное решение $y_{чн}$ следует искать в виде:

$y_{чн} = A\cos nx + B\sin nx$, если корни характеристического уравнения $k_1, k_2 \neq \pm ni$, где A, B — коэффициенты, подлежащие определению;

$y_{чн} = x(A\cos nx + B\sin nx)$, если $k_1, k_2 = \pm ni$.

Пример:

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y = 4\cos 2x - 12\sin 2x.$$

Решение

Уравнение $y'' + 4y = 4\cos 2x - 12\sin 2x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1. Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0$$

или

$$k^2 = -4.$$

Его корни: $k_1 = -2i$ и $k_2 = 2i$.

Так как корни характеристического уравнения комплексные сопряженные вида $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то y_{oo} находим по формуле:

$$y_{oo} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right).$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{oo} = e^{0x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$$

или

$$y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2. Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой тригонометрическую функцию вида $f(x) = a\cos nx + b\sin nx$ и числа $k = \pm ni = \pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = A\cos 2x + B\sin 2x + x\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right),$$

$$y''_{чн} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \\ + x\left(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x\right) = \\ = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x + \\ + 4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x$$

или

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получим:

$$\begin{cases} -4A = -12, \\ 4B = 4; \end{cases}$$

Тогда $A = 3$, $B = 1$.

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = x\left(3\cos 2x + \sin 2x\right).$$

3. Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x\left(3\cos 2x + \sin 2x\right).$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x)$

Теорема 3: Если правая часть линейного неоднородного уравнения представлена в виде суммы двух функций, т.е. дано уравнение

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x),$$

то для нахождения частного решения такого уравнения достаточно сложить частное решение $y_{чн_1}$ уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x)$ и частное решение $y_{чн_2}$ уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x)$, т.е.

$$y_{чн} = y_{чн_1} + y_{чн_2}.$$