ИДЗ №1

Задание 3. Даны координаты вершин пирамиды $A(3;-1;2)$, $B(4;-1;-1)$, $C(2;0;2)$, $D(1;2;4)$.

Найти:

1) координаты векторов $\bar{a}=\overline{AB}$, $\bar{b}=\overline{AC}$, $\bar{c}=\overline{AD}$, записать их разложение по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$;

2) модуль вектора $\bar{d}=3\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ и его направляющие косинусы;

3) косинус угла BAC;

4) площадь грани ABC;

5) объем пирамиды $ABCD$.

Решение

1. Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$, зная координаты его начала $A(x_1,y_1,z_1)$ и конца $B(x_2,y_2,z_2)$, надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты его начала:

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1).$$

Тогда

$$\bar{a}=\overline{AB}=(4-3;-1+1;-1-2)=(1;0;-3),$$

$$\bar{b}=\overline{AC}=(2-3;0+1;2-2)=(-1;1;0),$$

$$\bar{c}=\overline{AD}=(1-3;2+1;4-2)=(-2;3;2).$$

Если вектор $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$ задан своими координатами, то его можно записать в виде разложения по координатному базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ следующим образом:

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}.$$

Тогда разложение векторов $\bar{a}=\overline{AB}$, $\bar{b}=\overline{AC}$, $\bar{c}=\overline{AD}$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ имеет вид:

$$\bar{a}=\bar{i}+3\bar{k},$$

$$\bar{b}=-\bar{i}+\bar{j},$$

$$\bar{c}=-2\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}.$$

2. Найдем координаты вектора $\bar{d}=3\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$.

При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов — складываются одноименные координаты. Получим

$$3\bar{a}=(3\cdot1;\ 3\cdot0;\ 3\cdot(-3))=(3;\ 0;\ -9).$$

Тогда

$$\overline{d}=3\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}=(3;0;-9)-(-1;1;0)+(-2;3;2)=$$
$$=(3+1-2;0-1+3;-9-0+2)=(2;2;-7).$$

Модуль вектора $\overline{d}=\left(d_x;d_y;d_z\right)$ находится по формуле

$$\left|\overline{d}\right|=\sqrt{d_x^2+d_y^2+d_z^2}.$$

Таким образом, $\left|\overline{d}\right|=\sqrt{2^2+2^2+(-7)^2}=\sqrt{58}$.

Направляющие косинусы вектора $\overline{d}$ — это косинусы углов, которые образует этот вектор с положительными направлениями координатных осей O_x, O_y и O_z. Они вычисляются по формулам

$$\cos\alpha=\frac{d_x}{\left|\overline{d}\right|},\ \cos\beta=\frac{d_y}{\left|\overline{d}\right|},\ \cos\gamma=\frac{d_z}{\left|\overline{d}\right|}.$$

Тогда $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{58}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{58}}$, $\cos\gamma=-\frac{7}{\sqrt{58}}$.

3. Косинус угла BAC найдем как косинус угла между векторами $\overline{a}=\overline{AB}$ и $\overline{b}=\overline{AC}$ по формуле

$$\cos\angle BAC=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|},$$

где $\overline{a}\cdot\overline{b}$ — скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|$ — произведение длин векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Скалярное произведение векторов $\overline{a}=\left(a_x;\,a_y;\,a_z\right)$ и $\overline{b}=\left(b_x;\,b_y;\,b_z\right)$ находится по формуле

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Тогда

$$\cos\angle BAC=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Получим

$$\cos\angle BAC=\frac{1\cdot(-1)+0\cdot1+(-3)\cdot0}{\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{10}\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{20}}=-\frac{\sqrt{20}}{20}.$$

4. Площадь треугольника ABC вычислим по формуле

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|,$$

где $\bar{a} \times \bar{b}$ — векторное произведение векторов $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AC}$.

Векторное произведение векторов $\bar{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ и $\bar{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ находится по формуле

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Найдем векторное произведение векторов $\bar{a} = \overline{AB} = (1;\, 0;\, -3)$ и $\bar{b} = \overline{AC} = (-1;\, 1;\, 0)$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}.$$

Тогда

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{19}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{19}}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

5. Объем пирамиды $ABCD$ находится по формуле

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\;\overline{AC}\;\overline{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|,$$

где $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ — смешанное произведение векторов $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$ и $\bar{c} = \overline{AD}$.

Смешанное произведение векторов $\bar{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$, $\bar{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ и $\bar{c} = \left(c_x; c_y; c_z\right)$ находится по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Найдем смешанное произведение векторов $\overline{a} = \overline{AB} = (1; 0; -3)$, $\overline{b} = \overline{AC} = (-1; 1; 0)$ и $\overline{c} = \overline{AD} = (-2; 3; 2)$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5.$$

Тогда

$$V_{ABCD} = \frac{5}{6} \text{ (куб. ед.).}$$