

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра
высшей математики

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по организации аудиторной и самостоятельной работы
и выполнению расчетно-графических работ 1-4
для студентов 1 и 2-го курсов специальности 35.03.06 «Агроинженерия»,
профиль «Электрооборудование и электротехнологии»
очной формы обучения

КАРАБАЕВО
Костромская ГСХА
2015

УДК 512(076)

ББК 22.1

М 34

Составители: сотрудники кафедры высшей математики Костромской ГСХА зав. кафедрой *Л.Б. Рыбина*, доцент *И.А. Батманова*.

Рецензенты: д.п.н., профессор кафедры физики Костромской ГСХА *И.А. Мамаева*, д.т.н., профессор кафедры математики Костромского ГТУ *Л.А. Секованова*.

Рекомендовано к изданию методической комиссией факультета электрификации и автоматизации сельского хозяйства, протокол № 2 от 10 марта 2015 года.

М 34 **Математика** : учебно-методическое пособие по организации аудиторной и самостоятельной работы и выполнению расчетно-графических работ 1-4 для студентов 1 и 2-го курсов специальности специальности 35.03.06 «Агроинженерия», профиль «Электрооборудование и электротехнологии» очной формы обучения / сост. Л.Б. Рыбина, И.А. Батманова. — Караваево : Костромская ГСХА, 2015. — 98 с.

Издание содержит задания для расчетно-графических работ 1-4 и индивидуального домашнего задания, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями.

Учебно-методическое пособие по организации аудиторной и самостоятельной работы и выполнению расчетно-графических работ 1-4 предназначено для студентов 1 и 2-го курсов специальности 35.03.06 «Агроинженерия», профиль «Электрооборудование и электротехнологии» очной формы обучения

УДК 512(076)

ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Общие требования к выполнению расчетно-графической работы и индивидуального домашнего задания	6
Расчетно-графическая работа 1	
Аналитическая геометрия	7
1.1. Задания к расчетно-графической работе	7
1.2. Примеры решения типовых задач	9
1.3. Указания к защите расчетно-графической работы	20
Расчетно-графическая работа 2	
«Исследование функций с помощью производных и построение графиков»	24
2.1. Задания к расчетно-графической работе	24
2.2. Примеры решения типовых заданий	29
2.3. Указания к защите расчетно-графической работы	36
Индивидуальное домашнее задание	
«Комплексные числа. Функции комплексной переменной»	38
3.1. Задания к ИДЗ	38
3.2. Примеры решения типовых задач	44
Расчетно-графическая работа 3	
Дифференциальные уравнения	50
4.1. Задания к расчетно-графической работе 3	50
4.2. Примеры решения типовых задач	56
4.3. Указания к защите расчетно-графической работы	63
Расчетно-графическая работа 4	
Ряды	65
5.1. Задание к расчетно-графической работе	65
5.2. Примеры решения типовых задач	72
Задания к некоторым темам для самостоятельного изучения	83
6.1. Матрицы, их виды. Действия над матрицами	83
6.2. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов	83
6.3. Полярная система координат на плоскости	84
6.4. Поверхности в пространстве	85
6.5. Основные элементарные функции, их свойства и графики	86
6.6. Вывод некоторых формул дифференцирования	88
6.7. Несобственные интегралы	88
6.8. Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур	89
6.9. Применение определенного интеграла для вычисления объемов тел вращения и длины дуги кривой	89
6.10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	90
6.11. Физические приложения кратных интегралов	90

6.12. Физические приложения криволинейных интегралов	91
6.13. Комплексные числа, действия над ними	91
6.14. Уравнения бернулли	92
6.15. Основные логические операции	92
6.16. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях	93
6.17. Формула полной вероятности формула байеса.....	94
6.18. Виды законов распределения случайных величин	95
6.19. Вариационные ряды	96
Список рекомендуемых источников	97

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по организации самостоятельной работы и выполнению расчетно-графических работ 1-4 предназначено для студентов 1 и 2 курсов, обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» (профиль «Электрооборудование и электротехнологии»).

Издание содержит задания для расчетно-графических работ 1–4, индивидуального домашнего задания, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями. Содержание и набор задач соответствуют рабочей программе дисциплины.

Цель расчетно-графической работы (РГР) и индивидуального домашнего задания (ИДЗ) — помочь студентам закрепить материал, изученный на лекциях и практических занятиях. Для достижения этой цели задания подобраны таким образом, чтобы они охватывали все основные типы задач.

В пособие также включены вопросы и задания по самостоятельному изучению запланированных тем дисциплины.

Сроки выполнения РГР, ИДЗ и самостоятельного изучения отдельных тем указываются в рейтинге-плане.

РГР являются одной из основных форм текущего контроля знаний студентов. За РГР выставляется две оценки: по итогам проверки письменной работы и ее защиты.

Самостоятельное изучение каждой запланированной темы дисциплины также оценивается по результатам проверки письменного отчета, представляющего собой конспект, включающий в себя ответы на вопросы и решения задач, предложенных в пособии.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ И ИНДИВИДУАЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Расчетно-графическая работа (РГР) и индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) должна выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяет преподаватель.

Работа должна быть выполнена в тетради в клетку, на внешней обложке которой должен быть прикреплен титульный лист. На внутренней стороне обложки размещается лист-задание, выданный преподавателем.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие. Решение задач следует излагать подробно. Все записи, чертежи должны быть аккуратными, четкими и разборчивыми.

На каждой странице тетради необходимо оставить поля шириной 3-5 см для замечаний рецензента. Страницы нумеруются.

Выполненная работа сдается преподавателю в указанный им срок. К выполнению РГР и ИДЗ следует приступать только после прослушивания соответствующих лекций или самостоятельного изучения необходимого материала. Рекомендуется внимательно разобрать решения типовых задач, которые приводятся в данном пособии.

Не зачтенная работа возвращается студенту для исправления ошибок. Все исправления ошибок делаются в конце работы. Исправления в тексте прорецензированной работы не допускаются. Работу с выполненными исправлениями следует сдать преподавателю.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Задания к расчетно-графической работе

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC (табл. 1.1).
Найти:

- 1) длину стороны AB ;
- 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
- 3) внутренний угол A ;
- 4) уравнение высоты CD и ее длину;
- 5) уравнение и длину медианы AE ;
- 6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;
- 7) точку пересечения медиан;
- 8) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне CD .

Таблица 1.1. Исходные данные для решения задачи

Вариант	A	B	C	Вариант	A	B	C
1	(-3; -2)	(0; 10)	(6; 2)	11	(-4; 2)	(4; -4)	(6; 5)
2	(1; 1)	(4; 13)	(10; 5)	12	(-2; 1)	(6; -5)	(8; 4)
3	(0; 3)	(3; 15)	(9; 7)	13	(-3; -3)	(5; -9)	(7; 0)
4	(-2; 0)	(1; 12)	(7; 4)	14	(2; 2)	(10; -4)	(12; 5)
5	(2; -1)	(5; 11)	(11; 3)	15	(4; -1)	(12; -7)	(14; 2)
6	(3; -3)	(6; 9)	(12; 1)	16	(-6; -2)	(2; -8)	(4; 1)
7	(-1; 2)	(2; 14)	(8; 6)	17	(1; 2)	(13; -7)	(11; 7)
8	(5; -4)	(8; 8)	(14; 0)	18	(-7; -1)	(-5; -10)	(3; 4)
9	(-4; 5)	(-1; 17)	(5; 9)	19	(-5; 0)	(7; 9)	(5; -5)
10	(4; 4)	(7; 16)	(13; 8)	20	(-7; 2)	(5; 11)	(3; -3)

Задание 2. Дано уравнение эллипса (табл. 1.2). Построить эллипс.
Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Таблица 1.2. Исходные данные для решения задачи

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$4x^2 + y^2 = 16$	11	$64x^2 + y^2 = 64$
2	$9x^2 + 4y^2 = 36$	12	$9x^2 + 16y^2 = 144$
3	$4x^2 + 9y^2 = 36$	13	$25x^2 + 16y^2 = 400$
4	$9x^2 + y^2 = 9$	14	$16x^2 + 25y^2 = 400$
5	$x^2 + 9y^2 = 9$	15	$x^2 + 16y^2 = 16$
6	$x^2 + 4y^2 = 16$	16	$16x^2 + 9y^2 = 144$
7	$16x^2 + y^2 = 16$	17	$12x^2 + 9y^2 = 108$
8	$9x^2 + 12y^2 = 108$	18	$25x^2 + 9y^2 = 225$
9	$4x^2 + 36y^2 = 144$	19	$9x^2 - 49y^2 = 441$
10	$36x^2 + 4y^2 = 144$	20	$9x^2 - 16y^2 = 144$

Задание 3. Даны действительная полуось a и эксцентриситет ε гиперболы (табл. 1.3). Составить уравнение гиперболы. Построить гиперболу и найти координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот гиперболы.

Таблица 1.3. Исходные данные для решения задачи

Вариант	a	ε	Вариант	a	ε
1	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	11	8	$\sqrt{2}$
2	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	12	$6\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$
3	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	13	$5\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$
4	$\sqrt{5}$	$3\sqrt{2}$	14	$4\sqrt{7}$	$3\sqrt{7}$
5	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{3} \sqrt{5}$	15	$3\sqrt{7}$	$4\sqrt{7}$
6	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	16	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$
7	$4\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	17	$3\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$
8	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$	18	$4\sqrt{6}$	2
9	$2\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	19	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$
10	7	$\sqrt{3}$	20	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$

Задание 4. Дано уравнение параболы (табл. 1.4). Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.

Таблица 1.4. Исходные данные для решения задачи

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$y^2 = -10x$	11	$y^2 = -5x$
2	$x^2 = 10y$	12	$x^2 = -5y$
3	$y^2 = 9x$	13	$y^2 = 4x$
4	$x^2 = -9y$	14	$x^2 = 4y$
5	$y^2 = -8x$	15	$y^2 = -3x$
6	$x^2 = 8y$	16	$x^2 = 3y$
7	$y^2 = 7x$	17	$y^2 = 2x$
8	$x^2 = -7y$	18	$x^2 = -2y$
9	$y^2 = -6x$	19	$y^2 = -11x$
10	$x^2 = 6y$	20	$x^2 = 11y$

Задание 5. Даны координаты точек A, B, C, D (табл. 1.5).

Требуется:

- 1) написать уравнение плоскости ABC ;
- 2) написать уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC ;

- 3) написать канонические и параметрические уравнения прямой AB ;
- 4) написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC ;
- 5) найти расстояние от точки D до плоскости ABC .

Таблица 1.5. Исходные данные для решения задачи

№ варианта	Координаты точек			
	A	B	C	D
1	(3; -1; 2)	(4; -1; -1)	(2; 0; 2)	(1; 2; 4)
2	(2; -1; 2)	(3; -1; -1)	(1; 0; 2)	(0; 2; 4)
3	(3; 0; 2)	(4; 0; -1)	(2; 1; 2)	(1; 3; 4)
4	(2; -1; 3)	(3; -1; 0)	(1; 0; 3)	(0; 2; 5)
5	(3; 1; 2)	(4; 1; -1)	(2; 2; 2)	(1; 4; 4)
6	(2; 1; 2)	(3; 1; -1)	(1; 2; 2)	(0; 4; 4)
7	(1; 1; 2)	(2; 1; -1)	(0; 2; 2)	(-1; 4; 4)
8	(0; 1; 2)	(1; 1; -1)	(-1; 2; 2)	(-2; 4; 4)
9	(0; 2; 2)	(1; 2; -1)	(-1; 3; 2)	(-2; 5; 4)
10	(0; 2; 1)	(1; 2; -2)	(-1; 3; 1)	(-2; 5; 3)
11	(2; 1; 0)	(5; 3; 1)	(0; 1; 2)	(4; 3; 1)
12	(1; 1; 0)	(2; 3; 1)	(1; -1; 2)	(3; 2; 1)
13	(1; 1; 0)	(3; 4; 5)	(2; 3; 1)	(4; 5; 1)
14	(2; -1; 0)	(-1; 3; 4)	(1; 1; 1)	(0; 3; 5)
15	(3; -1; 2)	(7; 9; 1)	(5; 1; 2)	(1; 2; 0)
16	(2; 4; -3)	(3; 5; -4)	(4; 5; -1)	(3; 4; 0)
17	(1; 3; -1)	(2; 0; 7)	(-2; 0; 7)	(5; 5; 2)
18	(1; -1; 1)	(4; 1; 2)	(2; 0; 1)	(5; 2; 8)
19	(1; 4; -2)	(-2; 5; 0)	(3; 4; 0)	(2; 5; -1)
20	(2; -1; 1)	(4; -4; 1)	(1; 0; 1)	(3; 4; 6)

1.2. Примеры решения типовых задач

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-2; 4)$, $B(6; -2)$, $C(8; 7)$.

Найти:

- 1) длину стороны AB ;
- 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
- 3) внутренний угол A ;
- 4) уравнение высоты CD и ее длину;
- 5) уравнение и длину медианы AE ;
- 6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;
- 7) точку пересечения медиан;
- 8) уравнение прямой, проходящей через точку A , параллельно стороне CD .

Решение

1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяем по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Подставляя в нее координаты точек $A(-2; 4)$ и $B(6; -2)$, найдем длину стороны AB :

$$AB = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставив в него координаты точек $A(-2; 4)$ и $B(6; -2)$, получим уравнение прямой AB :

$$\begin{aligned} \frac{y - 4}{-2 - 4} &= \frac{x - (-2)}{6 - (-2)}, \\ \frac{y - 4}{-6} &= \frac{x + 2}{8}, \\ 8(y - 4) &= -6(x + 2), \\ 4(y - 4) - 3(x + 2), \\ 4y - 16 &= -3x - 6, \\ 3x + 4y - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой AB разрешим уравнение этой прямой относительно y , то есть запишем в виде $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент:

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 10 &= 0, \\ 4y &= -3x + 10, \\ y &= -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда определяем угловой коэффициент прямой AB : $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Аналогично по двум точкам $A(-2; 4)$ и $C(8; 7)$ составим уравнение прямой AC :

$$\begin{aligned} \frac{y - 4}{7 - 4} &= \frac{x - (-2)}{8 - (-2)} & \frac{y - 4}{3} &= \frac{x + 2}{10} \\ 10(y - 4) &= 3(x + 2) \\ 10y - 40 &= 3x + 6 \\ 3x - 10y + 46 &= 0. \end{aligned}$$

Найдем угловой коэффициент k_{AC} прямой AC :

$$10y = 3x + 46$$

$$y = \frac{3}{10}x + \frac{23}{5}$$

$$k_{AC} = \frac{3}{10}.$$

3. Угол φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2 , находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Искомый внутренний угол A образован прямыми AB и AC , угловые коэффициенты которых $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, $k_{AC} = \frac{3}{10}$. Отмечая на рисунке треугольника ABC в системе координат направление угла A против хода часовой стрелки, определяем порядок прямых: AB — первая, AC — вторая. Следовательно, $k_1 = k_{AB} = -\frac{3}{4}$, $k_2 = k_{AC} = \frac{3}{10}$. Подставляем угловые коэффициенты в формулу угла между прямыми:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{10}} = \frac{\frac{6+15}{20}}{1 - \frac{9}{40}} = \frac{\frac{21}{20}}{\frac{31}{40}} = \frac{21 \cdot 40}{20 \cdot 31} = \frac{42}{31}.$$

$$\text{Тогда } \angle A = \operatorname{arctg} \frac{42}{31}.$$

4. Высота CD перпендикулярна стороне AB , поэтому угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, то есть $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$.

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ в заданном угловым коэффициентом k направлении, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Для составления уравнения высоты CD , подставим в эту формулу координаты точки $C(8; 7)$ и угловой коэффициент $k_{CD} = \frac{4}{3}$:

$$y - 7 = \frac{4}{3}(x - 8) \Rightarrow 3(y - 7) = 4(x - 8)$$

$$3y - 21 = 4x - 32$$

$$4x - 3y - 11 = 0$$

Найдем длину высоты CD , то есть расстояние от точки C до прямой AB . Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $C(8; 7)$ и коэффициенты из уравнения прямой AB $3x + 4y - 10 = 0$. Получим

$$CD = \frac{|3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{42}{\sqrt{25}} = \frac{42}{5} = 8,4.$$

5. Точка E — середина отрезка BC . Для определения ее координат применим формулы деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Подставляем в них координаты точек $B(6; -2)$ и $C(8; 7)$:

$$x_E = \frac{6 + 8}{2} = 7, \quad y_E = \frac{-2 + 7}{2} = \frac{5}{2}.$$

То есть $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$.

Найдем длину медианы AE , то есть расстояние между точками $A(-2; 4)$ и $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$:

$$AE = \sqrt{(7 - (-2))^2 + \left(\frac{5}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{9^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{81 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{333}{4}} = \frac{3\sqrt{37}}{2}.$$

6. Точка D — точка пересечения прямых AB и CD . Чтобы найти ее координаты, решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 10 = 0, \\ 4x - 3y - 11 = 0. \end{cases}$$

Применим правило Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 4x - 3y = 11; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 4 \cdot 4 = -9 - 16 = -25,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 11 & -3 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-3) - 4 \cdot 11 = -30 - 44 = -74,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - 10 \cdot 4 = 33 - 40 = -7,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{74}{25}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{25}.$$

Итак, $D\left(\frac{74}{25}; \frac{7}{25}\right)$.

Найдем координаты центра окружности, то есть середину отрезка CD , где $C(8; 7)$, $D\left(\frac{74}{25}; \frac{7}{25}\right)$:

$$x = \frac{8 + \frac{74}{25}}{2} = \frac{274}{50} = \frac{137}{25},$$

$$y = \frac{7 + \frac{7}{25}}{2} = \frac{182}{50} = \frac{91}{25}.$$

Итак, $M\left(\frac{137}{25}; \frac{91}{25}\right)$ — центр окружности.

Радиус окружности R равен половине длины отрезка CD :

$$R = \frac{CD}{2} = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}.$$

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

где $(a; b)$ — координаты центра окружности; R — ее радиус.

Подставив в него координаты точки $M\left(\frac{137}{25}; \frac{91}{25}\right)$ и $R = \frac{21}{5}$, получим уравнение окружности, для которой CD является диаметром:

$$\left(x - \frac{137}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{91}{25}\right)^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{137}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{91}{25}\right)^2 = \frac{441}{25}.$$

7. Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2:1$, начиная от вершины. Найдем координаты точки N , делящей медиану AE в отношении $\lambda = \frac{AN}{NE} = \frac{2}{1} = 2$. Используем формулы деления отрезка в данном отношении:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Подставим в них координаты точек $A(-2; 4)$, $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$ и $\lambda = 2$:

$$x_N = \frac{-2 + 2 \cdot 7}{1 + 2} = 4, \quad y_N = \frac{4 + 2 \cdot \frac{5}{2}}{1 + 2} = 3.$$

Итак, $N(4; 3)$ — точка пересечения медиан.

8. Составим уравнение прямой l , проходящей через точку A , параллельно стороне CD (рис. 1.1).

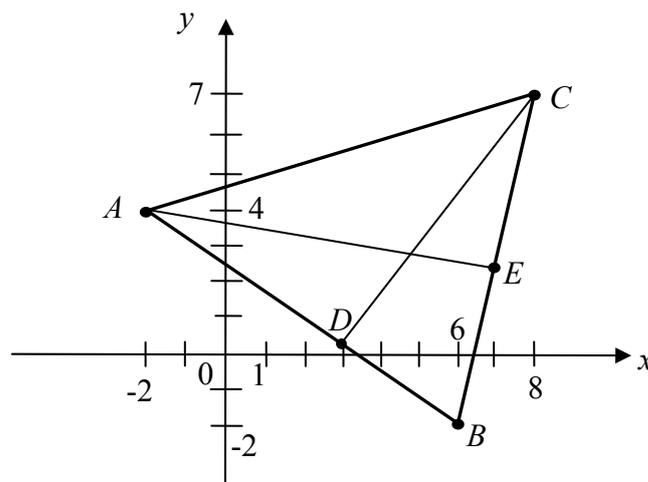


Рис. 1.1. Треугольник ABC

Из условия параллельности прямых l и CD следует, что их угловые коэффициенты равны, то есть $k_l = k_{CD} = \frac{4}{3}$. Подставляя в формулу

$y - y_1 = k(x - x_1)$ координаты точки $A(-2; 4)$ и $k_l = \frac{4}{3}$, получим уравнение прямой l :

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - (-2)) \quad 3y - 12 = 4x + 8 \quad 4x - 3y + 20 = 0.$$

Задание 2. Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1,$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ — каноническое уравнение эллипса.}$$

Так как $a^2 = 9$, то $a = 3$ — большая полуось, $b^2 = 4$, $b = 2$ — малая полуось.

$A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$ — вершины эллипса (рис. 1.2).

Найдем c — расстояние от центра эллипса до каждого фокуса по формуле связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим $c^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$. Тогда $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$ — фокусы эллипса.

Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$, получим $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

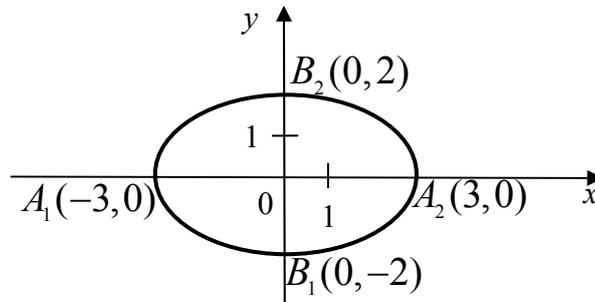


Рис. 1.2. Эллипс

Задание 3. Даны действительная полуось $a = 2\sqrt{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{3}$ гиперболы. Составить уравнение гиперболы и найти координаты ее вершин, фокусов, уравнения асимптот. Построить гиперболу.

Решение

$A_1(-2\sqrt{3}; 0)$, $A_2(2\sqrt{3}; 0)$ — вершины гиперболы (рис. 1.3).

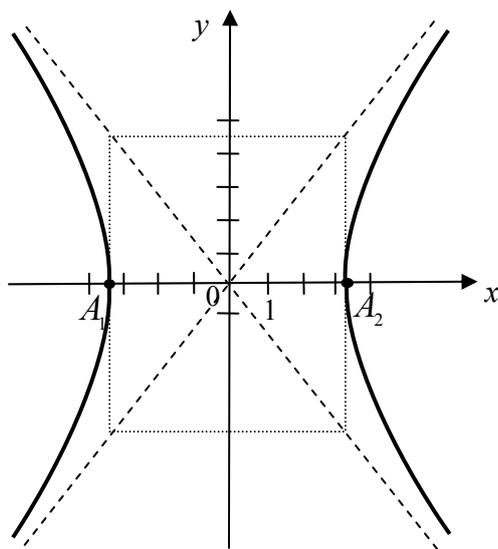


Рис. 1.3. Гипербола

Из формулы для нахождения эксцентриситета гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a}$ найдем значение c — расстояние от центра гиперболы до каждого фокуса:

$$c = \varepsilon a = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Тогда $F_1(-6; 0)$, $F_2(6; 0)$ — фокусы гиперболы.

Из формулы связи $c^2 = a^2 + b^2$ найдем мнимую полуось b :

$$b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - (2\sqrt{3})^2 = 36 - 12 = 24,$$

$$b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Составим каноническое уравнение гиперболы, которое имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Получим $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm \frac{b}{a}x$. Подставив $a = 2\sqrt{3}$ и $b = 2\sqrt{6}$, получим $y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}x$. После преобразований имеем $y = \pm\sqrt{2}x$ — уравнения асимптот данной гиперболы.

Задание 4. Дано уравнение параболы $y^2 = 4x$. Построить параболу (рис. 1.4) и найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

Решение

$y^2 = 4x$ — уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox , с ветвями, идущими вправо. $y^2 = 2px$ — общий вид уравнения такой параболы, где p — расстояние между фокусом и директрисой.

Из уравнения находим: $2p = 4$, откуда $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$.

Директрисой параболы $y^2 = 2px$ является прямая, параллельная оси Oy , с уравнением $x = -\frac{p}{2}$, а фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Таким образом, для данной параболы директрисой служит прямая $x = -1$, а точка $F(1; 0)$ — фокусом.

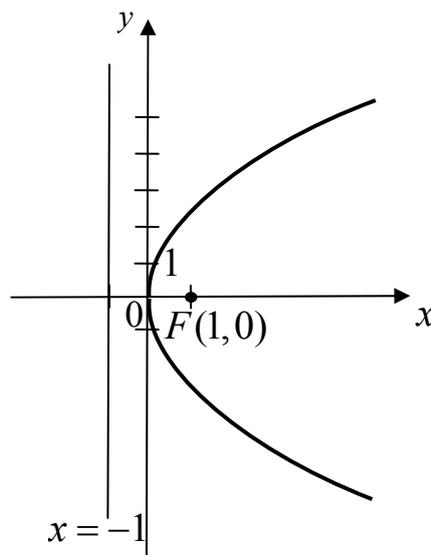


Рис. 1.4. Парабола

Задание 5. Даны координаты точек $A(4; 1; -5)$, $B(-2; 3; -4)$, $C(-2; 1; 3)$, $D(0; -1; 2)$.

Требуется:

- 1) написать уравнение плоскости ABC ;
- 2) написать уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC ;
- 3) написать канонические и параметрические уравнения прямой AB ;
- 4) написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC ;
- 5) найти расстояние от точки D до плоскости ABC .

Решение

1. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим в него координаты точек $A(4; 1; -5)$, $B(-2; 3; -4)$, $C(-2; 1; 3)$:

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 1 & z + 5 \\ -2 - 4 & 3 - 1 & -4 + 5 \\ -2 - 4 & 1 - 1 & 3 + 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 1 & z + 5 \\ -6 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x - 4) \cdot 2 \cdot 8 + (y - 1) \cdot 1 \cdot (-6) + (z + 5) \cdot (-6) \cdot 0 - \\ - (z + 5) \cdot 2 \cdot (-6) - (x - 4) \cdot 1 \cdot 0 - (y - 1) \cdot (-6) \cdot 8 = 0,$$

$$16x - 64 - 6y + 6 + 12z + 60 + 48y - 48 = 0,$$

$$16x + 42y + 12z + 46 = 0,$$

$$8x + 21y + 6z + 23 = 0.$$

Таким образом, $8x + 21y + 6z + 23 = 0$ — уравнение плоскости ABC .

2. Для составления уравнения плоскости α , проходящей через точку D параллельно плоскости ABC , найдем координаты ее нормального вектора, в качестве которого можно взять нормальный вектор плоскости ABC в силу их параллельности.

Если общее уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, то ее нормальный вектор имеет координаты $\vec{n} = (A; B; C)$. Для плоскости ABC с уравнением $8x + 21y + 6z + 23 = 0$ нормальным вектором является вектор $\vec{n} = (8; 21; 6)$. Он же служит и нормальным вектором для плоскости α .

Если плоскость проходит через точку $M(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = (A; B; C)$, то ее уравнение имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Подставим в него координаты точки $D(0; -1; 2)$ и нормального вектора $\vec{n} = (8; 21; 6)$:

$$8(x - 0) + 21(y - (-1)) + 6(z - 2) = 0,$$

$$8x + 21y + 21 + 6z - 12 = 0,$$

$$8x + 21y + 6z + 9 = 0.$$

Таким образом, $8x + 21y + 6z + 9 = 0$ — уравнение плоскости α , проходящей через точку D параллельно плоскости ABC .

3. Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Подставив в них координаты точек $A(4; 1; -5)$ и $B(-2; 3; -4)$, получим канонические уравнения прямой AB :

$$\frac{x - 4}{-2 - 4} = \frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{z - (-5)}{-4 - (-5)},$$

$$\frac{x - 4}{-6} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 5}{1}.$$

От канонических уравнений прямой AB , введя параметр t , перейдем к ее параметрическим уравнениям:

$$\frac{x - 4}{-6} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 5}{1} = t,$$

$$\begin{cases} \frac{x - 4}{-6} = t, \\ \frac{y - 1}{2} = t, \\ \frac{z + 5}{1} = t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6t + 4, \\ y = 2t + 1, \\ z = t - 5. \end{cases}$$

4. Составим канонические уравнения прямой l , проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC . В качестве направляющего вектора \vec{s} прямой l можно взять нормальный вектор перпендикулярной ей плоскости ABC , то есть $\vec{s} = \vec{n} = (8; 21; 6)$.

Если прямая проходит через точку $M(x_1; y_1; z_1)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, то ее канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Подставив в них координаты точки $D(0; -1; 2)$ и направляющего вектора $\vec{s} = (8; 21; 6)$, получим канонические уравнения прямой l , проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC :

$$\frac{x-0}{8} = \frac{y-(-1)}{21} = \frac{z-2}{6},$$

$$\frac{x}{8} = \frac{y+1}{21} = \frac{z-2}{6}.$$

5. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ находим по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $D(0; -1; 2)$ и коэффициенты из уравнения плоскости ABC $8x + 21y + 6z + 23 = 0$:

$$d = \frac{|8 \cdot 0 + 21 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 23|}{\sqrt{8^2 + 21^2 + 6^2}} = \frac{14}{\sqrt{541}} = \frac{14\sqrt{541}}{541} \approx 0,6.$$

Таким образом, расстояние от точки D до плоскости ABC равно

$$d = \frac{14\sqrt{541}}{541}.$$

1.3. Указания к защите расчетно-графической работы

Теоретические вопросы

1. Расстояние между двумя точками на плоскости.
2. Деление отрезка в данном отношении. Координаты середины отрезка.
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Определение углового коэффициента.
4. Уравнение прямой, проходящей через точку в данном направлении.
5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
6. Общее уравнение прямой, его частные случаи.
7. Уравнение прямой в «отрезках на осях».
8. Формула для нахождения угла между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
9. Расстояние от точки до прямой.
10. Определение и каноническое уравнение окружности.
11. Определение и каноническое уравнение эллипса. Эксцентриситет, фокусы эллипса.
12. Определение и каноническое уравнение гиперболы. Эксцентриситет, фокусы, уравнения асимптот гиперболы.

13. Определение и каноническое уравнение параболы. Фокус, уравнение директрисы параболы (рассмотреть четыре вида параболы).
14. Парабола как график квадратного трехчлена.
15. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
16. Общее уравнение плоскости и его частные случаи.
17. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
18. Уравнение плоскости в «отрезках».
19. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
20. Расстояние от точки до плоскости.
21. Параметрические уравнения прямой в пространстве.
22. Канонические уравнения прямой в пространстве.
23. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две данные точки.
24. Общие уравнения прямой в пространстве и переход от них к каноническим уравнениям.
25. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
26. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
27. Нахождение точки пересечения прямой с плоскостью.
28. Нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве.

Задачи

№ 1. Даны координаты вершин треугольника ABC :

$$A(-2; 4), B(6; -2), C(8; 7).$$

Найти:

- 1) длину стороны AB ;
- 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
- 3) внутренний угол A ;
- 4) уравнение высоты CD и ее длину;
- 5) уравнение и длину медианы AE ;
- 6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;
- 7) точку пересечения медиан;
- 8) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне CD ;
- 9) систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC .

№ 2. Найдите координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0.$$

№ 3. Найдите полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 144$. Построить кривую.

№ 4. Составьте каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами, которые лежат на оси Ox , равно 10, а большая ось равна 16.

№ 5. Составьте каноническое уравнение эллипса, зная, что один из фокусов имеет координаты $(-5; 0)$, а малая полуось равна 4.

№ 6. Составьте каноническое уравнение эллипса, зная, что большая полуось $a = 12$, а эксцентриситет равен 0,5.

№ 7. Постройте гиперболу $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$. Найдите: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

№ 8. Составьте уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если ее фокусы лежат на оси Ox , и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

№ 9. Составьте уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если один из ее фокусов имеет координаты $(-13; 0)$, а эксцентриситет равен $\frac{13}{12}$.

№ 10. Постройте параболу $y^2 = 6x$. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

№ 11. Составьте уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а фокус имеет координаты $(0; -3)$.

№ 12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-5; 4; 3)$ параллельно плоскости $2x - 7y + 3z - 15 = 0$.

№ 13. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1; -2; 3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+7}{2} = \frac{y+4}{3} = z$.

№ 14. Найти расстояние от точки $(5; -1; 2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(2; 4; -2)$, $M_2(-3; 1; 0)$, $M_3(4; 7; -2)$.

№ 15. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $(4; -5; 7)$, $(2; 9; -4)$.

№ 16. Найти координаты направляющего вектора прямой

$$\begin{cases} 2x - 7y + 3z - 10 = 0, \\ x + 3y - 5z - 7 = 0. \end{cases}$$

№ 17. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(2; -5; 7)$ параллельно прямой $\frac{x+7}{4} = \frac{y+4}{-3} = z$.

№ 18. Найти угол между прямой $\frac{x-7}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z}{4}$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $(2; -1; 6)$.

№ 19. Найти угол между прямой $\frac{x-7}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z}{4}$ и плоскостью $4x + y - 3z + 5 = 0$.

№ 20. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ с плоскостью $x + 2y + 3z = 29$.

№ 21. Найти расстояние от точки $(2; 3; 1)$ до прямой

$$\frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}.$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 2
«ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ
ПРОИЗВОДНЫХ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ»

2.1. Задания к расчетно-графической работе

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значения данной функции $y = f(x)$ (табл. 2.1) на отрезке $[a; b]$.

Таблица 2.1. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	$y = f(x)$	a	b
1	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$	-1	3
2	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$	-1	2
3	$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$	2	4
4	$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	-1	2
5	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	0	4
6	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$	-2	3
7	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$	-3	0
8	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$	-3	1
9	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$	1	4
10	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$	-1	4
11	$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$	-4	1
12	$y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$	-4	0
13	$y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$	-5	0
14	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$	0	3
15	$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$	-3	5
16	$y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$	-5	3
17	$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$	-5	-1
18	$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$	-5	2
19	$y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$	-2	3
20	$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$	1	5

Задание 2. Исследовать данную функцию $y = f(x)$ (табл. 2.2) методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование функции рекомендуется проводить по схеме:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на непрерывность;
- 3) исследовать функцию на четность;
- 4) найти интервалы возрастания (убывания) функции, точки экстремума;
- 5) найти интервалы выпуклости (вогнутости), точки перегиба графика функции;
- 6) найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно);
- 7) по результатам исследования построить график функции.

Таблица 2.2. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	$y = f(x)$
1	$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$
2	$y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$
3	$y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$
4	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$
5	$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$
6	$y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$
7	$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$
8	$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$
9	$y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$
10	$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$
11	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
12	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
13	$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$
14	$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
15	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$
16	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
17	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$
18	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$
19	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$
20	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$

Задание 3. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ (табл. 2.3) и построить ее график.

Исследование функции рекомендуется проводить по схеме:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на непрерывность;
- 3) исследовать функцию на четность;
- 4) найти интервалы возрастания (убывания) функции, точки экстремума;
- 5) найти интервалы выпуклости (вогнутости), точки перегиба графика функции;
- 6) найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно);
- 7) найти асимптоты графика функции;
- 8) по результатам исследования построить график функции.

Таблица 2.3. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	$y = f(x)$
1	2
1	$y = \frac{x^2 - 14}{x - 4}$
2	$y = \frac{x^2 + 16}{x + 3}$
3	$y = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$
4	$y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$
5	$y = \frac{x^2 + 9}{x}$
6	$y = \frac{x^2 - 15}{x + 4}$
7	$y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$
8	$y = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$
9	$y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$
10	$y = \frac{x^2 + 4}{x}$

Продолжение таблицы 2.3

11	$y = \frac{x^2 + 9}{x + 4}$
12	$y = \frac{x^2 - 8}{x - 3}$
13	$y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$
14	$y = \frac{x^2}{x - 1}$
15	$y = \frac{x^2 + 1}{x}$
16	$y = \frac{x^2 + 24}{x + 1}$
17	$y = \frac{x^2 - 14}{x - 4}$
18	$y = \frac{x^2 + 16}{x + 3}$
19	$y = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$
20	$y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$

Задание 4. Решите задачу (табл. 2.4).

Таблица 2.4. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Задача
1	2
1	Требуется вырыть silosную яму $V = 32 \text{ м}^3$ с квадратным дном таких размеров, чтобы на облицовку ее стен и дна пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?
2	Скорость роста y популяции x задана формулой $y = 0,001x(100 - x)$. При каком размере популяции эта скорость максимальна?
3	Найти положительное число x , чтобы разность $x - x^2$ была наибольшей.
4	Площадь прямоугольного участка земли 144 м^2 . При каких размерах участка длина окружающего его забора будет наименьшей?
5	Число 20 разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

1	2
6	Проволокой длиной 20 м требуется огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?
7	Найти число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение.
8	Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 м^2 и разделить, затем этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?
9	Огород прямоугольной формы огорожен изгородью, длина которой 72 м. Каковы должны быть размеры огорода, чтобы его площадь была наибольшей?
10	Деталь из листового железа имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 см. Каким должно быть основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?
11	Какое положительное число, будучи сложенным, с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?
12	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.
13	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
14	Зависимость между урожаем озимой пшеницы y (ц/га) и нормой посева семян x (млн зерен/га) выражается формулой $y = 5,6 + 8,1x - 0,7x^2.$ Найдите норму посева семян для того, чтобы получить максимальный урожай.
15	Из прямоугольного листа жести размером 24×9 см требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?
16	Зависимость суточного удоя y в литрах от возраста коров x в годах определяется уравнением $y = -9,53 + 6,86x - 0,40x^2$, $x > 2$. Найти возраст дойных коров, при котором суточный удой будет наибольшим.
17	Площадь прямоугольного треугольника 6 см^2 . Найдите наименьшее значение площади квадрата, построенного на гипотенузе треугольника.
18	Длина, ширина и высота бака, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, составляют в сумме 36 см. Чему равен наибольший объем такого бака?
19	Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
20	Открытый чан имеет форму цилиндра объема $V = 27\pi \text{ м}^3$. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

2.2. Примеры решения типовых заданий

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение

Найдем производную функции:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1).$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0, \quad 4x(x^2 - 1) = 0, \\ x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Все критические точки принадлежат отрезку $[-2; 3]$.

Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$y(0) = 5, \\ y(-1) = 4, \\ y(1) = 4, \\ y(-2) = 12, \\ y(3) = 68.$$

Итак, $y_{\text{наиб}} = y(3) = 68$, $y_{\text{наим}} = y(-1) = y(1) = 4$.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = y(3) = 68$, $y_{\text{наим}} = y(-1) = y(1) = 4$.

Задание 2. Исследовать функцию $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование рекомендуется проводить по плану:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на непрерывность;
- 3) исследовать функцию на четность (нечетность);
- 4) исследовать функцию на экстремумы и промежутки монотонности;
- 5) найти точки перегиба графика функции и определить промежутки выпуклости (вогнутости) графика функции;
- 6) найти асимптоты графика (если они имеются);
- 7) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Область определения функции: $D(y) = R$.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения.

3. Исследуем функцию на четность:

$$y(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x)^2 - 3(-x) + 5 = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 5.$$

Так как $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, то есть это функция общего вида. Ее график не будет обладать симметрией относительно начала координат и оси Oy .

4. Найдем первую производную:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 \right)' = x^2 - 2x - 3.$$

Найдем критические точки функции. Приравняем производную к нулю и решим уравнение:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0; \\ D &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16; \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}, \\ x_1 &= -1, \quad x_2 = 3. \end{aligned}$$

Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критические точки. Эти точки разбивают область определения на три интервала: $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$, $(3; +\infty)$. В полученных интервалах расставляем знак производной y' (рис. 2.1).

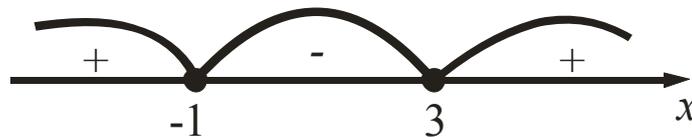


Рис. 2.1. Исследование на экстремум

Данная функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; 3)$.

$x = -1$ — точка максимума,

$x = 3$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 5 = 6\frac{2}{3},$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 5 = -4.$$

5. Найдем вторую производную:

$$y'' = (x^2 - 2x - 3)'' = 2x - 2.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем производную y'' к нулю и решим уравнение:

$$2x - 2 = 0, \quad x = 1.$$

Точек, в которых вторая производная y'' не существует, нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критическую точку второго рода. Область определения разбивается на два интервала: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис. 2.2).



Рис. 2.2. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на интервале $(-\infty; 1)$ и вогнутый на интервале $(1; +\infty)$.

При переходе через критическую точку второго рода $x = 1$ вторая производная меняет знак, следовательно, $x = 1$ — абсцисса точки перегиба.

Вычислим значение функции в точке $x = 1$:

$$y(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 5 = 1\frac{1}{3}.$$

$$y = 1\frac{1}{3} \text{ — ордината точки перегиба.}$$

Итак, $\left(1; 1\frac{1}{3}\right)$ — точка перегиба.

6. Для нахождения точки пересечения графика функции с осью Oy подставим в уравнение функции значение $x = 0$. Тогда $y = 5$. Значит, график функции пересекает ось Oy в точке $(0; 5)$.

Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью Ox следует решить кубическое уравнение $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0$. Оно имеет не более трех решений. Следовательно, график функции пересекает ось Ox не более чем в трех точках.

7. По результатам исследования построим график функции (рис. 2.3).

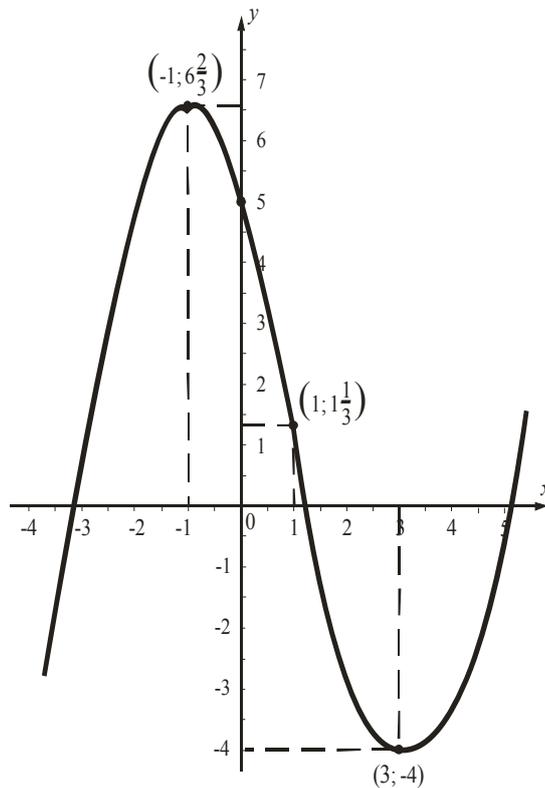


Рис. 2.3. График функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$$

Задание 3. Исследовать данную функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

Исследование рекомендуется проводить по плану:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на непрерывность;
- 3) исследовать функцию на четность (нечетность);
- 4) исследовать функцию на экстремумы и промежутки монотонности;
- 5) найти точки перегиба графика функции и определить промежутки выпуклости (вогнутости) графика функции;
- 6) найти асимптоты графика (если они имеются);
- 7) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Найдем область определения функции: $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

2. Исследуем функцию на непрерывность: $x = 3$ — точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 3$ — точка разрыва второго рода.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - 6(-x) + 13}{-x - 3} = \frac{x^2 + 6x + 13}{-x - 3};$$

$$y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y' = \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 13)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}.$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0, \text{ если } x^2 - 6x + 5 = 0, \text{ откуда } x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 5.$$

Производная не существует при $x = 3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 2.4).

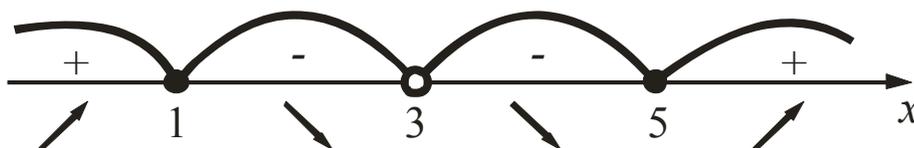


Рис. 2.4. Исследование на экстремум

Функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и на $(5; +\infty)$.

Функция убывает на $(1; 3)$ и на $(3; 5)$.

$x = 1$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(1) = -4,$$

$$y_{\min} = y(5) = 4.$$

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 6x + 5)'(x - 3)^2 - (x^2 - 6x + 5)((x - 3)^2)'}{(x - 3)^4} =$$

$$= \frac{(2x - 6)(x - 3)^2 - (x^2 - 6x + 5)2(x - 3)}{(x - 3)^4} =$$

$$= \frac{2(x - 3)((x - 3)^2 - x^2 + 6x - 5)}{(x - 3)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x - 5)2(x - 3)}{(x - 3)^3} = \frac{8}{(x - 3)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем вторую производную y'' к нулю и решим уравнение $\frac{8}{(x-3)^3} = 0$. Оно не имеет решений.

Вторая производная не существует при $x = 3$, но данная точка не является точкой перегиба, так как является точкой разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

На числовую ось нанесем область определения функции. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис. 2.5).

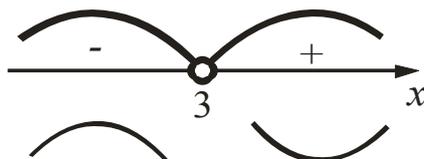


Рис. 2.5. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на $(-\infty; 3)$ и вогнутый на $(3; +\infty)$.

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как $x = 3$ — точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением $x = 3$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$.

Найдем параметры k и b :

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x^2 - 3x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{13}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 13 - x^2 + 3x}{x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 13}{x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{13}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = -3. \end{aligned}$$

Итак, $y = x - 3$ — уравнение наклонной асимптоты.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

При $x = 0$ получим $y = \frac{13}{-3} = -4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0; -4\frac{1}{3} \right)$ — точка пересечения с осью Oy .

При $y = 0$ получим $\frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} = 0$, $x^2 - 6x + 13 = 0$;

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0.$$

Следовательно, точек пресечения с осью Ox нет.

8. По результатам исследования строим график функции (рис. 2.6).

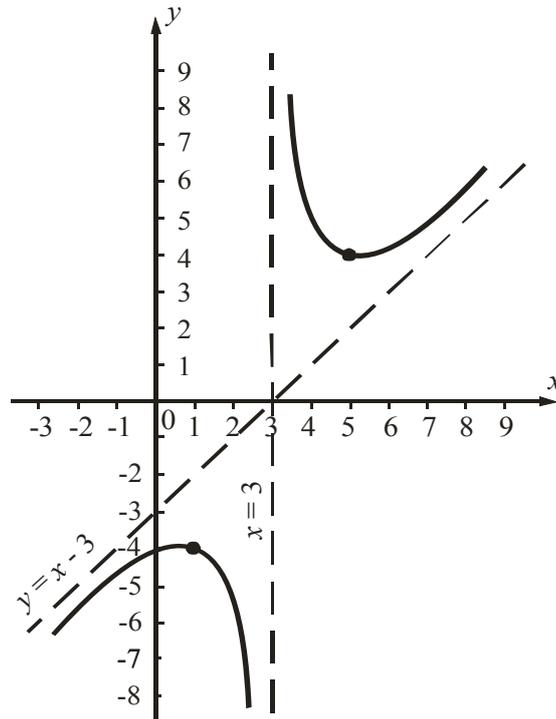


Рис. 2.6. График функции

Задание 4. Определить размеры силосного сооружения, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, объемом 108 м^3 , чтобы суммарная площадь поверхности дна и стенок была минимальной.

Решение

Пусть x (м) — сторона основания силосного сооружения, а y (м) — его глубина. Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x, y) = x^2 + 4xy.$$

Так как объем сооружения 108 м^3 и $V = x^2 y$, то $y = \frac{108}{x^2}$.

Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}, \text{ где } x > 0.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое значение x , при котором функция $S(x)$ принимает наименьшее значение.

Найдем производную:

$$S' = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0.$$

Решая это уравнение относительно x , получим $x = 6$.

На числовую ось нанесем область определения функции $S(x)$ и критическую точку $x = 6$. В полученных промежутках расставляем знак производной S' (рис. 2.7).



Рис. 2.7. Знаки производной

По достаточному условию экстремума в точке $x = 6$ функция $S(x)$ имеет минимум. Так как функция $S(x)$ непрерывна при $x > 0$ и имеет единственную точку экстремума $x = 6$ и это точка минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение, то есть $S_{\text{наим}} = S(6)$. Тогда

глубина сооружения $y = \frac{108}{x^2} = \frac{108}{36} = 3$ (м).

Ответ: длина основания 6 м, глубина 3 м.

2.3. Указания к защите расчетно-графической работы

Теоретические вопросы

1. Определения возрастающей и убывающей функций. Необходимые условия возрастания и убывания функции.
2. Достаточные условия возрастания и убывания функции.
3. Определения точек максимума и минимума функции одной переменной. Необходимое условие экстремума функции.
4. Достаточные условия экстремума функции одной переменной.
5. Определения выпуклого и вогнутого графиков функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции.
6. Определение точки перегиба. Достаточные условия существования точки перегиба.
7. Определение асимптоты графика функции. Виды асимптот.
8. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке.

Задачи для подготовки к защите

№ 1. Для указанных функций найти интервалы возрастания, убывания и экстремумы:

1) $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$,

2) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$.

№ 2. Для указанных функций найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба:

1) $y = x^7 + 7x + 1$,

2) $y = x^4 + 6x^2$.

№ 3. Провести полное исследование функции и построить ее график:

1) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\frac{1}{3}$,

2) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$.

№ 4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 2]$.

№ 5. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2x^2}{2x-1}$.

**ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ
«КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»**

3.1. Задания к ИДЗ

Задание 1. Найти алгебраическую форму комплексного числа z (табл. 3.1), выполнив действия в показательной форме. Найти модуль $|z|$ и значение аргумента $\arg z$ комплексного числа z .

Таблица 3.1. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	z	Номер варианта	z
1	2	3	4
1	$z = \frac{4 - 4i}{(2 - 2i)^6}$	11	$z = \frac{(\sqrt{3} - i)^5}{(\sqrt{3} + i)^7}$
2	$z = \frac{(2 - 2i)^6}{(1 - \sqrt{3}i)^6}$	12	$z = \frac{(3 - 3i)^3}{(1 + \sqrt{3}i)^5}$
3	$z = \frac{(1 - i)^6}{(1 + \sqrt{3}i)^5}$	13	$z = \frac{(\sqrt{3} + i)^3}{(-2 - 2i)^6}$
4	$z = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{(1 - i)^4}$	14	$z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^4}{(\sqrt{3} - i)^5}$
5	$z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{(1 + i)^4}$	15	$z = \frac{(2 + 2i)^2}{(\sqrt{3} + i)^3}$
6	$z = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{(-2 - 2i)^4}$	16	$z = \frac{(4 + 4i)^8}{(2 - 2i)^6}$
7	$z = \frac{(1 - i)^4}{(\sqrt{3} - i)^3}$	17	$z = \frac{(2 + 2i)^6}{(1 - \sqrt{3}i)^6}$
8	$z = \frac{(1 - i)^5}{(\sqrt{3} - i)^3}$	18	$z = \frac{(1 - i)^6}{(1 - \sqrt{3}i)^5}$
9	$z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^{20}}{(1 - i)^{20}}$	19	$z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{(1 - i)^4}$
10	$z = \frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$	20	$z = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{(1 + i)^4}$

Задание 2. Решить квадратное уравнение (табл. 3.2). Корни уравнения найти в алгебраической форме.

Таблица 3.2. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$z^2 + 2z + 26 = 0$	11	$2z^2 + 6z + 5 = 0$
2	$z^2 - 4iz - 13 = 0$	12	$3z^2 + 5iz + 2 = 0$
3	$z^2 + 2iz - 5 = 0$	13	$z^2 + 8iz - 7 = 0$
4	$10z^2 + 2z + 1 = 0$	14	$z^2 + 6iz - 18 = 0$
5	$z^2 - 4z + 20 = 0$	15	$5z^2 + 2iz + 3 = 0$
6	$z^2 + iz + 2 = 0$	16	$z^2 - 2z + 2 = 0$
7	$z^2 - 8z + 17 = 0$	17	$z^2 - 2z + 17 = 0$
8	$z^2 + 2iz + 8 = 0$	18	$z^2 - 10iz - 9 = 0$
9	$2z^2 + 3iz + 2 = 0$	19	$5z^2 - 2iz - 1 = 0$
10	$5z^2 + 2z + 1 = 0$	20	$z^2 + 2z + 10 = 0$

Задание 3. Дано уравнение (табл. 3.3). Найти z , выполнив действия в алгебраической форме.

Таблица 3.3. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$z(1 + 4i) = -1 + i$	11	$z(3 - i) = 2 + i$
2	$z(3 - i) = 1 + 2i$	12	$z(1 + 4i) = -2 + i$
3	$z(2 - i) = 3 + i$	13	$z(-1 + 2i) = 3 + i$
4	$z(1 - i) = -2 + i$	14	$z(1 - i) = 1 - 2i$
5	$z(1 + i) = 2 - 4i$	15	$z(2 + 3i) = -1 + i$
6	$z(1 + i) = -3 + 2i$	16	$z(3 - i) = 1 - 2i$
7	$z(2 + i) = 1 - i$	17	$z(3 - i) = -2 + i$
8	$z(3 + i) = -2 + i$	18	$z(-2 + 3i) = i - 5$
9	$z(1 + 3i) = 1 + 2i$	19	$z(1 + 4i) = -1 + 2i$
10	$z(2 + 3i) = 1 + i$	20	$z(1 - i) = -2 - i$

Задание 4

1. Найти значение многочлена $P(x)$ в точке x_0 (табл. 3.4).

Таблица 3.4. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Многочлен $P(x)$	x_0 .
1	2	3
1	$P(x) = x^2 - 2ix - 5$	$x_0 = 2 - i$
2	$P(x) = 7x^3 - 9x^2 + x - 6$	$x_0 = 2 + i$
3	$P(x) = x^2 + 4x + 20$	$x_0 = 1 - i$
4	$P(x) = 2x^2 + 4x - 4$	$x_0 = -1 - 2i$
5	$P(x) = x^2 - 4ix - 13$	$x_0 = 3 + 2i$
6	$P(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 80$	$x_0 = 5 + i$
7	$P(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x - 80$	$x_0 = 5 + i$
8	$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 12$	$x_0 = 2 + 2i$
9	$P(x) = x^2 + 2ix - 5$	$x_0 = 2 + i$
10	$P(x) = x^2 - 8x + 12$	$x_0 = 2 + i$
11	$P(x) = x^2 + 8ix - 7$	$x_0 = 1 - 7i$
12	$P(x) = 5x^2 - 3ix - 5$	$x_0 = 3 - i$
13	$P(x) = 6x^3 + 3x^2 - 9x + 11$	$x_0 = -2 - 3i$
14	$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$	$x_0 = 1 + 2i$
15	$P(x) = x^2 - x + 1$	$x_0 = 4 - i$
16	$P(x) = x^2 - 4ix - 13$	$x_0 = 3 - 2i$
17	$P(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 80$	$x_0 = 3 + i$
18	$P(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 80$	$x_0 = 5 - 2i$
19	$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 12$	$x_0 = 2 - 3i$
20	$P(x) = x^2 + 2ix - 5$	$x_0 = 2 - i$

2. Найти значение многочлена $P(x)$ в точке x_0 (табл. 3.5).

Таблица 3.5. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Многочлен $P(x)$	x_0
1	$P(x) = x^5 + 10x^3 - 20x^2 + 15x - 4$	$x_0 = -i$
2	$P(x) = 8x^5 - 16x^4 + 16x^2 - 8x$	$x_0 = i$
3	$P(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$	$x_0 = i$
4	$P(x) = -10x^3 + 20x^2 - 15x + 30$	$x_0 = 2i$
5	$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$	$x_0 = -3i$
6	$P(x) = x^4 + 2x^3 - 11$	$x_0 = -3i$
7	$P(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$	$x_0 = i$
8	$P(x) = x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 13x + 4$	$x_0 = -i$
9	$P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2$	$x_0 = 2i$
10	$P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$	$x_0 = -3i$
11	$P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$	$x_0 = 3i$
12	$P(x) = x^4 + 11x^3 - 45x^2 - 81x + 54$	$x_0 = 2i$
13	$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$	$x_0 = -2i$
14	$P(x) = x^6 + 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$	$x_0 = -i$
15	$P(x) = 5x^3 - 6x^2 - 3x + 4$	$x_0 = 4i$
16	$P(x) = x^4 + 7x^3 - 15x^2 + 13x + 4$	$x_0 = i$
17	$P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2$	$x_0 = i$
18	$P(x) = x^4 + 11x^3 + 45x^2 + 81x + 54$	$x_0 = i$
19	$P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$	$x_0 = -4i$
20	$P(x) = x^4 + 11x^3 + 45x^2 + 81x + 54$	$x_0 = -2i$

Задание 5. Найти все значения корня (табл. 3.6).

Таблица 3.6. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Корень	Номер варианта	Корень
1	$\sqrt[5]{2+2i}$	11	$\sqrt[6]{2-2i}$
2	$\sqrt[5]{-5-5i}$	12	$\sqrt[4]{4-4i}$
3	$\sqrt[6]{\sqrt{3}+i}$	13	$\sqrt[5]{-4+4i}$
4	$\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$	14	$\sqrt[8]{1+i}$
5	$\sqrt[7]{\sqrt{3}-i}$	15	$\sqrt[4]{-2+2i}$
6	$\sqrt[6]{-2-2i}$	16	$\sqrt[8]{1-i}$
7	$\sqrt[5]{-3+3i}$	17	$\sqrt[6]{-4-4i}$
8	$\sqrt[8]{-1-i}$	18	$\sqrt[6]{3-3i}$
9	$\sqrt[6]{\sqrt{3}i-1}$	19	$\sqrt[5]{-1-\sqrt{3}i}$
10	$\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$	20	$\sqrt[8]{-\sqrt{3}+i}$

Задание 6. На комплексной плоскости построить множество точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям (табл. 3.7).

Таблица 3.7. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	1-е условие	2-е условие	3-е условие
1	2	3	4
1	$\text{Im } z^2 = 4$	$\text{Re}(2z+1) = 2$	$\begin{cases} z \leq 4, \\ \text{Re } z > \text{Im } z \end{cases}$
2	$\text{Im}(z^2 - 2) = 2$	$\text{Re}(z - 2i) = 3$	$\begin{cases} z < 3, \\ \text{Im } z \leq 2 \end{cases}$
3	$\text{Im}(z^2 - 3) = 6$	$\text{Im}(2z + yi) = 4$	$\begin{cases} z \leq 3, \\ \text{Re } z > 2 \end{cases}$
4	$\text{Re } z^2 = 4$	$\text{Re}(z + y) = 2$	$\begin{cases} z < 2, \\ \text{Im } z \leq 1 \end{cases}$
5	$\text{Re}(z^2 - 2i) = 4$	$\text{Re}(3z - y) = 3$	$\begin{cases} z < 3, \\ \text{Im } z \geq 1 \end{cases}$
6	$\text{Re}(z^2 + 3i) = 4$	$\text{Im}(z + xi) = 2$	$\begin{cases} z \leq 4, \\ \text{Re } z < 2 \end{cases}$

7	$\operatorname{Re}(z^2 - 4i) = 1$	$\operatorname{Im}(z + xi) = 3$	$\begin{cases} z < 4, \\ \operatorname{Re} z \geq 2 \end{cases}$
8	$\operatorname{Im}(z^2 - 1) = 2$	$\operatorname{Re}(2z - y) = 4$	$\begin{cases} z < 2, \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$
9	$\operatorname{Im}(z^2 + 1) = 6$	$\operatorname{Re}(3z + y) = 6$	$\begin{cases} z \leq 2, \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$
10	$\operatorname{Im}(z^2 - 5) = 4$	$\operatorname{Im}(z + 2xi) = 4$	$\begin{cases} z < 3, \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$
11	$\operatorname{Im}(z^2 - 5) = 2$	$\operatorname{Im}(z - 2xi) = 6$	$\begin{cases} z \leq 3, \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$
12	$\operatorname{Re} z^2 = 9$	$\operatorname{Re}(z + 2) = y$	$\begin{cases} z < 2, \\ \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$
13	$\operatorname{Re}(z^2 + y^2) = 4$	$\operatorname{Im}(z - 4i) = x$	$\begin{cases} z \leq 4, \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$
14	$\operatorname{Re}(z^2 + y^2) = 9$	$\operatorname{Im}(z - 3i) = x$	$\begin{cases} z < 4, \\ \operatorname{Re} z \geq 1 \end{cases}$
15	$\operatorname{Re}(z^2 - x^2) = -1$	$\operatorname{Im}(z + 2i) = x$	$\begin{cases} z \leq 2, \\ \operatorname{Re} z > 1 \end{cases}$
16	$\operatorname{Re}(z^2 - x^2) = -4$	$\operatorname{Re}(3z - 6) = y$	$\begin{cases} z < 3, \\ \operatorname{Im} z \leq 2 \end{cases}$
17	$\operatorname{Im}(z^2 + y^2) = 2$	$\operatorname{Re}(z - 2) = y$	$\begin{cases} z \leq 3, \\ \operatorname{Im} z > 1 \end{cases}$
18	$\operatorname{Im}(z^2 - y^2) = 6$	$\operatorname{Re}(2z - 4) = y$	$\begin{cases} z < 4, \\ \operatorname{Re} z \geq 2 \end{cases}$
19	$\operatorname{Im}(z^2 + y^2) = 4$	$\operatorname{Re}(3z - 3) = y$	$\begin{cases} z \leq 4, \\ \operatorname{Re} z < 1 \end{cases}$
20	$\operatorname{Re}(3z + y) = 6$	$\operatorname{Im}(z + 4i) = x$	$\begin{cases} z \leq 4, \\ z > 1 \end{cases}$

3.2. Примеры решения типовых задач

Задание 1. Найти алгебраическую форму комплексного числа $z = \frac{4 - 4i}{(2 - 2i)^6}$, выполнив действия в показательной форме. Найти модуль $|z|$ и значение аргумента $\arg z$ комплексного числа z .

Решение

Запишем комплексные числа $z_1 = 4 - 4i$ и $z_2 = 2 - 2i$ в показательной форме.

Показательная форма комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид:

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль комплексного числа z , $\varphi = \arg z$ — аргумент комплексного числа z , который находится по формуле:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если точка, изображающая число } z, \text{ лежит в I или IV четверти,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{если точка, изображающая число } z, \text{ лежит во II четверти,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{если точка, изображающая число } z, \text{ лежит во III четверти.} \end{cases}$$

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z_1 = 4 - 4i$:

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{-4}{4} \right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа z_1 имеет вид:

$$z_1 = 4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z_2 = 2 - 2i$:

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{-2}{2} \right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа z_2 имеет вид:

$$z_2 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Найдем сначала показательную форму комплексного числа z . При этом при возведении в степень комплексного числа в показательной форме его модуль возводится в степень, а аргумент умножается на показатель степени, то есть, если $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = r^n e^{in\varphi}$. При делении двух комплексных чисел в показательной форме их модули делятся, а аргументы вычитаются. Таким образом, получим

$$z = \frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\left(2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^6} = \frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{(2\sqrt{2})^6 e^{-\frac{\pi}{4}i \cdot 6}} = \frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{512e^{-\frac{6\pi}{4}i}} = \frac{4\sqrt{2}}{512} e^{-\frac{\pi}{4}i - \left(-\frac{6\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{128} e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

Отсюда $|z| = \frac{\sqrt{2}}{128}$ — модуль комплексного числа z . Так как $\varphi = \arg z \in (-\pi; \pi]$, то $\varphi = \arg z = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$ — аргумент комплексного числа z .

Тогда показательная форма комплексного числа z имеет вид:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{128} e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Тогда $z = \frac{\sqrt{2}}{128} \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right)$ — тригонометрическая форма данного комплексного числа z .

Получим его алгебраическую форму:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{128} \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{128} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\frac{1}{128} - \frac{1}{128}i.$$

Итак, $z = -\frac{1}{128} - \frac{1}{128}i$.

Ответ: $z = -\frac{1}{128} - \frac{1}{128}i$, $|z| = \frac{\sqrt{2}}{128}$, $\arg z = -\frac{3\pi}{4}$.

Задание 2. Решить квадратное уравнение $z^2 + 2z + 26 = 0$. Корни уравнения найти в алгебраической форме.

Решение

Воспользуемся известным алгоритмом нахождения корней квадратного уравнения:

$$\begin{aligned}z^2 + 2z + 26 &= 0; \\D = b^2 - 4ac &= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 4 - 104 = -100; \\ \sqrt{D} &= \sqrt{-100} = \pm 10i; \\z_1 = \frac{-2 + 10i}{2} &= -1 + 5i, \quad z_2 = \frac{-2 - 10i}{2} = -1 - 5i.\end{aligned}$$

Ответ: $z_1 = -1 + 5i$, $z_2 = -1 - 5i$.

Задание 3. Дано уравнение $z(1 + 4i) = -1 + i$. Найти z , выполнив действия в алгебраической форме.

Решение

Найдем z :

$$z = \frac{-1 + i}{1 + 4i}.$$

Чтобы выполнить деление в алгебраической форме, умножаем числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$\begin{aligned}z &= \frac{-1 + i}{1 + 4i} = \frac{(-1 + i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{-1 + 4i + i - 4i^2}{1 - 16i^2} = \frac{-1 + 5i + 4}{1 + 16} = \\ &= \frac{3 + 5i}{17} = \frac{3}{17} + \frac{5}{17}i.\end{aligned}$$

Ответ: $z = \frac{3}{17} + \frac{5}{17}i$.

Задание 4. Найти значение многочлена $P(x)$ в точке x_0 .

а) $P(x) = x^2 - 2ix - 5$, $x_0 = 2 - i$;

б) $P(x) = x^5 + 10x^3 - 20x^2 + 15x - 4$, $x_0 = -i$.

Решение

а) Найдем значение многочлена $P(x) = x^2 - 2ix - 5$ в точке $x_0 = 2 - i$:

$$\begin{aligned}P(x_0) &= P(2 - i) = (2 - i)^2 - 2i \cdot (2 - i) - 5 = 4 - 2 \cdot 2 \cdot i + i^2 - 4i + 2i^2 - 5 = \\ &= 4 - 4i - 1 - 4i - 2 - 5 = -4 - 8i.\end{aligned}$$

б) Найдем значение многочлена $P(x) = x^5 + 10x^3 - 20x^2 + 15x - 4$ в точке $x_0 = -i$:

$$\begin{aligned} P(x_0) &= P(-i) = (-i)^5 + 10(-i)^3 - 20(-i)^2 + 15(-i) - 4 = \\ &= -i + 10i - 20 \cdot (-1) - 15i - 4 = -i + 10i + 20 - 15i - 4 = 16 - 6i. \end{aligned}$$

Ответ: а) $-4 - 8i$; б) $16 - 6i$.

Задание 5. Найти все значения корня $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение

Запишем число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме, для этого найдем его модуль и аргумент, используя формулы:

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi. \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\ \varphi &= \arg z = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{1} \right) + \pi = -\operatorname{arctg} 1 + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = -1 + i$ имеет вид:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Корень n -ой степени из комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, не равного нулю, имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Тогда

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right),$$

где $k = 0, 1, 2$.

Получаем три значения корня:

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),$$
$$z_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

Ответ: $z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$,

$$z_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

Задание 6. На комплексной плоскости построить множества точек, которые задаются условиями:

- 1) $\operatorname{Re} z = 2$;
- 2) $|z| < 2$;
- 3) $\operatorname{Im} z^2 = 2$.

Решение

1) Для комплексного числа $z = x + iy$ действительная часть $\operatorname{Re} z = x$. Так как по условию $\operatorname{Re} z = 2$, то $x = 2$. Это уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox (рис. 3.1).

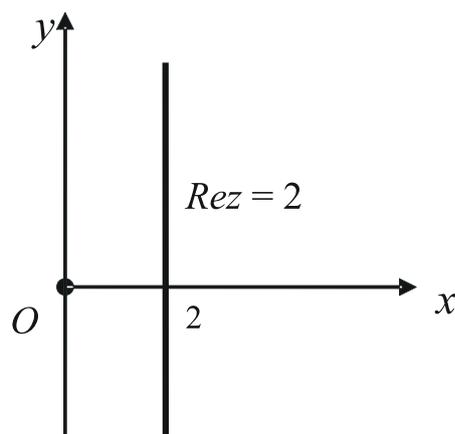


Рис. 3.1. Множество точек z , для которых $\operatorname{Re} z = 2$

2) Для комплексного числа $z = x + iy$ имеем $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Так как $|z| < 2$, то $\sqrt{x^2 + y^2} < 2$, откуда $x^2 + y^2 < 4$. Это неравенство определяет внутреннюю часть круга с центром в начале координат и радиусом, равным 2 (рис. 3.2).

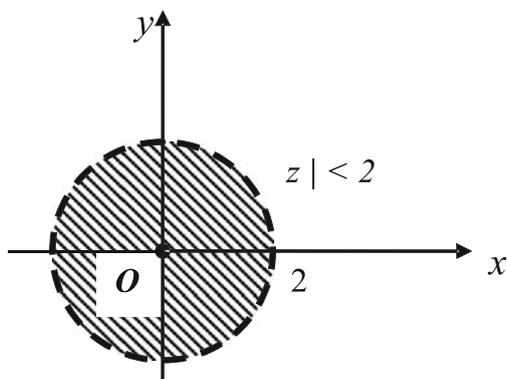


Рис. 3.2. Множество точек z , для которых $|z| < 2$

3) Если $z = x + iy$, то $z^2 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Тогда мнимая часть $\text{Im} z^2 = 2xy$. Так как по условию $\text{Im} z^2 = 2$, то $2xy = 2$, откуда $y = \frac{1}{x}$. Это уравнение гиперболы (рис. 3.3).

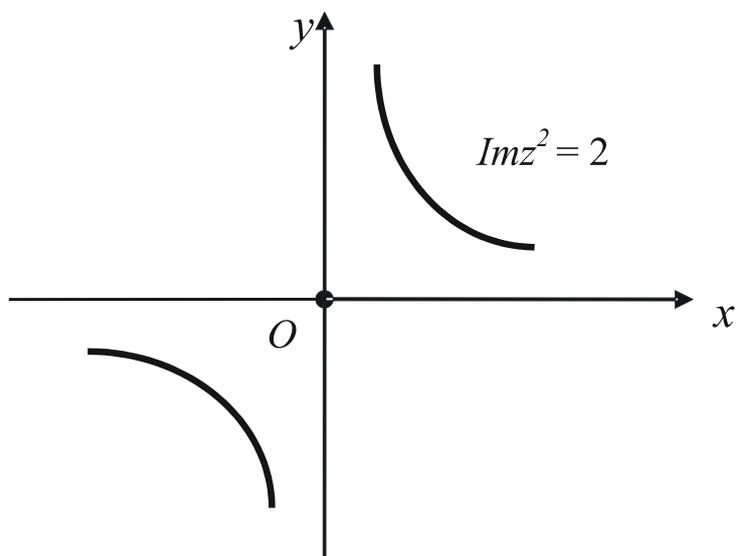


Рис. 3.3. Множество точек z , для которых $\text{Im} z^2 = 2$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Задания к расчетно-графической работе 3

Задания 1-4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка (табл. 4.1).

Таблица 4.1. Исходные данные для решения к задачам 1-4

Номер варианта	Задание
1	2
1	1) $(e^x + 2)y' = ye^x$ 2) $y'(2y - 3x) + 4x - 3y = 0$ 3) $y'(1 - x^2) - xy = 1$ 4) $xy' = x^5y^2 - 2y$
2	1) $2y + y' = 2x^3y^3$ 2) $(x^2 - y^2)dy = 2xydy$ 3) $y'(1 + x^2) = 1 + y^2$ 4) $y' + y \operatorname{tg} x = y^2$
3	1) $xyy' = 3x^2$ 2) $y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$ 3) $ydy = (2y - x)dx$ 4) $y' + yx - xy^3 = 0$
4	1) $y' = \frac{xy^2 - x}{x - 1}$ 2) $xy' - 5y = e^x x^6$ 3) $x dy = 3y(\ln y - \ln x) dx$ 4) $xy' = 3y - x^4 y^2$
5	1) $2x^2 y' - x^2 - y^2 = 0$ 2) $xy' - 3y = x^4 e^x$ 3) $x^2 dy + (y - 1) dx = 0$ 4) $y' = \frac{y^2 - 2y^3}{x}$

1	2
6	1) $y' \operatorname{tg} x - y = 0$ 2) $xy' - 2y = e^x y^2$ 3) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ 4) $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$
7	1) $yy' + x = 1$ 2) $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$ 3) $y' - \frac{y}{x} = y^3$ 4) $xy' - y = x\sqrt{x}$
8	1) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0$ 2) $y' - y \cos x = -\sin 2x$ 3) $y^2 = 2xy - x^2 y'$ 4) $(x^2 + 1)y' + 2xy - 2x = 0$
9	1) $y' \cos x - y \sin x = 0$ 2) $y^2 dx + x^2 dy = xydy$ 3) $(5x - 2y)y' = 8x + 5y$ 4) $yy' = \frac{y^2}{x} - x^3$
10	1) $y(e^x + 1)dy - e^x dx = 0$ 2) $4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$ 3) $y' \operatorname{ctg} x + y = \sqrt{y} \sin x$ 4) $xy' + y = \ln x$
11	1) $x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0$ 2) $y' = 2\sqrt{y} \ln x$ 3) $y' + y \operatorname{tg} x = y^3 \sin x$ 4) $y' + e^x y = e^{2x}$

1	2
12	1) $(1 + y^2)dx + \sqrt{x}dy = 0$ 2) $2xyy' = y^2 - x^2$ 3) $xy' + y - e^x = 0$ 4) $xy' + 2y + x^5y^2 = 0$
13	1) $y' - y \operatorname{tg} x = -y^2 \cos x$ 2) $x^2y' = 2xy + 3$ 3) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ 4) $(4 - y^2)dx + xydy = 0$
14	1) $8xyy' - x^2 - 4y^2 = 0$ 2) $y' - y \sin x = \sin 2x$ 3) $xy' + y - y^2 \ln x = 0$ 4) $dy = e^{x+y} dx$
15	1) $(y^3 - x^3)dy = 4xy^2dx$ 2) $y' - 4y = x^2\sqrt{y}$ 3) $y' - \frac{2y}{x} = x^2e^x$ 4) $x(2 + y)dx - (2 - x)dy = 0$
16	1) $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$ 2) $y' - y \operatorname{ctg} x - y^4 \cos x = 0$ 3) $x^2dy - (2xy + 3)dx = 0$ 4) $y^2 = 2xy - x^2y'$
17	1) $y^2dx + x^2dy = xydy$ 2) $y - y' = y^2 + xy'$ 3) $xy' + y = 2y^2 \ln x$ 4) $xy' - \frac{y}{x} + 1 = x$

1	2
18	1) $xy' + y = x + 1$ 2) $xy' = 3y - x^4 y^2$ 3) $xydy - (1 - x^2)dx = 0$ 4) $yy' + x + 2y = 0$
19	1) $y' \operatorname{tg} x - y = 0$ 2) $xy' - 2y = e^x y^2$ 3) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ 4) $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$
20	1) $yy' + x = 1$ 2) $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$ 3) $y' - \frac{y}{x} = y^3$ 4) $xy' - y = x\sqrt{x}$

Задание 5. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка, при указанных начальных условиях (табл. 4.2).

Таблица 4.2. Исходные данные к заданию 5

Номер варианта	Задание	Условие
1	2	3
1	$y'' - 12y^2 = 0$	$y(0) = \frac{1}{2}; y'(0) = 1$
2	$xy'' - 7y' + x = 0$	$y(1) = 0; y'(1) = 1$
3	$yy'' - (y')^2 = y^2 y'$	$y(0) = 1; y'(0) = 2$
4	$x^3 y'' - x^2 y' = 1$	$y(1) = 1; y'(1) = 1$
5	$y'' = \frac{y'}{x \ln x}$	$y(e) = 0; y'(e) = 1$
6	$xy'' - 4x\sqrt{x} + y' = 0$	$y(1) = 1; y'(1) = -8/5$
7	$y'' = \operatorname{arctg} x$	$y(0) = 0; y'(0) = 0$
8	$yy'' + (y')^2 = (y')^3$	$y(0) = 1; y'(0) = 1$

1	2	3
9	$yy'' + (y')^2 = 1$	$y(0) = 1; y'(0) = 0$
10	$y^3 y'' = -2$	$y(0) = 1; y'(0) = 0$
11	$y'' = -2y(y')^3$	$y(0) = 0; y'(0) = 1$
12	$y'' = y$	$y(1) = 0; y'(1) = 1$
13	$xy'' - y' - x^2 = 0$	$y(1) = -\frac{1}{6}; y'(1) = 0$
14	$y'' = \frac{y'}{x} + xe^x$	$y(1) = 0; y'(1) = 0$
15	$x^2 y'' - (y')^2 = 0$	$y(1) = 1; y'(1) = 1/2$
16	$(1-x^2)y'' - xy' = 2$	$y(0) = 1; y'(0) = 0$
17	$xy'' = 2y' + x^3$	$y(1) = 1; y'(1) = 1$
18	$y^3 y'' = 3$	$y(1) = 1; y'(1) = 1$
19	$xy'' - 7y' + x = 0$	$y(1) = 0; y'(1) = 1$
20	$yy'' - (y')^2 = y^2 y'$	$y(0) = 1; y'(0) = 2$

Задание 6-8. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (табл. 4.3).

Таблица 4.3. Исходные данные к задачам 6-8

Номер варианта	Задание
1	2
1	1) $y'' + 2y' - 3y = 6x$ 2) $9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}$ 3) $y'' + 9y = \sin 3x + \cos 3x$
2	1) $y'' - 4y' = 4x^2 - 8x$ 2) $3y'' + 2y' - y = \sqrt[3]{e^x}$ 3) $4y'' + 9y = \sin \frac{3}{2}x$
3	1) $y'' - 4y' = 8x + 4$ 2) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ 3) $y'' + 4y = 2 \sin 2x$
4	1) $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 1$ 2) $y'' - 4y' + 4y = 3e^x$ 3) $y'' - 4y = 5 \sin 3x - 10 \cos 3x$

1	2
5	1) $y'' - 4y' = x^2 + x$ 2) $4y'' - 12y' + 9y = \sqrt{e^{3x}}$ 3) $y'' - 4y = 5\sin x + \cos x$
6	1) $y'' + 2y' + 2y = 3x^2 + x$ 2) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{-2x}$ 3) $y'' + y = 4\sin x$
7	1) $y'' + 2y' + 2y = x + 2$ 2) $y'' - 4y' + 4y = 5e^{-x}$ 3) $y'' - 4y = 13\cos 3x$
8	1) $y'' + 2y' + 2y = x^3 + x + 1$ 2) $y'' - 4y' + 4y = \frac{9}{4}\sqrt{e^x}$ 3) $y'' + 9y = 3\cos 3x$
9	1) $y'' - 4y' = 12x^2$ 2) $4y'' - 20y' + 25y = \sqrt{e^{5x}}$ 3) $2y'' + y = \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$
10	1) $y'' - 3y' = 2 - 6x$ 2) $9y'' + 6y' + y = 2\sqrt[3]{e^{-x}}$ 3) $y'' - 4y = \sin 4x + 16\cos 4x$
11	1) $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$ 2) $y'' - 4y' + 4y = 8e^{4x}$ 3) $y'' - 4y = \sin 2x - 2\cos 2x$
12	1) $y'' + 2y' + 2y = x^3 + 2x^2 + 3$ 2) $y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{4}\sqrt{e^{3x}}$ 3) $y'' + 9y = 5\cos 2x$
13	1) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 1$ 2) $y'' - 4y' + 4y = 36e^{-4x}$ 3) $y'' + 2y = \sin \sqrt{2x}$
14	1) $y'' - 4y' = x^2 + x - 4$ 2) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ 3) $y'' - 4y = 5\sin x + \cos x$

1	2
15	1) $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 2x + 1$ 2) $y'' - 4y' + 4y = \frac{25}{4}\sqrt{e^{-x}}$ 3) $y'' - 4y = 29\cos 5x$
16	1) $y'' + 2y' + 2y = 2x^3 + 2x^2$ 2) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{-x}$ 3) $y'' - 4y = 4\sin 4x + \cos 4x$
17	1) $y'' + 2y' - 3y = 6x$ 2) $9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}$ 3) $y'' + 9y = \cos 3x$
18	1) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$ 2) $4y'' + 16y' + 15y = 4\sqrt{e^{-3x}}$ 3) $6y'' + y = \cos \frac{x}{\sqrt{6}}$
19	1) $y'' - 4y' = 4x^2 - 8x$ 2) $3y'' + 2y' - y = \sqrt[3]{e^x}$ 3) $4y'' + 9y = \sin \frac{3}{2}x$
20	1) $y'' - 4y' = 8x + 4$ 2) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ 3) $y'' + 4y = 2\sin 2x$

4.2. Примеры решения типовых задач

Задания 1-4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка:

$$1) (e^x + 2)y' = ye^x$$

$$2) y'(2y - 3x) + 4x - 3y = 0$$

$$3) y'(1 - x^2) - xy = 1$$

$$4) xy' = x^5 y^2 - 2y$$

№ 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:

$$(e^x + 2)y' = ye^x.$$

Решение

Уравнение относится к типу дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dy'}{y} = \int \frac{e^x}{e^x + 2} dx.$$

Отсюда следует: $\ln|y| = \ln(e^x + 2) + \ln|C|$, где $C \neq 0$.

В результате преобразования получаем:

$$\ln\left|\frac{y'}{C}\right| = \ln(e^x + 2) \Rightarrow y = C(e^x + 2).$$

Ответ: $y = C(e^x + 2)$, где C — любое число.

№ 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:

$$y'(2y - 3x) + 4x - 3y = 0.$$

Решение. Разделим все части уравнения на x .

Получим:

$$y' \left(2 \frac{y}{x} - 3 \right) + 4 - 3 \frac{y}{x} = 0,$$

откуда следует:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 3 \frac{y}{x}}{3 - 2 \frac{y}{x}} \text{ — однородное уравнение первого порядка.}$$

Используем замену:

$$\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = xu' + u.$$

Подставляем в уравнение функцию $u(x)$ вместо $y(x)$.

Получим:

$$u + xu' = \frac{4 - 3u}{3 - 2u}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными x и u .

Разделяем переменные:

$$xu' = \frac{4-3u}{3-2u} - u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{4-3u-3u+2u^2}{3-2u} \Rightarrow$$
$$\frac{3-2u}{2u^2-6u+4} du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$\frac{1}{2} \int \frac{3-2u}{u^2-3u+2} du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2-3u+2)}{u^2-3u+2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2} \ln|u^2-3u+2| = \ln|x| + \ln|C|,$$

где $C \neq 0$.

В результате преобразований получим:

$$|u^2-3u+2| = \frac{1}{C^2 x^2} \Rightarrow y^2 - 3yx + 2x^2 = C,$$

где C — любое число кроме нуля.

Ответ: $y^2 - 3yx + 2x^2 = C$, где $C \neq 0$.

№ 3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:

$$y'(1-x^2) - yx = 1.$$

Решение. Уравнение линейное. Решаем методом Бернулли:

$$y = u(x) \cdot v(x), \quad y' = u'v + uv'.$$

Подставляем в уравнение, переписанное в виде:

$$y' - y \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Получим:

$$u'v + uv' - uv \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow$$
$$v \left(u' - u \frac{x}{1-x^2} \right) + uv' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} u' - u \frac{x}{1-x^2} = 0, \\ uv' = \frac{1}{1-x^2}. \end{cases}$$

Первое уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными u и x . Разделяем в нем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{x}{1-x^2} dx.$$

Откуда следует:

$$\ln|u| = -\frac{1}{2} \ln|1-x^2| \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решаем второе уравнение системы:

$$uv' = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow \frac{v'}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow$$

$$v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow v = \arcsin x + C \Rightarrow$$

$$y = uv = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (C + \arcsin x).$$

Ответ: $y = \frac{C + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

№ 4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy' = x^5y^2 - 2y$.

Решение

Перепишем уравнение в виде:

$$y' + \frac{2y}{x} = x^4y^2.$$

Видно, что это уравнение Бернулли. Решаем методом Бернулли:

$$y = u(x) \cdot v(x), y' = u'v + uv'.$$

Подставив в уравнение, получим:

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = x^4u^2v^2.$$

Перепишем уравнение в виде:

$$v \left(u' + \frac{2u}{x} \right) + uv' = x^4u^2v^2.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} u' + \frac{2u}{x} = 0, \\ uv' = x^4u^2v^2. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = -2\ln|x| \Rightarrow u = \frac{1}{x^2}.$$

Решаем второе уравнение системы:

$$uv' = x^4 u^2 v^2 \Rightarrow v' = x^4 v^2 u \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = x^2 dx \Rightarrow -\frac{1}{v} = \frac{x^3}{3} - \frac{C}{3} \Rightarrow$$
$$v = \frac{3}{C - x^3} \Rightarrow y = uv = \frac{3}{x^2(C - x^3)},$$

где C — любое число.

Ответ: $y = \frac{3}{x^2(C - x^3)}.$

№ 5. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка, при указанных начальных условиях:

$$y'' - 12y^2 = 0, y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 1.$$

Решение

Используем замену:

$$y' = u(y), y'' = u'y' = u'u.$$

Уравнение принимает вид:

$$u'u = 12y^2.$$

Разделяем переменные u и y . Получаем:

$$udu = 12y^2 dy \Rightarrow \frac{u^2}{2} = 4y^3 + \frac{C_1}{2}.$$

Возвращаемся к переменной y :

$$y'^2 = 8y^3 + C_1 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{8y^3 + C_1}.$$

Используем условие $y'(0) = 1$, тогда получим:

$$1 = \sqrt{8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_1},$$

откуда следует $C_1 = 0$, причем:

$$y' = \pm\sqrt{8y^3} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^3}} = \pm 2\sqrt{2}dx \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{y}} = \pm 2\sqrt{2}x + C_2.$$

Используем начальное условие:

$$\frac{2}{\sqrt{0,5}} = C_2 \Rightarrow C_2 = 2\sqrt{2}.$$

Частное решение имеет вид:

$$\frac{2}{\sqrt{y}} = \sqrt{2}(2 \pm x^2) \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{y}} = 2 \pm x^2 \Rightarrow y = \frac{2}{(2 \pm x^2)^2}.$$

Ответ: $y = \frac{2}{(2 \pm x^2)^2}.$

Задание 6-8. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

6) $y'' + 2y' - 3y = 6x$

7) $9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}$

8) $y'' + 9y = \sin 3x + \cos 3x$

№ 6. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + 2y' - 3y = 6x.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 1.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

Найдем частное решение в виде:

$$y = Ax + B,$$

откуда следует, что $y' = A$, $y'' = 0$.

Исходное уравнение для такого частного решения принимает вид:

$$2A - 3Ax - 3B = 6,$$

из которого следует, что $A = -2$, а $2A - 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{4}{3}$.

Соответственно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = -2x - \frac{4}{3}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - 2x - \frac{4}{3}.$

№ 7. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}.$$

Характеристическое уравнение:

$$9k^2 - 6k + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$k_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{1}{3}.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y = e^{\frac{x}{3}} (C_1 + C_2 x).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = Ax^2 e^{\frac{x}{3}},$$

откуда:

$$y' = 2Axe^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{3}Ax^2 e^{\frac{x}{3}} = Ae^{\frac{x}{3}} \left(2x + \frac{1}{3}x^2\right),$$

$$y'' = \frac{1}{3}Ae^{\frac{x}{3}} \left(2x + \frac{x^2}{3}\right) + Ae^{\frac{x}{3}} \left(2 + \frac{2}{3}x\right) = \frac{A}{9}e^{\frac{x}{3}} (x^2 + 12x + 18).$$

Подставляем в исходное уравнение. Получим:

$$Ae^{\frac{x}{3}} (x^2 + 12x + 18) - Ae^{\frac{x}{3}} (12x + 2x^2) + Ax^2 e^{\frac{x}{3}} = e^{\frac{x}{3}}.$$

Откуда следует $A = \frac{1}{18}$.

Таким образом, частное решение имеет вид:

$$y = \frac{1}{18}x^2 e^{\frac{x}{3}}.$$

Общее решение:

$$y = e^{\frac{x}{3}} (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{18}x^2 e^{\frac{x}{3}}.$$

№ 8. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + 9y = \sin 3x + \cos 3x.$$

Корни характеристического уравнения мнимые:

$$k_{1;2} = \pm 3i.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = x(A \sin 3x + B \cos 3x),$$

$$y' = A \sin 3x + B \cos 3x + 3x(A \cos 3x - B \sin 3x),$$

$$y'' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x + 3(A \cos 3x - B \sin 3x) + 9x(-A \sin 3x - B \cos 3x).$$

Подставляем в исходное уравнение. Получим:

$$6A \cos 3x - 6B \sin 3x - 9x(A \sin 3x + B \cos 3x) + \\ + 9x(A \sin 3x + B \cos 3x) = \sin 3x + \cos 3x.$$

Откуда следует систему:

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ -6B = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6}, \\ B = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Частное решение неоднородного уравнения принимает вид:

$$y = \frac{x}{6}(\sin 3x - \cos 3x).$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + \frac{x}{6}(\sin 3x - \cos 3x).$$

4.3. Указания к защите расчетно-графической работы

Теоретические вопросы

1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
4. Уравнения Бернулли.
5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
6. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $P_n(x)$.
8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида ae^{mx} .
9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $a \cos nx + b \sin nx$.

Задачи

№ 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0$;

2) $x dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx$;

3) $(x^2 + y^2)dx - xy dy = 0$;

4) $x^3 dy = (x^2 - y^2) y dx$;

5) $\left(2x + y \cos \frac{y}{x}\right) dx = x \cos \frac{y}{x} dy$;

6) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$;

7) $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$;

8) $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$;

9) $y' + \frac{2}{x}y = x^2 y^2$;

10) $y' - \frac{y}{x} = \frac{(x-1)^2}{y}$.

№ 2. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения первого порядка $(\sqrt{y} + 1)\sqrt{x}y' - y = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

№ 3. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

1) $y'' = 6x + \sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

2) $y'' = \frac{y'}{x} + xe^x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$;

3) $y'' = \frac{y'}{x \ln x}$, $y(e) = 0$, $y'(e) = 1$;

4) $(1 - y)y'' + 2(y')^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

№ 4. Решить дифференциальные уравнения второго порядка:

1) $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x - 12$;

2) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$;

3) $9y'' + 6y' + y = 2\sqrt[3]{e^{-x}}$;

4) $y'' + 9y = 5 \cos 2x$;

5) $2y'' + y = \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 4 «РЯДЫ»

5.1. Задание к расчетно-графической работе

Задание 1. Для заданного ряда записать общий член и с его помощью, если возможно, выяснить вопрос о сходимости (расходимости) ряда (табл. 5.1).

Таблица 5.1. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Задание	Номер варианта	Задание
1	$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \dots$	11	$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \dots$
2	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$	12	$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots$
3	$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots$	13	$\frac{1}{5} + \frac{2}{9} + \frac{3}{13} + \dots$
4	$\frac{1}{11} + \frac{2}{21} + \frac{3}{31} + \dots$	14	$\frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{7} + \dots$
5	$\frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{3}{10} + \dots$	15	$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \dots$
6	$\frac{2}{11} + \frac{4}{21} + \frac{6}{31} + \dots$	16	$2 + 4 + 6 + \dots$
7	$1 + 3 + 5 + \dots$	17	$\frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{7} + \dots$
8	$\frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{7}{6} + \dots$	18	$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots$
9	$6 + \frac{6}{2^3} + \frac{6}{3^3} + \dots$	19	$\frac{1}{9} + \frac{2}{10} + \frac{3}{11} + \dots$
10	$\frac{5}{2} + \frac{10}{3} + \frac{15}{4} + \dots$	20	$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$

Задание 2. Для данного ряда записать три его первых члена и найти сумму ряда (табл. 5.2).

Таблица 5.2. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Ряд 1	Ряд 2
1	2	3
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{40n^2 - 28n - 45}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 + 35n - 6}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$

1	2	3
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}$
18	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}$
20	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}$

Задание 3. С помощью признака Даламбера или Коши исследовать на сходимость данные ряды (табл. 5.3).

Таблица 5.3. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Ряд 1	Ряд 2
1	2	3
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3 + 2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^3$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^4$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

1	2	3
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+25}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2^n}$
18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{4^n}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+8}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5n+2}$
20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{2^n}$

Задание 4. Дан ряд (табл. 5.4).

Требуется:

- 1) исследовать его на сходимость по признаку Лейбница;
- 2) вычислить приближенное значение суммы, взяв три первых члена ряда;
- 3) оценить допускаемую при этом погрешность.

Таблица 5.4. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Задание	Номер варианта	Задание
1	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{10^n}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5^n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{6^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+5}{10^n}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{5^n}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{5^n}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{10^n}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n+2}{10^n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n+1}{5^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{5^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{4^n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{10^n}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5n+1}{5^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-2}{5^n}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^5}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{10^n}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{10^n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{5^n}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4}$

Задание 5. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{b^n \sqrt{n+1}}$. При заданных значениях a и b (табл. 5.5) написать первые три члена ряда, найти область сходимости ряда.

Таблица 5.5. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	a	b	Номер варианта	a	b
1	2	3	11	3	5
2	4	7	12	5	9
3	7	6	13	2	5
4	3	2	14	4	3
5	5	2	15	6	4
6	3	7	16	4	5
7	8	3	17	7	4
8	5	7	18	2	6
9	3	4	19	7	5
10	5	8	20	2	4

Задание 6. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка с начальным условием (табл. 5.6). Найти решение задачи Коши в виде ряда Маклорена (ограничиться тремя первыми ненулевыми членами разложения).

Таблица 5.6. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Уравнение, начальное условие
1	2
1	$y' = 2y^2 + 3x^4 + 4x - 18, y(0) = 3$
2	$y' = 3y^2 + 4x^4 + 2x - 3, y(0) = 1$
3	$y' = y^2 + 8x^4 + 9x - 4, y(0) = 2$
4	$y' = 2y^2 + 6x^3 - 6x - 8, y(0) = 2$
5	$y' = 3y^2 + 3x^2 - 2x - 27, y(0) = 3$
6	$y' = 4y^2 + 4x^3 + 6x - 4, y(0) = 1$
7	$y' = 5y^2 - 8x^4 + 3x - 5, y(0) = 1$
8	$y' = 3y^2 + x^4 + 4x - 12, y(0) = 2$
9	$y' = y^2 - x^4 + 2x - 9, y(0) = 3$
10	$y' = 2y^2 + x^3 - 3x - 8, y(0) = 2$
11	$y' = 6y^2 + 2x^4 + 2x - 6, y(0) = 1$
12	$y' = 3y^2 - 4x^3 + 2x - 12, y(0) = 2$
13	$y' = 8y^2 + x^3 - 3x - 8, y(0) = 1$
14	$y' = 4y^2 + 2x^3 + 3x - 16, y(0) = 2$
15	$y' = y^2 + x^4 - 2x - 9, y(0) = 3$
16	$y' = 2y^2 - 2x^3 + 3x - 2, y(0) = 1$

1	2
17	$y' = 5y^2 + 4x^4 - x - 20, y(0) = 2$
18	$y' = y^2 - 3x^3 + 2x - 9, y(0) = 3$
19	$y' = 6y^2 + 3x^3 + 4x - 6, y(0) = 1$
20	$y' = 3y^2 - 4x^4 - 5x - 12, y(0) = 2$

Задание 7. Вычислить приближенное значение определенного интеграла (табл. 5.7) с точностью $\delta = 0,001$.

Таблица 5.7. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	2	3	4
1	$\int_0^{0,4} x^2 \sin x^2 dx$	11	$\int_0^{0,8} \frac{x^4}{1+x^6} dx$
2	$\int_0^{0,4} x \sin x^3 dx$	12	$\int_0^{0,5} \frac{x^2}{1+x^4} dx$
3	$\int_0^{0,5} x^3 \sin x^2 dx$	13	$\int_0^{0,4} x^2 \ln(1+x^2) dx$
4	$\int_0^{0,3} x^2 \cos x^2 dx$	14	$\int_0^{0,4} x \ln(1+x^3)' dx$
5	$\int_0^{0,4} x^4 \cos x^2 dx$	15	$\int_0^{0,4} x^2 \operatorname{arctg} x^2 dx$
6	$\int_0^{0,5} x^5 \cos x^3 dx$	16	$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$
7	$\int_0^{0,4} x^4 e^{-x} dx$	17	$\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$
8	$\int_0^{0,5} x^5 e^{-x} dx$	18	$\int_0^{0,4} \frac{e^x - 1}{x} dx$
9	$\int_0^{0,6} x^6 e^{-x} dx$	19	$\int_0^{0,1} \sqrt[3]{1+x^3} dx$
10	$\int_0^{0,6} \frac{x^6}{1+x^8} dx$	20	$\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx$

5.2. Примеры решения типовых задач

Задание 1. Для данного ряда

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \dots$$

записать общий член и с его помощью, если возможно, выяснить вопрос о сходимости (расходимости) ряда.

Решение

Найдем формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \dots u_n + \dots$$

Числители членов ряда образуют числовую последовательность, состоящую из натуральных чисел:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

Знаменатели членов ряда образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 6$ и разностью $d = 1$:

$$6, 7, 8, \dots, a_n, \dots$$

n -й член арифметической прогрессии находится по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

Поэтому

$$a_n = 6 + 1 \cdot (n-1) = 6 + n - 1 = n + 5.$$

Таким образом, общий член ряда имеет вид:

$$u_n = \frac{n}{n+5}.$$

Итак,

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{n+5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}.$$

Проверим, выполняется ли необходимый признак сходимости, состоящий в том, что если ряд сходится, то предел его общего члена при $n \rightarrow \infty$ равен нулю.

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{5}{n}} = 1 \neq 0.$$

Необходимый признак не выполняется, значит, ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ расходится.

Задание 2. Для данного ряда записать три его первых члена и найти сумму ряда.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{40n^2 - 28n - 45}$$

Решение

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \dots$$

Это геометрический ряд, его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = \frac{1}{4}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Этот ряд сходится.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии находится по формуле

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Тогда сумма данного ряда

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $S = \frac{1}{2}$.

2) По формуле общего члена ряда $a_n = \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}$ найдем несколько первых членов ряда:

$$\text{при } n = 1 \quad a_1 = \frac{14}{49 \cdot 1^2 - 28 \cdot 1 - 45} = \frac{14}{-24} = -\frac{7}{12},$$

$$\text{при } n = 2 \quad a_2 = \frac{14}{49 \cdot 2^2 - 28 \cdot 2 - 45} = \frac{14}{95},$$

$$\text{при } n = 3 \quad a_3 = \frac{14}{49 \cdot 3^2 - 28 \cdot 3 - 45} = \frac{14}{312} = \frac{7}{156}.$$

Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{40n^2 - 28n - 45} = -\frac{7}{12} + \frac{14}{95} + \frac{7}{156} + \dots$$

Преобразуем формулу общего члена ряда $a_n = \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}$, разложив знаменатель $49n^2 - 28n - 45$ на множители:

$$49n^2 - 28n - 45 = 0;$$

$$D = 14^2 + 45 \cdot 49 = 49(4 + 45) = 49^2;$$

$$n_{1,2} = \frac{14 \pm 49}{49};$$

$$n_1 = \frac{63}{49} = \frac{9}{7}, \quad n_2 = -\frac{35}{49} = -\frac{5}{7}.$$

Тогда

$$49n^2 - 28n - 45 = 49 \left(n - \frac{9}{7} \right) \left(n + \frac{5}{7} \right) = (7n - 9)(7n + 5).$$

Итак,

$$a_n = \frac{14}{(7n - 9)(7n + 5)}.$$

Разложим полученную дробь на сумму простых дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$a_n = \frac{14}{(7n - 9)(7n + 5)} = \frac{A}{7n - 9} + \frac{B}{7n + 5} = \frac{A(7n + 5) + B(7n - 9)}{(7n - 9)(7n + 5)}.$$

Записываем равенство числителей:

$$14 = A(7n + 5) + B(7n - 9);$$

$$14 = 7An + 5A + 7Bn - 9B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n в левой и правой частях полученного равенства:

$$\begin{cases} 7A + 7B = 0, & |n \\ 5A - 9B = 14; & |n^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B, \\ -14B = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1; \\ B = -1. \end{cases}$$

Тогда общий член ряда примет вид:

$$a_n = \frac{A}{7n - 9} + \frac{B}{7n + 5} = \frac{1}{7n - 9} - \frac{1}{7n + 5}.$$

Используя его, выпишем первые n членов ряда:

$$a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12},$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{19}, \\
a_3 &= \frac{1}{12} - \frac{1}{26}, \\
a_4 &= \frac{1}{19} - \frac{1}{32}, \\
a_5 &= \frac{1}{26} - \frac{1}{40}, \dots, \\
a_{n-3} &= \frac{1}{7n-30} - \frac{1}{7n-16}, \\
a_{n-2} &= \frac{1}{7n-23} - \frac{1}{7n-9}, \\
a_{n-1} &= \frac{1}{7n-16} - \frac{1}{7n-2}, \\
a_n &= \frac{1}{7n-9} - \frac{1}{7n+5}.
\end{aligned}$$

Найдем сумму первых n членов ряда (n -ю частичную сумму)
 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Получим:

$$S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5}.$$

Найдем предел n -й частичной суммы ряда при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

Так как предел n -й частичной суммы при $n \rightarrow \infty$ существует и конечен, то ряд сходится и его сумма равна значению этого предела, то есть

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0,3.$$

Ответ: $S = 0,3$.

Задание 3. С помощью признака Даламбера или Коши исследовать на сходимость данные ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Решение

1) Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$ на сходимость используем интегральный признак Коши, согласно которому, если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на множестве натуральных чисел являются значениями непрерывной положительной функции $f(x)$, монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$, то ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ на $[1; +\infty)$. Она непрерывна и положительна на этом промежутке. Значения функции $f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ..., то есть $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$.

Значит, можно применять интегральный признак Коши. Найдем несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x)dx &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x+2} \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{b+2} - 2\sqrt{3}) = +\infty. \end{aligned}$$

Так как несобственный интеграл расходится, то, согласно интегральному признаку Коши, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ расходится.

2) Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ на сходимость используем признак

Даламбера, согласно которому, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $q < 1$; расходится, если $q > 1$; требуются

дополнительное исследование, если $q = 1$.

Для данного ряда $a_n = \frac{n}{3^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$.

Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1.\end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то, согласно признаку Даламбера, данный ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ сходится.

Задание 4. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{10^n}$.

Требуется:

- 1) исследовать его на сходимость по признаку Лейбница;
- 2) если ряд сходится, исследовать его на абсолютную сходимость;
- 3) вычислить приближенное значение суммы, взяв три первых члена ряда;
- 4) оценить допускаемую при этом погрешность.

Решение

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{10^n} = \frac{1}{10} - \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} - \frac{4}{10000} + \dots$ является знакочередующимся.

Проверим, выполняется ли признак Лейбница, согласно которому, если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и предел модуля общего члена ряда при $n \rightarrow \infty$ равен нулю, то знакочередующийся ряд сходится.

Члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{10^n}$ монотонно убывают по абсолютной величине:

$$\frac{1}{10} > \frac{2}{100} > \frac{3}{1000} > \frac{4}{10000} > \dots$$

Найдем предел модуля общего члена ряда при $n \rightarrow +\infty$, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{10^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{10^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(10^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^x \ln 10} = 0.$$

Согласно признаку Лейбница, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{10^n}$ сходится.

2) Выясним, как сходится знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{10^n}$, условно или абсолютно. Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}.$$

Иследуем его на сходимость по признаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)10^n}{10^{n+1}n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10n} = \\ &= \frac{1}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{10} < 1. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$ сходится. Следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{10^n}$ сходится абсолютно.

3) Вычислим приближенное значение суммы ряда, взяв три первых члена:

$$S \approx S_3 = \frac{1}{10} - \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} = 0,1 - 0,02 + 0,003 = 0,983.$$

4) Оценим погрешность вычисления.

Если ряд удовлетворяет признаку Лейбница, то его остаток по модулю не превышает абсолютной величины первого члена остатка.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{10^n} = \frac{1}{10} - \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} - \underbrace{\frac{4}{10000} + \frac{5}{100000} + \dots}_{\text{остаток ряда}};$$

$$|a_4| = \left| -\frac{4}{10000} \right| = 0,0004.$$

Поэтому погрешность вычислений $\delta \leq 0,0004$.

Задание 5. Написать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение

Возьмем последовательно $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда данный ряд записывается в виде:

$$\frac{5x}{1^2 \cdot 3} + \frac{5^2 x^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{5^3 x^3}{3^2 \cdot 3^3} + \dots + \frac{5^n x^n}{n^2 \cdot 3^n} + \dots$$

Это степенной ряд. Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^{n+1} x^{n+1} n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1} 5^n x^n} \right| = \frac{5}{3} |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{5}{3} |x|.$$

Данный ряд сходится абсолютно при тех значениях x , которые удовлетворяют неравенству:

$$\frac{5}{3} |x| < 1, \text{ или } |x| < \frac{3}{5}, \text{ или } -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}.$$

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала. При $x = -\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Последний ряд является знакоперевающимся. Исследуем его по признаку Лейбница:

1) абсолютная величина его общего члена стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

2) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине:
 $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \dots$

Следовательно, по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится. Значит, $x = -\frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

При $x = \frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Исследуем сходимость этого ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Значит, $x = \frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

Таким образом, $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$ — область сходимости данного степенного ряда.

Ответ: $\left[-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

Задание 6. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' = 2y^2 + 3x^4 + 4x - 18$ и начальное условие $y(0) = 3$. Найти решение задачи Коши в виде ряда Маклорена (ограничиться тремя первыми ненулевыми членами разложения).

Решение

Будем искать решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{y^n(0)}{n!}x^n + \dots$$

По условию $y(0) = 3$.

Найдем $y'(0)$, для этого подставим $x = 0$; $y = 3$ в уравнение $y' = 2y^2 + 3x^4 + 4x - 18$. Получим

$$y'(0) = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 18 = 0.$$

Найдем $y''(0)$:

$$y''(x) = (2y^2 + 3x^4 + 4x - 18)' = 4y^2y' + 12x^3 + 4;$$

$$y''(0) = 4 \cdot 3^2 \cdot 0 + 12 \cdot 0^3 + 4 = 4.$$

Найдем $y'''(0)$:

$$y'''(x) = (4y^2y' + 12x^3 + 4)' = 8y(y')^2 + 4y^2y'' + 36x^2;$$

$$y'''(0) = 8 \cdot 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 3^2 \cdot 4 + 36 \cdot 0 = 144.$$

Нашли три первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд решения дифференциального уравнения:

$$y(x) = 3 + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{144}{3!}x^3 + \dots$$

$$y(x) = 3 + 2x^2 + 24x^3 + \dots$$

Ответ: $y(x) = 3 + 2x^2 + 24x^3 + \dots$

Задание 7. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_0^{0,4} x^2 \sin x^2 dx$ с точностью $\delta = 0,001$.

Решение

Будем использовать разложение в ряд Маклорена функции $y = \sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \dots$$

Заменим x на x^2 , получим разложение в степенной ряд функции $y = \sin x^2$:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \dots$$

Умножив обе части последнего равенства на x^2 , получим разложение в ряд функции $y = x^2 \sin x^2$:

$$x^2 \sin x^2 = x^4 - \frac{x^8}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} - \frac{x^{16}}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \dots$$

Промежуток интегрирования $[0; 0,4]$ принадлежит области сходимости ряда. В области сходимости ряд можно почленно интегрировать. Получим

$$\begin{aligned} \int_0^{0,4} x^2 \sin x^2 dx &= \int_0^{0,4} \left(x^4 - \frac{x^8}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} - \frac{x^{16}}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^9}{9 \cdot 3!} + \frac{x^{13}}{5! \cdot 13} - \frac{x^{17}}{7! \cdot 17} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{4n-1}}{(4n-1) \cdot (2n-1)!} + \dots \right) \Bigg|_0^{0,4} = \\ &= \frac{0,01024}{5} - \frac{0,4^9}{9 \cdot 6} + \frac{0,4^{13}}{120 \cdot 13} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{4n-1}}{(4n-1) \cdot (2n-1)!} + \dots \end{aligned}$$

После интегрирования получили знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница (члены монотонно убывают по абсолютной величине и предел модуля общего члена ряда при $n \rightarrow \infty$ равен нулю).

Находим член ряда, меньший заданной точности:

$$|a_2| = \left| -\frac{0,4^9}{5 \cdot 6} \right| \approx 0,000005 < 0,001.$$

Остаток ряда по модулю не превышает абсолютной величины своего первого члена, то есть $|a_2|$.

Итак,

$$\int_0^{0,4} x^2 \sin^2 x dx \approx \frac{0,01024}{5} \approx 0,0020 \approx 0,002.$$

Ответ: 0,002.

ЗАДАНИЯ К НЕКОТОРЫМ ТЕМАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

6.1. Матрицы, их виды. Действия над матрицами

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / ред. Л.Н. Журбенко, Ю.М. Данилов. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 10, 17-19.

Составьте *конспект № 1*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Что называется матрицей?
2. Виды матриц?
3. Как выполняется сложение матриц?
4. Как выполняется умножение матрицы на число?
5. Как выполняется умножение матриц?
6. В каком случае можно выполнять умножение матриц?
7. Обладает ли умножение матриц переместительным свойством?
8. Вычислите сумму элементов первого столбца матрицы

$$C = 2A - 3B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 123 \\ 11 & 34 & -56 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 4 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Найдите матрицу $C = A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 123 \\ 11 & 34 & -56 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите алгебраические до-

полнения элементов a_{21} , a_{33} .

6.2. Линейные операции над векторами.

Скалярное произведение векторов

Самостоятельно изучите материал по источникам:

Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / ред. Л.Н. Журбенко, Ю.М. Данилов. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 21-40.

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — С. 277-304.

Составьте *конспект № 2*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Какие линейные операции выполняются над векторами?

2. Изобразите два произвольных вектора \vec{a} и \vec{b} , найдите векторы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$; $2\vec{a}$; $-\frac{1}{2}\vec{b}$.

3. Как выполняются линейные операции над векторами в координатной форме?

4. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$.

5. Что называют скалярным произведением двух векторов?

6. Какими свойствами обладает скалярное произведение?

7. Что называют скалярным квадратом вектора?

8. Как находится скалярное произведение векторов через их координаты?

9. Каково условие перпендикулярности двух векторов?

10. Как с помощью скалярного произведения найти угол между векторами?

11. Найдите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если длина вектора \vec{a} равна 5, длина вектора \vec{b} равна 4, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 60° .

12. Найдите скалярное произведение векторов \vec{AB} и \vec{AC} , если $A(3; -6; 4)$, $B(-4; 0; 3)$, $C(5; -1; 4)$.

13. Найдите косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = (5; -2; 8)$, $\vec{b} = (4; 1; -1)$.

14. Найдите значение λ при котором векторы $\vec{a} = (5; -2; \lambda)$ и $\vec{b} = (4; \lambda; -3)$ перпендикулярны.

6.3 Полярная система координат на плоскости

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В. С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — С. 44-46.

Составьте конспект № 3, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Что называют полярной системой координат на плоскости?

2. Что называют прямоугольными координатами точки на плоскости?

3. Как связаны полярные и прямоугольные координаты точки?

4. Каким уравнением задается линия в полярной системе координат?

5. Построить точку $M\left(1; \frac{3\pi}{4}\right)$ в полярной системе координат.

6. Дана точка $A\left(3; \frac{5\pi}{4}\right)$ в полярной системе координат. Найти ее координаты в прямоугольной декартовой системе координат.

7. Дана точка $B(-\sqrt{3}; 1)$ в прямоугольной декартовой системе координат. Найти ее координаты в полярной системе координат.

8. Построить кривую $r = 1 + \cos \varphi$ в полярной системе координат. Найти в справочнике название этой кривой.

6.4. Поверхности в пространстве

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 76-83.

Составьте конспект № 4 и таблицу 6.1.

Таблица 6.1. Поверхности в пространстве

№	Название поверхности	Уравнение	Изображение
1	Эллиптический цилиндр		
2	Параболический цилиндр		
3	Гиперболический цилиндр		
4	Эллипсоид		
5	Сфера		
6	Однополостный гиперболоид		
7	Двухполостный гиперболоид		
8	Эллиптический параболоид		
9	Гиперболический параболоид		
10	Конус второго порядка		

Выполните задания:

1. Расположите уравнения поверхностей:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 2) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, 3) $x^2 + z^2 = 4$

в следующем порядке: цилиндр, сфера, гиперболоид.

2. Расположите уравнения поверхностей:

1) $y + x^2 + 1 = 0$, 2) $x^2 + y + z^2 = 0$, 3) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

в следующем порядке: параболоид, цилиндр, конус.

6.5. Основные элементарные функции, их свойства и графики

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст].
Ч. 1 : Тридцать шесть лекций / Д.Т. Письменный. — 6-е изд. — М. : Ай-рис-пресс, 2011. — С. 104-106.

Составьте *конспект № 5*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Что называют функцией одной переменной?
2. Что называется областью определения функции одной переменной?
3. Что называется множеством значений функции одной переменной?
4. Какая функция называется четной? Приведите пример четной функции. Какова особенность графика четной функции?
5. Какая функция называется нечетной? Приведите пример нечетной функции. Какова особенность графика нечетной функции?
6. Какая функция называется периодической? Приведите пример периодической функции. Какова особенность графика периодической функции?
7. Какой период называют основным?
8. Какая функция называется ограниченной? Приведите пример ограниченной функции.
9. Найдите область определения функции:
 - 1) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$;
 - 2) $y = \frac{\lg(x + 5)}{x}$.
10. Найдите множество значений функции:
 - 1) $y = 3 \sin x - 2$;
 - 2) $y = x^2 - 6x + 5$.
11. Исследуйте на четность (нечетность) функции:
 - 1) $y = x^4 \sin 7x$;
 - 2) $y = \lg \cos x + x^2$.
12. Укажите основной период функции:
 - 1) $y = 2 \sin 6x$;
 - 2) $y = \cos \frac{x}{2}$;
 - 3) $y = -2 \operatorname{tg} 3x + 1$;
 - 4) $y = \operatorname{ctg}(4x - 2)$.
13. Какие функции относятся к основным элементарным?
14. Заполните таблицу 6.2.

Таблица 6.2. Основные элементарные функции

Обозначение функции	Область определения $D(y)$	Область значений $E(y)$	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
1	2	3	4	5	6	7
<i>Степенная функция</i>						
$y = x^n$ $n \in N$, n — четное						
$y = x^n$ $n \in N$, n — нечетное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n — четное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n — нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n — нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n — четное						
<i>Показательная функция</i>						
$y = a^x$ $0 < a < 1$						
$y = a^x$ $a > 1$						
<i>Логарифмическая функция</i>						
$y = \log_a x$ $0 < a < 1$						
$y = \log_a x$ $a > 1$						
<i>Тригонометрические функции</i>						
$y = \sin x$						
$y = \cos x$						
$y = \operatorname{tg} x$						
$y = \operatorname{ctg} x$						

1	2	3	4	5	6	7
<i>Обратные тригонометрические функции</i>						
$y = \arcsin x$						
$y = \arccos x$						
$y = \operatorname{arctg} x$						
$y = \operatorname{arcctg} x$						

6.6. Вывод некоторых формул дифференцирования

Самостоятельно изучите материал по источникам:

Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / ред. Л.Н. Журбенко, Ю.М. Данилов, — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 131-161.

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — С. 110-122.

Составьте конспект № 6, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Выведите формулу производной суммы двух функций.
2. Выведите формулу производной произведения двух функций.
3. Выведите формулу производной функции $y = \cos x$.
4. Выведите формулу производной функции $y = \operatorname{tg} x$.
5. Выведите формулу производной функции $y = \operatorname{arctg} x$.
6. Найдите производную функции:

$$1) y = \ln^3 x + \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x;$$

$$2) y = 3^{\cos^2 x} + \operatorname{arctg} 5x,$$

$$3) y = e^{\operatorname{ctg} x} \arcsin \sqrt{x}.$$

6.7. Несобственные интегралы

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 216-219.

Составьте конспект № 7, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Какие интегралы называются несобственными?
2. Как вычисляются несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования?
3. Как вычисляются несобственные интегралы от неограниченных функций?
4. В каком случае несобственный интеграл называется расходящимся? сходящимся?

5. Вычислите интегралы:

$$\begin{array}{ll} 1) \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx; & 4) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx; \\ 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx; & 5) \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx; \\ 3) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx; & 6) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx. \end{array}$$

6.8. Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 222-227.

Составьте *конспект № 8*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Как вычислить площадь плоской фигуры в декартовых координатах?

2. Как вычислить площадь криволинейной трапеции при параметрическом задании кривой?

3. Как вычислить площадь криволинейного сектора в полярных координатах?

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x = 4, x = 1, x = 4, y = 0$;

2) $y = x^2, y = 2 - x^2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат: $r = a(1 + \sin 2\varphi)$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$

6.9. Применение определенного интеграла для вычисления объемов тел вращения и длины дуги кривой

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 222-227.

Составьте *конспект № 9*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Как вычислить объем тела вращения с помощью определенного интеграла?
2. Как вычислить длину дуги в прямоугольной системе координат?
3. Как вычислить длину дуги кривой, заданной в параметрической форме?
4. Как вычислить длину дуги кривой в полярных координатах?
5. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{6}{x}$, прямыми $y = 1$, $y = 6$ и осью Oy . Сделать рисунок.
6. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Сделать рисунок.
7. Вычислить длину дуги кривой: $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$, если $0 \leq x \leq 12$.

6.10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 167-172.

Составьте *конспект № 10*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Сформулируйте определение нормали к поверхности и напишите уравнения нормали.
2. Сформулируйте определение касательной плоскости к поверхности и напишите уравнение касательной плоскости.
3. Составьте уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M(1; 2; -1)$ к поверхности, заданной уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0.$$
4. Составьте уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M(2; 1; 4)$ к поверхности, заданной уравнением $z = 2x^2 - 4y^2$.

6.11. Физические приложения кратных интегралов

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013.— С. 285-288, 300-302.

Составьте *конспект № 11*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. По каким формулам находятся масса, координаты центра тяжести, моменты инерции относительно координатных осей плоской пластинки D , плотность которой $\rho = \rho(x, y)$?

2. Определить координаты центра тяжести квадратной пластинки $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, если плотность $\rho(x, y) = x + y$.

3. Найти момент инерции однородной пластины с $\rho_0 = 2$, ограниченной параболой $y = 9 - x^2$ и осью Ox , относительно оси Oy .

6.12. Физические приложения криволинейных интегралов

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 312-314.

Составьте конспект № 12, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Как можно определить работу при перемещении единицы массы по дуге AB в поле, образованном силой $\vec{F} = (P, Q)$?

2. Поле образовано силой $\vec{F} = (P, Q)$, где $P = x - y, Q = x$. Вычислить работу при перемещении единицы массы по контуру квадрата со сторонами $x = \pm 2, y = \pm 2$.

3. Поле образовано силой $\vec{F} = (P, Q)$, где $P = y, Q = y - x$. Вычислить работу при перемещении единицы массы по прямой AB , где $A(-3; 0), B(0; 3)$.

6.13. Комплексные числа, действия над ними

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — С. 522-524.

Составьте конспект № 13, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Как записывается комплексное число в алгебраической форме?

2. Что называют мнимой и действительной частью комплексного числа?

3. Какие числа называют чисто мнимыми?

4. Какое число называется сопряженным к данному комплексному числу?

5. Как выполняется сложение (вычитание) комплексных чисел в алгебраической форме?

6. Как выполняется умножение комплексных чисел в алгебраической форме?

7. Как выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме?

8. Выполнить действия:

1) $(1 + 2i)(2 + i)$;

2) $\frac{2 + 3i}{1 + 4i}$;

3) $z_1 z_2$, если $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$;

4) i^3 , i^4 , i^5 , i^{25} , i^{15} .

5) $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 2i$;

6) $(1 - i)^2(5 + 8i)$;

7) $\frac{1}{1 + 3i} + \frac{1}{4 - i}$.

6.14. Уравнения Бернулли

Самостоятельно изучите материал, используя информационно-справочные и поисковые системы: Математика Exponenta.ru <http://www.exponenta.ru> Компания Softline. Образовательный математический сайт. Материалы для студентов: задачи с решениями, справочник по математике, электронные консультации.

Составьте конспект № 14, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Какой вид имеют уравнения Бернулли?

2. Каков способ их решения?

3. Решите уравнения:

1) $y' + \frac{2}{x}y = x^2 y^2$

2) $y' - \frac{y}{x} = \frac{(x-1)^2}{y}$

6.15. Основные логические операции

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 466-470.

Составьте конспект № 15 ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Что называют конъюнкцией?
2. Что называют дизъюнкцией?
3. Что называют импликацией?
4. Что называют отрицанием?
5. Что называют эквивалентностью?
6. Составьте таблицу 6.3.

Таблица 6.3. Таблица истинности основных логических операций

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	\bar{A}	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$

7. Докажите с помощью таблиц истинности равносильность формул:

- 1) $A \vee (A \wedge B) = A$;
- 2) $A \wedge (A \vee B) = A$.

6.16. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 380-382.

Составьте конспект № 16, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Какой вид имеет ряд Маклорена?
2. Какой вид имеет ряд Тейлора?
3. Запишите разложение в ряд Маклорена следующих функций:
 - 1) $y = e^x$;
 - 2) $y = \sin x$;
 - 3) $y = \cos x$;
 - 4) $y = (1 + x)^m$;
 - 5) $y = \ln(1 + x)$;
 - 6) $y = \operatorname{arctg} x$.

4. С помощью выписанных формул разложите в ряд Маклорена функции:

1) $y = \ln(1 + x^2)$;

2) $y = e^{3x}$.

5. Как с помощью рядов можно вычислить приближенное значение функции?

6. Вычислите $e^{0,1}$ с точностью до 0,001.

7. Как с помощью рядов можно вычислить приближенное значение определенного интеграла?

8. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

6.17. Формула полной вероятности Формула Байеса

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 420.

Составьте *конспект № 17*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. По какой формуле можно найти вероятность события A , которое может произойти лишь вместе с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу событий?

2. Приведите примеры событий, вероятность которых вычисляется по формуле полной вероятности.

3. Какие вероятности вычисляются по формуле Байеса?

4. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров. Во второй урне 6 белых и 4 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Найдите вероятность того, что этот шар окажется белым.

5. На конвейер поступают детали, производимые тремя станками, при этом первый станок производит 50% всех деталей, второй — 30%, а третий — 20%. Если на конвейер попадает деталь с первого станка, то вероятность того, что она будет исправна, равна 0,98, второй станок выпускает детали с надежностью 0,95, а третий — с надежностью 0,8. Определите вероятность того, что если с конвейера сошел негодный узел, то деталь к нему изготовлена на первом станке.

6.18. Виды законов распределения случайных величин

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 432-437.

Составьте *конспект № 18*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Какой вид имеет плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X , распределённой равномерно?

2. Как находится математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X , распределённой равномерно?

3. Какой вид имеет плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X , имеющей показательное распределение?

4. Как находится математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X , имеющей показательное распределение?

5. В каком случае дискретная случайная величина распределена по биномиальному закону? Привести пример.

6. Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону?

7. В каком случае дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона? Привести пример.

8. Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона?

9. Геометрическое распределение дискретной случайной величины (привести пример). Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, имеющей геометрическое распределение?

10. График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X , распределённой равномерно в интервале $(-1; 3)$, имеет вид (рис. 6.1).

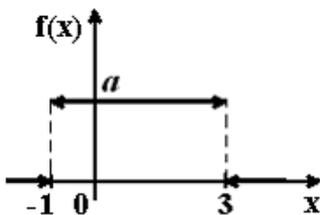


Рис. 6.1. График функции $y = f(x)$

Найдите значение a .

11. Все значения равномерно распределенной непрерывной случайной величины X принадлежат интервалу $(2; 8)$. Определить:

- вероятность попадания случайной величины X в интервал $(3; 5)$;
- математическое ожидание случайной величины X ;
- дисперсию случайной величины X .

6.19. Вариационные ряды

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 445, 446, 448-453.

Составьте *конспект № 19*, ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Что называют генеральной совокупностью?
2. Что называют выборочной совокупностью?
3. Что называют объемом выборки?
4. Что называют объемом генеральной совокупности?
5. Что называют дискретным вариационным рядом?
6. Что называют полигоном частот? Что называют полигоном относительных частот?
7. Что называют кумулятой частот? Что называют кумулятой относительных частот?
8. Что называют эмпирической функцией распределения?
9. Как вычисляется размах вариации, выборочная средняя, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение, мода, медиана.
10. Данные об оценках студентов на экзамене по математике выбрали случайным образом из ведомостей студентов второго курса и получили следующий ряд оценок:

5, 4, 3, 4, 5,
3, 4, 3, 2, 4,
3, 4, 4, 2, 5,
3, 4, 3, 4, 5,
4, 3, 5, 4, 4,
3, 3, 4, 4, 3,
4, 2, 4, 4, 5,
5, 3, 4, 5, 4,
3, 5, 4, 5, 4.

- 1) Построить полигон частот, полигон относительных частот;
- 2) Построить кумуляту частот, кумуляту относительных частот;
- 3) Найти размах вариации, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, моду, медиану.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основная литература

1. Марусич, А.И. Математика [Текст] : учебник для с.-х. вузов / А.И. Марусич. — Караваево : Костромская ГСХА, 2014. — 218 с.
2. Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / ред. Л.Н. Журбенко, Ю.М. Данилов. — М. : ИНФРА-М, 2013. — 496 с. — (Высшее образование: Бакалавриат).
3. Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — 607 с. — (Бакалавр. Базовый курс).

Дополнительная литература

4. Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Лекции и практикум [Текст] : учеб. пособие для вузов / И.М. Петрушкоит, ред. — СПб. : Лань, 2006. — 608 с. : ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. Ч. 1 [Текст] / Д.Т. Письменный. — 6-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2011. — 288 с. : ил. — (Высшее образование).
6. Привалов, И.И. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник для вузов / И.И. Привалов. — 35-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2005. — 304 с. : ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

Использованная литература

7. Высшая математика [Текст] : методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей сельскохозяйственных высших учебных заведений / Д.Т. Штейнгардт. — М. : Высш. шк., 1967. — 124 с. : ил.
8. Высшая математика [Текст] : программа, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей сельскохозяйственных высших учебных заведений / Д.Т. Штейнгардт. — 2-е изд. — М. : Высш. шк., 1979. — 128 с. : ил.
9. Комплексные числа : учебное пособие по математике для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения / сост. А.И. Марусич. — Кострома : КГСХА, 2007. — 22 с.

10. Основы высшей математики [Текст] : методические указания и контрольные задания для студентов-заочников сельскохозяйственных специальностей высших учебных заведений / Д.Т. Штейнгардт, Н.В. Крылов. — 6-е изд. — М. : Высш. шк., 1987. — 88 с. : ил.

11. Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями [Текст] : учебное пособие / А.С. Шапкин. — М. : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^о», 2005. — 432 с.

Учебно-методическое издание

Математика : учебно-методическое пособие по организации аудиторной и самостоятельной работы и выполнению расчетно-графических работ 1-4 для студентов 1 и 2-го курсов специальности 35.03.06 «Агроинженерия», профиль «Электрооборудование и электротехнологии» очной формы обучения / сост. Л.Б. Рыбина, И.А. Батманова. — Каравеево : Костромская ГСХА, 2015. — 98 с.

Гл. редактор Н.В. Киселева
Редактор выпуска Т.В. Тарбеева
Корректор Т.В. Кулинич

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Костромская государственная сельскохозяйственная академия" 156530, Костромская обл., Костромской район, пос. Каравеево, уч. городок, д. 34, КГСХА

Компьютерный набор. Подписано в печать 21/08/2015.
Заказ №609. Формат 84х60/16. Тираж 200 экз. Усл.
печ. л. 6. Бумага офсетная. Отпечатано 05/11/2015. Цена
47,00 руб.

Отпечатано с готовых оригинал-макетов в
академической типографии на цифровом дубликаторе.
Качество соответствует предоставленным оригиналам.
вид издания: первичное (редакция от 18.06.2015 № 360)

Цена 47,00 руб.



2015*609