МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра
высшей математики

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по организации самостоятельной и аудиторной работы
для обучающихся 2 курса по специальности
38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»
очной формы обучения

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2015

УДК 512(076)
ББК 22.1
М 34

Составители: сотрудники кафедры высшей математики Костромской ГСХА доцент *Л.Б. Рыбина*, ст. преподаватель *И.С. Белова,* ассистент *О.А. Фролова,*

Рецензент: доцент кафедры высшей математики Костромской ГСХА *И.А. Батманова*.

Рекомендовано к изданию методической комиссией
экономического факультета,
протокол № 5 от 1 июля 2015 года.

М 34 **Математика** : учебно-методическое пособие по организации самостоятельной и аудиторной работы для обучающихся 2 курса по специальности 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» очной формы обучения / сост. Л.Б. Рыбина, И.С. Белова, О.А. Фролова. — Караваево : Костромская ГСХА, 2015. — 61 с.

Издание содержит методические рекомендации и задания для практических работ, примеры решения типовых заданий, рекомендации по самостоятельному изучению отдельных тем и выполнению проекта, список источников.

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся 2 курса по специальности 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» очной формы обучения.

УДК 512(076)
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Обучение математике в системе среднего профессионального образования ориентировано на достижение следующих целей:

- *формирование представлений* о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- *развитие* логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- *овладение математическими знаниями и умениями*, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла;
- *воспитание* средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Материал данного пособия способствует достижению данных целей математического образования.

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся 2 курса по специальности 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)».

Издание знакомит со структурой дисциплины «Математика» и формами учебной деятельности при ее освоении. Пособие содержит материал, необходимый для подготовки к практическим занятиям, для аудиторной работы, задания и методические рекомендации для выполнения практических и самостоятельных работ, а также проекта, выполняемого в течение семестра. В пособие включен образец варианта теста для самоконтроля по итогам освоения дисциплины.

Мотивация и профильность в обучении математике играют важную роль в успешном усвоении дисциплины. В пособии учитывается профессиональная направленность курса математики. В нем содержатся задания для аудиторной и самостоятельной работы, имеющие прикладное значение. Это способствует воспитанию у обучающихся уверенности в профессиональной значимости дисциплины «Математика». Решая задачи из области экономики и финансов, студенты видят практическое применение математики в их будущей профессии.

СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА» И ФОРМЫ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

По дисциплине «Математика» предусмотрено проведение теоретических и практических занятий в объеме, соответственно, 16 и 32 ч. (табл. 1). Занятия проводятся по 2 ч.

На теоретических занятиях преподаватель знакомит обучающихся с основными понятиями методами по соответствующей теме, разбирает примеры решения задач. Студенты ведут конспект занятия. На каждом теоретическом занятии обучающиеся получают домашнее задание, предполагающее выучить основные определения, понятия, теоремы, формулы и т.д.

На практических занятиях обучающиеся формируют практические умения и навыки применения математических методов при решении задач. На занятии проверяется знание теоретического материала по теме. Поэтому при подготовке к занятию необходимо внимательно прочитать конспект по соответствующей теме, выучить основные определения, теоремы, формулы, ответить на вопросы, приведенные в пособии к данному занятию.

На занятии под руководством преподавателя Вам будет предложено выполнить ряд заданий: тренажеры с предварительным списком алгоритмов, задания на логико-дедуктивную сторону мышления (доказательства и т. п.), тесты, материалы для самоконтроля.

На каждом практическом занятии обучающиеся получают домашнее задание. Оно может включать выполнение практической работы, которая выполняется по варианту, указанному преподавателем. По ее результатам оформляется письменный отчет в тетради для практических и самостоятельных работ. В данном пособии приводятся примеры оформления отчетов.

Одной из форм домашнего задания является самостоятельное изучение отдельных тем дисциплины по указанным преподавателем источникам материала. Обучающиеся должны письменно дать ответы на вопросы по теме и решить предложенные задачи. Отчет оформляется также в тетради для практических и самостоятельных работ.

В течение семестра обучающиеся работают над проектом «Применение математики в экономике». Работа ведется в малых группах. Обучающиеся под руководством преподавателя проводят сбор и анализ материала по теме проекта. В конце семестра на занятии представляют результат своей деятельности.

На последнем занятии проводится тестирование по итогам освоения дисциплины.

Все виды деятельности обучающихся оцениваются преподавателем и в соответствии с модульно-рейтинговой системой выставляется зачет.

Таблица 1. Перечень занятий, практических и самостоятельных работ

Раздел	Тема теоретического занятия	Тема практического занятия	Тема практической работы	Тема самостоятельной работы
1	2	3	4	5
Введение. Раздел 1. Математический анализ	Введение. История и значение математики. Предел функции	Функции, их свойства	Практическая работа 1 «Вычисление пределов»	Работа над проектом «Применение математики в экономике»
		Графики функций		
		Вычисление пределов		
	Производная, дифференциал и их применение	Дифференцирование функции	Практическая работа 2 «Исследование функций и построение графиков»	
		Исследование функций и построение графиков		
		Наибольшее и наименьшее значения функции		
	Неопределенный и определенный интегралы, их применение	Нахождение неопределенных интегралов	Практическая работа 3 «Геометрические приложения определенного интеграла»	
		Вычисление определенных интегралов и их применения		
Раздел 2. Теория вероятностей и математическая статистика	Основные понятия и теоремы теории вероятностей	Вычисление вероятности события	Практическая работа 4 «Теория вероятностей»	Работа над проектом «Применение математики в экономике»
		Случайные величины и их числовые характеристики		
	Вариационные ряды и их числовые характеристики	Дискретные вариационные ряды	Практическая работа 5 «Вариационные ряды и их числовые характеристики»	
		Интервальные вариационные ряды		

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5
Раздел 3. Комплексные числа	Комплексные числа и действия с ними	Комплексные числа и действия с ними	Практическая работа 6 «Комплексные числа»	Работа над проектом «Применение математики в экономике»
Раздел 4. Линейная алгебра		Вычисление определителей. Решение систем методом Крамера	Практическая работа 7 «Определители. Решение систем линейных уравнений»	Работа над проектом «Применение математики в экономике»
Раздел 5. Дискретная математика	Дискретная математика			Самостоятельное изучение учебного материала «Основные теоретико-множественные понятия математики»
				Работа над проектом «Применение математики в экономике»
Повторение	Применение математики	Защита проектов «Применение математики в экономике»		Работа над проектом «Применение математики в экономике»
		Тестирование письменное		

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Предусмотрено проведение 32 ч практических занятий. Их целью является систематизация, расширение и совершенствование знаний основных понятий и методов по темам дисциплины, формирование и закрепление умений применять математические методы для решения задач, составлять и анализировать с помощью математики модели реальных процессов.

Одним из этапов каждого практического занятия является повторение теории. С этой целью в пособии приводятся теоретические вопросы по теме занятия. При подготовке рекомендуем с помощью ответов на них повторить основные положения теории. При этом можно использовать конспекты, составленные в ходе теоретических занятий по дисциплине, а также учебник. Необходимо выучить основные определения, формулировки теорем, формулы и т.п. Особое внимание следует обратить на разобранные примеры.

Задания, выполняемые на практических занятиях, включают в себя тренажеры, в результате выполнения которых обучающиеся овладевают алгоритмами решения различных типовых задач. Преподаватель предлагает упражнения из учебника, а также индивидуальные задания.

На занятии также выполняются задания на локальные доказательства, которые способствуют развитию логико-дедуктивной стороны мышления.

Большое внимание на практических занятиях отводится прикладным вопросам математики. Рассматриваются текстовые задачи с экономическим содержанием, сюжетные задачи, а также задания на построение математических моделей и их исследование. При выполнении такого вида заданий на занятии используется метод работы в малых группах. Для этого группа обучающихся разбивается на подгруппы. Каждая из них получает задание. В подгруппе проводится его совместное обсуждение и выполнение. Затем представитель докладывает результат. Он обсуждается слушателями. Затем подводятся итоги работы членов каждой подгруппы.

Программой дисциплины предусмотрено выполнение семи практических работ. На занятиях обучающиеся получают указания по их выполнению, разбирают типовые задачи. В учебно-методическом пособии приводятся инструкции для обучающихся к практическим работам, задания, а также примеры выполнения. Практические работы выполняются самостоятельно дома в отдельных тетрадях по варианту, указанному преподавателем.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1
«ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ»

Цель: закрепление практических умений нахождения пределов функций.

Инструкция для обучающихся по выполнению практической работы

Практическая работа выполняется по варианту, указанному преподавателем.

По результатам работы оформляется отчет, который содержит:

1. Название практической работы.
2. Задание.
3. Полное, обоснованное решение и ответ.

Решение должно быть математически грамотным, полным. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют пределом функции в точке?
2. Что называют пределом функции на бесконечности?
3. Какая величина называется бесконечно малой? Приведите пример бесконечно малой величины.
4. Какая величина называется бесконечно большой? Приведите пример бесконечно-большой величины.
5. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
6. Каким способом раскрывается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$?
7. Каким способом раскрывается неопределенность вида $\frac{0}{0}$?
8. Какой вид имеет и чему равен первый замечательный предел?
9. Какой вид имеет и чему равен первый замечательный предел?

1.1. Задания к расчетно-графической работе

Задание 1. Найдите пределы (табл. 2).

Таблица 2. Исходные данные

Номер варианта	Пределы	Номер варианта	Пределы
1	2	3	4
1	$a)\ \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3x^2-16x+16}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{4x^2+x+3}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.	2	$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-x-2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{3x^2+4x-2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$.
3	$a)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{4x^2+11x+6}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{5x^2+4x-3}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.	4	$a)\ \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+8x-3}{x^2+x-6}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-4}{3x^2+x+2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 7x}$.
5	$a)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-3x-9}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x-2}{x^3-3x-9}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5x}$.	6	$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+5}{x^2+x-6}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 3x}$.
7	$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+3x-5}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-x}{x^3+3x+4}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{9x}$.	8	$a)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-10}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2+1}{5x+2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 8x}$.
9	$a)\ \lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+3}{3x^3-2x^2+1}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{x}$.	10	$a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^3-5x^2+2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 10x}$.

1	2	3	4
11	$a)\ \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3x^2-16x+16}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{4x^2+x+3}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.	12	$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-x-2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{3x^2+4x-2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$.
13	$a)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{4x^2+11x+6}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{5x^2+4x-3}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.	14	$a)\ \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+8x-3}{x^2+x-6}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-4}{3x^2+x+2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 7x}$.
15	$a)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-3x-9}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x-2}{x^3-3x-9}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5x}$.	16	$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+5}{x^2+x-6}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 3x}$.
17	$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+3x-5}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-x}{x^3+3x+4}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{9x}$.	18	$a)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-10}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2+1}{5x+2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 8x}$.
19	$a)\ \lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+3}{3x^3-2x^2+1}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{x}$.	20	$a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^3-5x^2+2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 10x}$.

1.2. Пример выполнения практической работы 1

Задание 1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$.

Решение

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$.

Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, надо и в числителе, и в знаменателе дроби выделить множитель $(x - a)$ при $x \to a$ и сократить дробь на него.

Разложим числитель дроби на множители. Найдем корни квадратного трехчлена $2x^2+x-10$, решив для этого соответствующее квадратное уравнение:

$$2x^2+x-10=0;$$
$$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot 2\cdot(-10)=81;$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 9}{4};$$
$$x_1=-\frac{5}{2},\quad x_2=2.$$

Применим формулу разложения квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Получим

$$2x^2+x-10=2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-2)=(2x-5)(x-2).$$

Аналогично разложим знаменатель дроби на множители. Найдем корни квадратного трехчлена x^2+x-6, решив для этого соответствующее квадратное уравнение:

$$x^2+x-6=0;$$
$$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25;$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 5}{2};$$
$$x_1=-3,\qquad x_2=2.$$

Получим

$$x^2+x-6=(x+3)(x-2).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{9}{5}.$$

Ответ: $\frac{9}{5}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$.

Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наивысшей степени. Разделим числитель и знаменатель данной дроби на x^2 и применим основные теоремы о пределах и свойства бесконечно малых величин, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{10}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to 2}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}=2.$$

Ответ: 2.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на 8 и применим первый замечательный предел:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\sin 8x}{8x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}=8\cdot 1=8.$$

Ответ: 8.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2
«ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ»

Цель: закрепление практических умений применять производную для исследования функции и построения графиков, моделировать реальные ситуации с использованием методов дифференциального исчисления.

Инструкция для обучающихся
по выполнению практической работы

Практическая работа выполняется по варианту, указанному преподавателем.

По результатам работы оформляется отчет, который содержит:

1) название практической работы;
2) задание;
3) полное, обоснованное решение и ответ.

Решение должно быть математически грамотным, полным. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите пример задачи, приводящей к понятию производной.
2. Что называют производной функции?
3. В чем заключается геометрический смысл производной?
4. В чем заключается механический смысл производной?
5. В чем заключается экономический смысл производной?
6. Чему равна производная постоянной?
7. Чему равна производная суммы дифференцируемых функций?
8. Чему равна производная произведения дифференцируемых функций?
9. Чему равна производная частного двух дифференцируемых функций?
10. Чему равна производная сложной функции?
11. Чему равна производная обратной функции?
12. Чему равна производная степенной функции?
13. Чему равна производная показательной функции?
14. Чему равна производная логарифмической функции?
15. Чему равны производные тригонометрических функций?
16. Чему равны производные обратных тригонометрических функций?
17. Что понимают под производной второго порядка?
18. В чем заключается механический смысл второй производной?
19. В чем заключается геометрический смысл дифференциала?
20. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на промежутке?

21. Что называется точкой максимума (минимума) функции?
22. Что называется максимумом (минимумом) функции?
23. По какому плану исследуют функцию на монотонность и экстремумы?
24. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?
25. Какой график называется выпуклым (вогнутым) на промежутке?
26. Что называется точкой перегиба?
27. Как найти промежутки выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба.
28. Что называют асимптотой графика функции?
29. Какие есть виды асимптот?
30. Как находят вертикальные асимптоты?
31. Как находят наклонные и горизонтальные асимптоты?

2.1. Задания к расчетно-графической работе

Задание 1. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ (табл. 3) и построить ее график.

Исследование функции рекомендуется проводить по схеме:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на непрерывность;
3) исследовать функцию на четность;
4) найти интервалы возрастания (убывания) функции, точки экстремума;
5) найти интервалы выпуклости (вогнутости), точки перегиба графика функции;
6) найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно);
7) найти асимптоты графика функции;
8) по результатам исследования построить график функции.

Таблица 3. Исходные данные

Номер варианта	$y = f(x)$
1	$y=\dfrac{x^2-14}{x-4}$
2	$y=\dfrac{x^2+16}{x+3}$
3	$y=\dfrac{x^2+21}{x-2}$
4	$y=\dfrac{x^2+8}{x+1}$
5	$y=\dfrac{x^2+9}{x}$
6	$y=\dfrac{x^2-15}{x+4}$
7	$y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$
8	$y=\dfrac{x^2+5}{x+2}$
9	$y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$
10	$y=\dfrac{x^2+4}{x}$
11	$y=\dfrac{x^2+9}{x+4}$
12	$y=\dfrac{x^2-8}{x-3}$
13	$y=\dfrac{x^2-3}{x+2}$
14	$y=\dfrac{x^2}{x-1}$
15	$y=\dfrac{x^2+1}{x}$
16	$y=\dfrac{x^2+24}{x+1}$
17	$y=\dfrac{x^2-14}{x-4}$
18	$y=\dfrac{x^2+16}{x+3}$
19	$y=\dfrac{x^2+21}{x-2}$
20	$y=\dfrac{x^2+8}{x+1}$

Задание 2. Решите задачу (табл. 4).

Таблица 4. Исходные данные

Номер варианта	Задача
1	2
1	Требуется вырыть силосную яму $V = 32$ м^3 с квадратным дном таких размеров, чтобы на облицовку ее стен и дна пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?
2	Скорость роста y популяции x задана формулой $y = 0{,}001x(100 - x)$. При каком размере популяции эта скорость максимальна?
3	Найти положительное число x, чтобы разность $x - x^2$ была наибольшей
4	Площадь прямоугольного участка земли 144 м^2. При каких размерах участка длина окружающего его забора будет наименьшей?
5	Число 20 разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим
6	Проволокой длиной 20 м требуется огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?
7	Найти число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение
8	Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 м^2 и разделить, затем этот участок огородить забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?
9	Огород прямоугольной формы огорожен изгородью, длина которой 72 м. Каковы должны быть размеры огорода, чтобы его площадь была наибольшей?
10	Деталь из листового железа имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 см. Каким должно быть основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?
11	Какое положительное число, будучи сложенным с обратным ему числом, даёт наименьшую сумму?
12	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей
13	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей
14	Зависимость между урожаем озимой пшеницы y (ц/га) и нормой посева семян x (млн зерен/га) выражается формулой $y = 5{,}6 + 8{,}1x - 0{,}7x^2$. Найдите норму посева семян для того, чтобы получить максимальный урожай
15	Из прямоугольного листа жести размером 24×9 см требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

1	2
16	Зависимость суточного удоя y в литрах от возраста коров x в годах определяется уравнением $y = -9{,}53 + 6{,}86x - 0{,}49x^2$, $x > 2$. Найти возраст дойных коров, при котором суточный удой будет наибольшим
17	Площадь прямоугольного треугольника 6 см^2. Найдите наименьшее значение площади квадрата, построенного на гипотенузе треугольника
18	Длина, ширина и высота бака, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, составляют в сумме 36 см. Чему равен наибольший объем такого бака?
19	Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольший?
20	Открытый чан имеет форму цилиндра объёма $V = 27\pi$ м^3. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

2.2. Пример выполнения практической работы 2

Задание 1. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$ и построить ее график.

Исследование функции рекомендуется проводить по схеме:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на непрерывность;
3) исследовать функцию на четность;
4) найти интервалы возрастания (убывания) функции, точки экстремума;
5) найти интервалы выпуклости (вогнутости), точки перегиба графика функции;
6) найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно);
7) найти асимптоты графика функции;
8) по результатам исследования построить график функции.

Решение

1. Найдем область определения функции:

$$D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - 6(-x) + 13}{-x - 3} = \frac{x^2 + 6x + 13}{-x - 3};$$

$$y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Исследуем функцию на непрерывность: $x = 3$ — точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 3$ — точка разрыва второго рода.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y' = \frac{(2x-6)(x-3) - (x^2 - 6x + 13)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}.$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0, \text{ если } x^2 - 6x + 5 = 0, \text{ откуда } x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 5.$$

Производная не существует при $x = 3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 1).

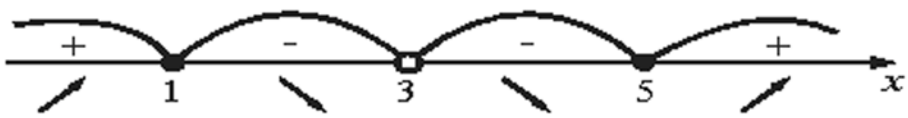


Рис. 1. Исследование на экстремум

Функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и на $(5; +\infty)$.

Функция убывает на $(1; 3)$ и на $(3; 5)$.

$x = 1$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(1) = -4,$$
$$y_{\min} = y(5) = 4.$$

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 6x + 5)'(x-3)^2 - (x^2 - 6x + 5)\left((x-3)^2\right)'}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2 - 6x + 5)2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2(x-3)\left((x-3)^2 - x^2 + 6x - 5\right)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x - 5)2(x-3)}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем вторую производную y'' к нулю и решим уравнение $\frac{8}{(x-3)^3}=0$. Оно не имеет решений.

Вторая производная не существует при $x=3$, но данная точка не является точкой перегиба, так как является точкой разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

На числовую ось нанесем область определения функции. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис. 2).

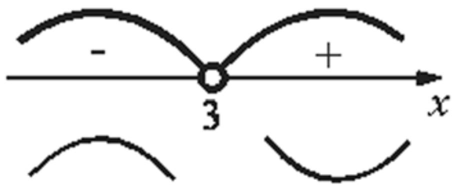


Рис. 2. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на $(-\infty;3)$ и вогнутый на $(3;+\infty)$.

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как $x=3$ — точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением $x=3$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y=kx+b$. Найдем параметры *k* и *b*:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x(x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x^2-3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{13}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-6x+13}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13-x^2+3x}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+13}{x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{13}{x}}{1-\frac{3}{x}}=-3.$$

Итак, $y=x-3$ — уравнение наклонной асимптоты.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

При $x=0$ получим $y=\frac{13}{-3}=-4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0;-4\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения с осью Oy.

При $y=0$ получим $\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}=0$, $x^2-6x+13=0$;

$$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot13=36-52=-16<0.$$

Следовательно, точек пресечения с осью Ox нет.

8. По результатам исследования строим график функции (рис. 3).

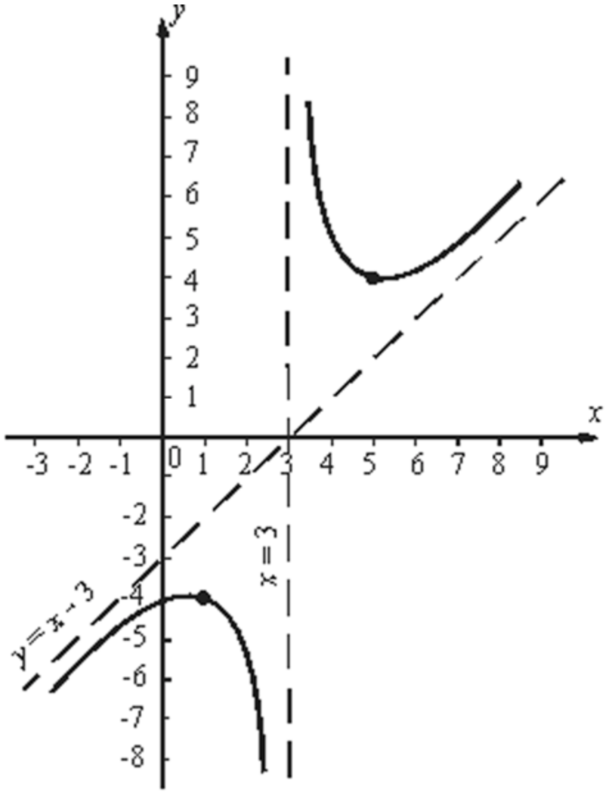


Рис. 3. График функции

Задание 2. Определить размеры силосного сооружения, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, объемом 108 м^3, чтобы суммарная площадь поверхности дна и стенок была минимальной.

Решение

Пусть x (м) — сторона основания силосного сооружения, а y (м) — его глубина. Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x,\ y)=x^2+4xy.$$

Так как объем сооружения 108 м^3 и $V=x^2y$, то $y=\dfrac{108}{x^2}$.

Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x)=x^2+4x\cdot\frac{108}{x^2}=x^2+\frac{432}{x},\ \text{где } x>0.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое значение x, при котором функция $S(x)$ принимает наименьшее значение.

Найдем производную:

$$S' = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0.$$

Решая это уравнение относительно x, получим $x = 6$.

На числовую ось нанесем область определения функции $S(x)$ и критическую точку x = 6. В полученных промежутках расставляем знак производной S' (рис. 4).

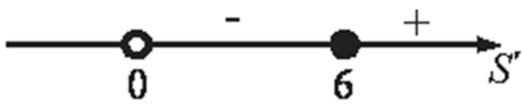


Рис. 4. Знаки производной

По достаточному условию экстремума в точке x = 6 функция $S(x)$ имеет минимум. Так как функция $S(x)$ непрерывна при $x > 0$ и имеет единственную точку экстремума x = 6 и это точка минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение, то есть $S_{наим} = S(6)$. Тогда глубина сооружения

$$y = \frac{108}{x^2} = \frac{108}{36} = 3 \text{ м}.$$

Ответ: длина основания 6 м, глубина 3 м.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3
«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА»

Цель: закрепление практических умений вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Инструкция для обучающихся
по выполнению практической работы

Практическая работа выполняется по варианту, указанному преподавателем.

По результатам работы оформляется отчет, который содержит:

1) уазвание практической работы;
2) задание;
3) полное, обоснованное решение и ответ.

Решение должно быть математически грамотным, полным. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется определенным интегралом?
2. Перечислите основные свойства определенного интеграла?
3. Какой вид имеет формула Ньютона-Лейбница?
4. Что называется криволинейной трапецией? Как вычисляется ее площадь?
5. Как вычисляется площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
6. Как вычисляется объем тела вращения с помощью определенного интеграла?

3.1. Задания к расчетно-графической работе

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями (табл. 5). Построить фигуру.

Таблица 5. Исходные данные

№ варианта	Линии
1	$y=\frac{1}{2}x^2-x+1, \quad y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$
2	$y=\frac{1}{2}x^2+x+2, \quad y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$
3	$y=\frac{1}{3}x^2-3x+2, \quad y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$
4	$y=2x^2+6x-3, \quad y=-x^2+x+5$
5	$y=3x^2-5x-1, \quad y=-x^2+2x+1$
6	$y=x^2-3x-1, \quad y=-x^2-2x+5$
7	$y=2x^2-6x+1, \quad y=-x^2+x-1$
8	$y=\frac{1}{3}x^2-2x-4, \quad y=-\frac{2}{3}x^2-x-2$
9	$y=x^2-5x-3, \quad y=-3x^2+2x-1$
10	$y=x^2-2x-5, \quad y=-x^2-x+1$
11	$y=\frac{1}{4}x^2-2x-5, \quad y=-\frac{3}{4}x^2-x+1$
12	$y=\frac{1}{2}x^2+3x-2, \quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$
13	$y=2x^2-6x-2, \quad y=-x^2+x-4$
14	$y=2x^2+3x+1, \quad y=-x^2-2x+9$
15	$y=x^2-2x-4, \quad y=-x^2-x+2$
16	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-2, \quad y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3$
17	$y=2x^2+4x-7, \quad y=-x^2-x+1$
18	$y=-3x^2+2x-1, \quad y=x^2-5x-3$
19	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-1, \quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$
20	$y=2x^2+4x-7, \quad y=-x^2-x+1$

3.2. Пример выполнения практической работы 3

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 - x - 2$ и $y = -x^2 + x - 1$. Построить фигуру.

Решение

Построим линии, ограничивающие фигуру.

Уравнение $y = 2x^2 - x - 2$ задает параболу, ветви которой идут вверх. Найдем абсциссу ее вершины по формуле

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Получим

$$x_0 = -\frac{-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

Найдем ординату вершины параболы:

$$y_0 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = -2\frac{1}{8}.$$

Итак, $\left(\frac{1}{4}; -2\frac{1}{8}\right)$ — вершина параболы $y = 2x^2 - x - 2$.

Уравнение $y = -x^2 + x - 1$ задает параболу, ветви которой идут вниз. Аналогично найдем координаты ее вершины:

$$x_0 = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2},$$

$$y_0 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

Итак, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ — вершина параболы $y = -x^2 + x - 1$.

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1.$$

Решим полученное квадратное уравнение.

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1,\ x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом, получим фигуру, ограниченную данными линиями (рис. 5).

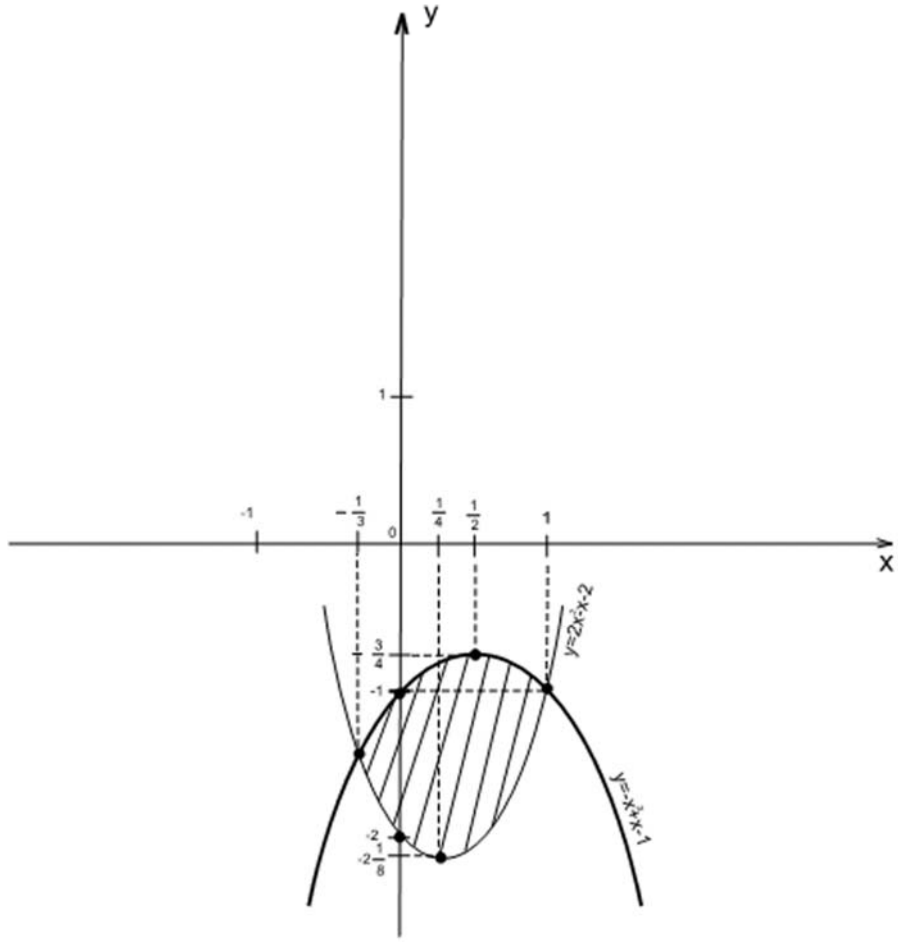


Рис. 5. Фигура

Вычисление площади осуществляем по формуле

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx,$$

где $y = f(x),\ y = g(x)$ — кривые, ограничивающие фигуру $\left(f(x) \geq g(x) \right)$.

Тогда

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(\left(-x^2 + x - 1 \right) - \left(2x^2 - x - 2 \right) \right) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-3x^2 + 2x + 1 \right) dx =$$

$$= \left(-3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \left(-x^3 + x^2 + x \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$= (-1 + 1 + 1) - \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \right) = \frac{32}{27} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\frac{32}{27}$ (кв. ед.).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Цель: закрепление умения строить и исследовать простейшие математические модели реальных ситуаций с использованием вероятностных методов.

Инструкция для обучающихся по выполнению практической работы

Практическая работа выполняется по варианту, указанному преподавателем.

По результатам работы оформляется отчет, который содержит:

1) название практической работы;
2) задание;
3) полное, обоснованное решение и ответ.

Решение должно быть математически грамотным, полным. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют опытом или испытанием?
2. Что называют событием, случайным, достоверным и невозможным событиями? Приведите примеры.
3. Сформулируйте классическое определение вероятности события.
4. Какие события называют совместными, а какие несовместными? Приведите примеры.
5. Какое событие называют противоположным к данному? Приведите пример.
6. Какие события называют независимыми, а какие зависимыми?
7. Что называют полной группой событий?
8. Что называют суммой двух событий?
9. Что называют произведением двух событий?
10. Сформулируйте теорему о вероятности произведения для независимых событий.
11. Сформулируйте теорему о вероятности произведения для зависимых событий.
12. Сформулируйте теорему о вероятности суммы для несовместных событий.
13. Сформулируйте теорему о вероятности суммы для совместных событий.
14. Как находится вероятность противоположного события?

15. Какой вид имеет формула полной вероятности? Когда она применяется?
16. Какой вид имеет формула Байеса? Когда она применяется?
17. Какие испытания называют повторными, независимыми?
18. Какой вид имеет формула Бернулли? Когда она применяется?
19. Что называется дискретной случайной величиной?
20. Что называется непрерывной случайной величиной?
21. Что такое закон распределения дискретной случайной величины?
22. Как можно задать непрерывную случайную величину?
23. Как вычисляется математическое ожидание дискретной и непрерывной случайных величин? Что оно характеризует?
24. Как вычисляется дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной и непрерывной случайных величин? Что характеризует среднее квадратическое отклонение?

4.1. Задания к расчетно-графической работе

Задание 1. В бригаде n рабочих, из которых k специалистов высшей квалификации. Случайным образом из этой бригады выбрали m рабочих (табл. 6). Найдите вероятность того, что среди них p специалистов высшей квалификации.

Таблица 6. Исходные данные

Номер варианта	n	k	m	p
1	14	10	9	7
2	13	5	5	3
3	12	7	6	5
4	11	6	7	4
5	10	4	5	2
6	15	8	9	6
7	16	9	12	7
8	11	5	8	3
9	13	7	6	5
10	10	6	8	4
11	12	4	9	2
12	14	8	10	6
13	11	7	9	5
14	10	7	7	4
15	15	5	8	3
16	16	6	13	4
17	11	8	6	5
18	13	6	8	3
19	10	8	6	5
20	12	8	7	3

Задание 2. В первом ящике n деталей, из них p бракованных, а во втором ящике m деталей, из которых q бракованные (табл. 7). Из каждого ящика взяли по одной детали. Найти вероятность того, что:

1) обе детали бракованные;

2) только одна бракованная.

Таблица 7. Исходные данные

Номер варианта	n	p	m	q
1	23	4	19	6
2	13	2	17	4
3	21	5	15	7
4	18	3	16	6
5	14	2	22	4
6	26	6	24	5
7	12	4	27	3
8	28	7	29	5
9	31	6	20	7
10	25	4	30	3
11	19	3	23	11
12	17	5	13	3
13	15	2	21	5
14	16	3	18	7
15	22	4	14	3
16	24	3	26	11
17	27	5	12	4
18	29	7	28	2
19	20	3	31	5
20	30	11	25	3

Задание 3. Вероятность рождения бычка при отеле коровы 0,5. Найти вероятность того, что от n коров будет ровно p бычков (табл. 8).

Таблица 8. Исходные данные

Номер варианта	n	p
1	4	3
2	5	2
3	6	2
4	7	2
5	8	3
6	9	4
7	4	2
8	5	3
9	6	3
10	7	3
11	8	5
12	9	5
13	4	2
14	5	4
15	6	4
16	7	4
17	8	6
18	9	6
19	6	5
20	7	5

Задание 4. Задан закон распределения дискретной случайной величины в виде таблицы; в первой строке таблицы 9 указаны возможные значения случайной величины, во второй — соответствующие вероятности. Вычислить:

1) математическое ожидание;
2) дисперсию;
3) среднее квадратическое отклонение.

Таблица 9. Исходные данные

Номер варианта	Закон распределения			
1	*X*	–3	1	2
	p	0,1	0,6	0,3
2	*X*	1	3	4
	p	0,1	0,5	0,4
3	*X*	–1	0	3
	p	0,3	0,2	0,5
4	*X*	–1	2	4
	p	0,2	0,4	0,4
5	*X*	–3	–1	0
	p	0,3	0,4	0,3
6	*X*	–2	1	2
	p	0,1	0,4	0,5
7	*X*	–4	–1	0
	p	0,3	0,4	0,3
8	*X*	15	13	10
	p	0,1	0,3	0,6
9	*X*	8	5	3
	p	0,2	0,4	0,4
10	*X*	–5	–1	3
	p	0,5	0,3	0,2
11	*X*	–7	–5	–1
	p	0,5	0,3	0,2
12	*X*	–12	–10	–6
	p	0,5	0,2	0,3
13	*X*	3	5	8
	p	0,4	0,5	0,1
14	*X*	1	4	8
	p	0,5	0,3	0,2
15	*X*	–4	0	5
	p	0,2	0,4	0,4
16	*X*	–5	–1	3
	p	0,5	0,3	0,2
17	*X*	–7	–5	–1
	p	0,3	0,5	0,2
18	*X*	–1	2	4
	p	0,4	0,2	0,4
19	*X*	1	3	4
	p	0,3	0,1	0,6
20	*X*	–12	–10	–6
	p	0,2	0,1	0,7

4.2. Пример выполнения практической работы 4

Задание 1. В бригаде 15 рабочих, из которых 12 специалистов высшей квалификации. Случайным образом из этой бригады выбрали 5 рабочих. Найдите вероятность того, что среди них 3 специалиста высшей квалификации.

Решение

Пусть событие A ={Среди отобранных 5 рабочих 3 специалиста высшей квалификации}.

Запишем условие в виде схемы:

$$\begin{array}{ccccc} 15\text{ р.} & — & 12\text{ спец.} & — & 3\text{ ост.} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5\text{ р.} & — & 3\text{ спец.} & — & 2\text{ ост.} \end{array}$$

(В первой строке указано то, что дано, во второй — то, что хотим получить).

Так как порядок выбора рабочих не имеет значения, то общее число исходов испытаний будет равно числу сочетаний из 15 элементов по 5 элементов, т.е.

$$n = C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} = 1\cdot13\cdot7\cdot3.$$

При вычислении числа исходов, благоприятствующих событию A, также используем формулу числа сочетаний и правило умножения:

$$m = C_{12}^{3}C_{3}^{2} = \frac{12!}{3!9!}\cdot\frac{3!}{2!1!} = \frac{1\cdot\ldots\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot\ldots\cdot9}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2} = 10\cdot11\cdot2\cdot3.$$

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10\cdot11\cdot2\cdot3}{11\cdot13\cdot7\cdot3} = \frac{20}{91}.$$

Ответ: $\frac{20}{91}$.

Задание 2. В первом ящике 10 деталей, из них 2 бракованных, а во втором ящике 14 деталей, из которых 3 бракованные. Из каждого ящика взяли по одной детали. Найти вероятность того, что:

1) обе детали бракованные;

2) только одна бракованная.

Решение

1. Обозначим события:

$Б_1$ — {Деталь из первого ящика бракованная};

$Б_2$ — {Деталь из второго ящика бракованная};

$\overline{Б_1}$ — {Деталь из первого ящика не бракованная};

$\overline{Б_1}$ — {Деталь из второго ящика не бракованная}.

По классическому определению вероятности события:

$$P(Б_1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},$$

$$P(Б_2)=\frac{3}{14}.$$

Найдем вероятности противоположных событий:

$$P(\overline{Б_1})=1-P(Б_1)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5},$$

$$P(\overline{Б_2})=1-P(Б_2)=1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14}.$$

Пусть событие A = {Обе детали бракованные}.

$$A=Б_1\cdot Б_2.$$

Тогда по теореме о вероятности произведения независимых событий:

$$P(A)=P(Б_1Б_2)=P(Б_1)P(Б_2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{14}=\frac{3}{70}.$$

2. Пусть событие B = {Только одна деталь бракованная}.

$$B=Б_1\overline{Б_2}+\overline{Б_1}Б_2.$$

Тогда по теоремам о вероятности суммы несовместных событий и вероятности произведения независимых событий:

$$P(B)=P\left(Б_1\overline{Б_2}+\overline{Б_1}Б_2\right)=P\left(Б_1\overline{Б_2}\right)+P\left(\overline{Б_1}Б_2\right)=$$

$$=P(Б_1)P\left(\overline{Б_2}\right)+P\left(\overline{Б_1}\right)P(Б_2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{11}{14}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{14}=\frac{11}{70}+\frac{12}{70}=\frac{23}{70}.$$

Ответ: 1) $\frac{3}{70}$; 2) $\frac{23}{70}$.

Задание 3. Вероятность рождения бычка при отеле коровы 0,5. Найти вероятность того, что от 9 коров будет ровно 3 бычка.

Решение

Вероятность того, что событие A в n повторных независимых испытаниях произойдет ровно k раз, находится по *формуле Бернулли:*

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где n — число повторных независимых испытаний;

p — вероятность наступления события A в каждом испытании;

q — вероятность непоявления события A в каждом испытании ($q = 1 - p$);

k — число наступлений события A,

C_n^k — число сочетаний из n по k элементов:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Обозначим событие: A — {Родился бычок от отдельной коровы}.

По условию: $n = 9$; $p = 0{,}5$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Найдем вероятность того, что событие А произойдет ровно три раза, т.е. $k = 3$.

По формуле Бернулли:

$$P_9(3) = C_9^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^{9-3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^6 =$$

$$= \frac{9!}{3!6!} \cdot 0{,}5^9 = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 6!} \cdot 0{,}5^9 =$$

$$= 7 \cdot 12 \cdot 0{,}5^9 = \frac{7 \cdot 12}{2^9} = \frac{7 \cdot 3}{2^7} = \frac{21}{128}.$$

Ответ: $\frac{21}{128}$.

Задание 5. Задан закон распределения дискретной случайной величины в виде таблицы; в первой строке таблицы указаны возможные значения случайной величины, во второй — соответствующие вероятности.

X	–2	1	3
p	0,1	0,6	0,3

Вычислить:

1) математическое ожидание;
2) дисперсию;
3) среднее квадратическое отклонение.

Решение

1. Математическое ожидание случайной величины X найдем по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Получим

$$M(X) = (-2) \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}3 = -0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}9 = 1{,}3.$$

2. Дисперсию случайной величины X найдем по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

Получим

$$D(X) = (-2)^2 \cdot 0{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}6 + 3^2 \cdot 0{,}3 - (1{,}3)^2 = 0{,}4 + 0{,}6 + 2{,}7 - 1{,}69 = 2{,}01.$$

3. Среднее квадратическое отклонение случайной величины X найдем по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Получим $\sigma(X) = \sqrt{2,01} \approx 1,42$.

Ответ: 1) 1,3; 2) 2,01; 3) 1,42.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5
«ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ»

Цель: закрепление практических умений составлять и исследовать математические модели реальных ситуаций с использованием статистических методов.

Инструкция для обучающихся по выполнению практической работы

Практическая работа выполняется по варианту, указанному преподавателем.

По результатам работы оформляется отчет, который содержит:

1) название практической работы;
2) задание;
3) полное, обоснованное решение и ответ.

Решение должно быть математически грамотным, полным. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют генеральной совокупностью?
2. Что называют объемом генеральной совокупности?
3. Что называют выборочной совокупностью (выборкой)?
4. Что называют объемом генеральной совокупности (выборки)?
5. Какая выборка называется репрезентативной (представительной)?
6. Какая выборка называется повторной, а какая бесповторной?
7. Что называют вариантами?
8. Что называют дискретным вариационным рядом?
9. Что называют частотой варианты?
10. Что называют относительной частотой варианты?
11. Что называют полигоном частот?
12. Что называют полигоном относительных частот?
13. Что называют интервальным вариационным рядом?
14. Что называют частотой i-го интервала?
15. Что называют относительной частотой i-го интервала?
16. Что называют гистограммой частот?
17. Чему равна площадь гистограммы частот?
18. Что называют гистограммой относительных частот?
19. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
20. Как вычисляется размах вариации для дискретного и интервального вариационных рядов?
21. Как вычисляется выборочная средняя для дискретного и интервального вариационных рядов?

22. Что характеризует выборочная средняя?
23. Как вычисляется выборочная дисперсия для дискретного и интервального вариационных рядов?
24. Что характеризует выборочная дисперсия?
25. Как вычисляется выборочное среднее квадратическое отклонение?
26. Что характеризует выборочное среднее квадратическое отклонение?
27. Как вычисляется коэффициент вариации? Что он характеризует?
28. Что называют модой вариационного ряда?
29. Что называют медианой вариационного ряда?

Задание 1. Заданы результаты обследования. Требуется:
1) построить вариационный ряд и гистограмму плотности относительных частот;
2) вычислить выборочную среднюю $\bar{x}$, дисперсию s^2, среднее квадратическое отклонение s, коэффициент вариации V, ошибку средней $s_{\bar{x}}$.

5.1. Задания к расчетно-графической работе

Варианты 1-5. Обследовано по весу 20 г плодов. Результаты обследования представлены в таблице 10.

Таблица 10. Исходные данные

Номер наблюдения	Номер варианта				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	3,1	5,5	3,2	3,8	5,2
2	4,2	5,9	3,8	4,3	6,4
3	5,0	7,5	4,1	4,3	6,7
4	4,6	5,4	4,3	5,1	5,8
5	6,4	3,4	4,3	5,7	5,4
6	5,3	5,2	5,6	6,3	4,7
7	3,8	4,3	6,0	4,8	3,3
8	5,1	4,7	5,7	5,6	5,1
9	4,9	5,8	4,5	6,4	4,6
10	5,4	6,8	5,0	7,2	5,8
11	5,9	4,0	6,7	5,0	6,0
12	6,5	5,7	5,3	5,3	7,1
13	5,5	4,5	5,4	5,1	5,2
14	5,7	5,3	4,7	4,2	5,5
15	4,7	6,3	4,3	3,7	4,7
16	5,6	5,2	5,9	6,0	4,8
17	5,8	4,1	6,5	4,5	5,4
18	7,3	5,1	7,1	4,7	4,9
19	4,7	5,0	3,4	5,7	3,8
20	5,5	6,2	4,6	5,2	5,5

Варианты 6-10. Обследовано 20 растений. Длина их стеблей, см, представлена в таблице 11.

Таблица 11. Исходные данные для решения задачи

Номер наблюдения	Номер варианта				
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
1	27	43	36	39	36
2	32	26	26	32	32
3	31	35	27	27	36
4	32	45	35	36	37
5	28	26	37	32	33
6	37	35	28	34	28
7	35	32	31	26	31
8	26	32	27	23	36
9	28	35	37	28	33
10	32	35	39	36	26
11	39	28	30	36	35
12	34	32	30	28	45
13	30	36	36	31	26
14	37	32	38	30	35
15	26	36	24	32	32
16	27	37	32	24	32
17	40	33	30	38	35
18	35	28	31	36	35
19	37	31	28	30	28
20	28	32	36	30	32

Варианты 11-15. Обследовано по весу 20 кг кроликов. Результаты обследования представлены в таблице 12.

Таблица 12. Исходные данные

Номер наблюдения	Номер варианта				
	11	**12**	**13**	**14**	**15**
1	2	3	4	5	6
1	3,1	5,5	3,2	3,8	5,2
2	4,2	5,9	3,8	4,3	6,4
3	5,0	7,5	4,1	4,3	6,7
4	4,6	5,4	4,3	5,1	5,8
5	6,4	3,4	4,3	5,7	5,4
6	5,3	5,2	5,6	6,3	4,7
7	3,8	4,3	6,0	4,8	3,3
8	5,1	4,7	5,7	5,6	5,1
9	4,9	5,8	4,5	6,4	4,6
10	5,4	6,8	5,0	7,2	5,8
11	5,9	4,0	6,7	5,0	6,0

Продолжение таблицы 12

1	2	3	4	5	6
12	6,5	5,7	5,3	5,3	7,1
13	5,5	4,5	5,4	5,1	5,2
14	5,7	5,3	4,7	4,2	5,5
15	4,7	6,3	4,3	3,7	4,7
16	5,6	5,2	5,9	6,0	4,8
17	5,8	4,1	6,5	4,5	5,4
18	7,3	5,1	7,1	4,7	4,9
19	4,7	5,0	3,4	5,7	3,8
20	5,5	6,2	4,6	5,2	5,5

Варианты 16-20. Обследовано 20 телят холмогорских помесей. Их живая масса при рождении, кг, представлена в таблице 13.

Таблица 13. Исходные данные

Номер наблюдения	Номер варианта				
	16	**17**	**18**	**19**	**20**
1	27	43	36	39	36
2	32	26	26	32	32
3	31	35	27	27	36
4	32	45	35	36	37
5	28	26	37	32	33
6	37	35	28	34	28
7	35	32	31	26	31
8	26	32	27	23	36
9	28	35	37	28	33
10	32	35	39	36	26
11	39	28	30	36	35
12	34	32	30	28	45
13	30	36	36	31	26
14	37	32	38	30	35
15	26	36	24	32	32
16	27	37	32	24	32
17	40	33	30	38	35
18	35	28	31	36	35
19	37	31	28	30	28
20	28	32	36	30	32

5.2. Пример выполнения практической работы № 5

Задание 1. Из крупной партии растений произведена случайная выборка, получено 20 вариант длины стебля (в см):

35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3.

Требуется:

1) построить вариационный ряд и гистограмму плотности относительных частот;
2) вычислить выборочную среднюю $\bar{x}$, дисперсию s^2, среднее квадратическое отклонение s, коэффициент вариации V, ошибку средней $s_{\bar{x}}$;

Решение

1. Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания:

25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Максимальное значение признака составляет 46,3 см, а минимальное — 25,9 см. Разница между ними равна 20,3 см. Этот интервал надо разбить на определенное количество классов. При малом объеме выборки (20-40 вариант) намечают 5-6 классов. Возьмем длину классового интервала $\Delta x_i = 5$. Получаем пять интервалов: первый 25-30, второй 30-35, третий 35-40, четвертый 40-45, пятый 45-50 (начало первого интервала не обязательно должно совпадать со значением минимальной варианты).

С помощью ранжированного ряда определяем частоту попадания вариант выборки в каждый интервал. В первый интервал попадает два значения (25,9 и 27,0), поэтому n_1 = 2. Во второй интервал попадают пять значений, поэтому n_2 = 5. Аналогично находим n_3 = 9, n_4 = 3, n_5 = 1.

Определяем относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал:

в первый интервал — $w_1 = \dfrac{n_1}{n} = \dfrac{2}{20} = 0{,}1$;

во второй интервал — $w_1 = \dfrac{n_2}{n} = \dfrac{5}{20} = 0{,}25$;

в третий интервал — $w_3 = \dfrac{n_3}{n} = \dfrac{9}{20} = 0{,}45$;

в четвертый интервал — $w_4 = \dfrac{n_4}{n} = \dfrac{3}{20} = 0{,}15$;

в пятый интервал — $w_5 = \dfrac{n_5}{n} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$.

Сумма $\sum w_i = 1$, следовательно, вычисления выполнены верно.

Определим плотность относительных частот вариант как отношение относительной частоты w_i к длине интервала Δx_i, то есть

$$p_i = \frac{w_i}{\Delta x_i}:$$

для первого интервала — $p_1 = \frac{w_1}{\Delta x_1} = \frac{0{,}1}{5} = 0{,}02$;

для второго интервала — $p_2 = \frac{w_2}{\Delta x_2} = \frac{0{,}25}{5} = 0{,}05$;

для третьего интервала — $p_3 = \frac{w_3}{\Delta x_3} = \frac{0{,}45}{5} = 0{,}09$;

для четвертого интервала — $p_4 = \frac{w_4}{\Delta x_4} = \frac{0{,}15}{5} = 0{,}03$;

для пятого интервала — $p_5 = \frac{w_5}{\Delta x_5} = \frac{0{,}05}{5} = 0{,}01$.

Результаты выполнения расчетов сводим в таблицу 14.

Таблица 14. Интервальный ряд

Интервал значений длины стебля Δx_i	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	
Частоты вариант n_i	2	5	9	3	1	$\sum n_i = 20$
Относительные частоты w_i	0,10	0,25	0,45	0,15	0,05	$\sum w_i = 1{,}00$
Плотность относительных частот p_i	0,02	0,05	0,09	0,03	0,01	

Построим гистограмму, показывающую зависимость плотности относительных частот от значения вариант. По горизонтальной оси наносим шкалу возможных значений вариант, по вертикальной оси — плотность относительных частот; величину относительной плотности считаем постоянной внутри соответствующего интервала. Получаем столбчатую диаграмму, называемую гистограммой плотности относительных частот (рис. 7).

2. Основные выборочные характеристики вычисляются по формулам:

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ — выборочная средняя;

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ — дисперсия;

$s = \sqrt{s^2}$ — среднее квадратическое отклонение;

$s_{\bar{x}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ — ошибка средней;

$V = \dfrac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$ — коэффициент вариации.

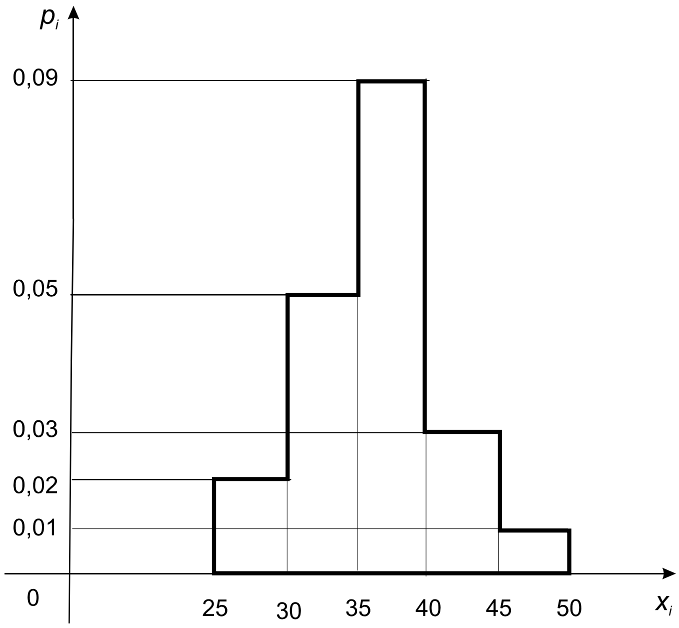


Рис. 7. Гистограмма плотности относительных частот

Расчеты $\bar{x}$ и s^2 удобно проводить с помощью таблицы 15.

Таблица 15. Расчетная таблица выборочных характеристик

Номер наблюдения	Результат обследования x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	*2*	*3*	*4*
1	35,9	–0,1	0,01
2	35,3	–0,7	0,49
3	42,7	6,7	44,89
4	45,2	9,2	84,64
5	25,9	–10,1	102,01
6	35,3	–0,7	0,49
7	33,4	–2,6	6,76
8	27,0	–9,0	81,00
9	35,9	–0,1	0,01
10	38,8	2,8	7,84
11	33,7	–2,3	5,29
12	38,6	2,6	6,76
13	40,9	4,9	24,01
14	35,5	–0,5	0,25

Продолжение таблицы 15

1	*2*	*3*	*4*
15	44,1	8,1	65,61
16	37,4	1,4	1,96
17	34,2	–1,8	3,24
18	30,8	–5,2	27,04
19	38,4	2,4	5,76
20	31,3	–4,7	22,09
$\sum$	720,3	0	490,15

Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot 720{,}3 \approx 36{,}02.$$

Вычислим дисперсию:

$$s^2 = \frac{1}{20-1} \cdot 490{,}15 \approx 25{,}80.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{25{,}80} \approx 5{,}08.$$

Вычислим ошибку средней:

$$s_{\bar{x}} = \frac{5{,}08}{\sqrt{20}} \approx 1{,}14.$$

Найдем коэффициент вариации:

$$V = \frac{5{,}08}{36{,}02} \cdot 100\% \approx 14{,}10\%.$$

Так как $10\% < V < 20\%$, то изменчивость длины стебля следует считать средней.

Ответ: $\bar{x} \approx 36{,}02$, $s^2 \approx 25{,}80$, $s \approx 5{,}08$, $s_{\bar{x}} \approx 1{,}14$, $V \approx 14{,}10\%$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА6 «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

Цель: закрепление умения выполнять действия с комплексными числами.

Инструкция для обучающихся по выполнению практической работы

Практическая работа выполняется по варианту, указанному преподавателем.

По результатам работы оформляется отчет, который содержит:

1) название практической работы;
2) задание;
3) полное, обоснованное решение и ответ.

Решение должно быть математически грамотным, полным. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют комплексным числом?
2. Что называют действительной частью комплексного числа?
3. Что называют мнимой частью комплексного числа?
4. Какие числа называют чисто мнимыми?
5. Какие числа называют комплексно-сопряженными?
6. Какие комплексные числа называют равными?
7. Как изображаются комплексные числа?
8. Что называют модулем комплексного числа?
9. Как найти модуль комплексного числа, заданного в алгебраической форме?
10. Что называют аргументом комплексного числа?
11. Как найти аргумент комплексного числа, заданного в алгебраической форме?
12. Как выглядит тригонометрическая форма комплексного числа?
13. Как выполняются арифметические действия с комплексными числами в алгебраической форме?
14. Как выполняется умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме?

6.1. Задания к практической работе

Задание 1. Даны комплексные числа $\alpha_1,\ \alpha_2, \beta, \gamma, \delta$ (табл. 16). Требуется:

1) построить на комплексной плоскости числа α_1, α_2, $\overline{a_2}$;

2) найти действительную и мнимую части числа

$$c = \alpha_1 + \alpha_2 - 3\beta + 2\gamma;$$

3) найти $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$;

4) записать в тригонометрической форме число δ.

Таблица 16. Исходные данные

Номер варианта	α_1	α_2	β	γ	δ
1	$3+2i$	$4-5i$	3	$-8i$	$\sqrt{3}+i$
2	$4+5i$	$2-3i$	–2	$8i$	$-\sqrt{3}+i$
3	$3-2i$	$2+5i$	3	$-27i$	$\sqrt{3}-i$
4	$2+3i$	$4-3i$	–4	$27i$	$2\sqrt{3}+2i$
5	$4+5i$	$1-3i$	2	$-64i$	$-2\sqrt{3}+2i$
6	$2-5i$	$3+2i$	–3	$64i$	$-2\sqrt{3}-2i$
7	$5+2i$	$1+3i$	–4	$8i$	$-\sqrt{3}-i$
8	$3-4i$	$2+3i$	–1	$8i$	$2\sqrt{3}-2i$
9	$1+5i$	$3-2i$	3	$-27i$	$\sqrt{3}-i$
10	$2-3i$	$1+2i$	–2	$27i$	$\sqrt{3}+i$
11	$3+2i$	$3+2i$	–3	$-8i$	$-2\sqrt{3}-2i$
12	$1+3i$	$4+5i$	–4	$8i$	$-\sqrt{3}-i$
13	$2+3i$	$3-2i$	–1	$-27i$	$2\sqrt{3}-2i$
14	$3-2i$	$2+3i$	3	$27i$	$\sqrt{3}-i$
15	$1+2i$	$4+5i$	–2	$-64i$	$\sqrt{3}+i$
16	$4-5i$	$2-5i$	3	$64i$	$\sqrt{3}+i$
17	$2-3i$	$5+2i$	–2	$8i$	$-\sqrt{3}+i$
18	$2+5i$	$3-4i$	3	$8i$	$\sqrt{3}-i$
19	$4-3i$	$1+5i$	–4	$-27i$	$2\sqrt{3}+2i$
20	$1-3i$	$2-3i$	2	$27i$	$-2\sqrt{3}+2i$

6.2. Пример выполнения практической работы 6

Задание 1. Даны комплексные числа

$$\alpha_1 = 3 - 2i,\ \alpha_2 = 2 - 5i,\ \beta = 3,\ \gamma = -2i,\ \delta = \sqrt{2} + i\,.$$

Требуется:

1) построить на комплексной плоскости числа α_1, α_2, $\overline{\alpha_2}$;

2) найти действительную и мнимую части числа

$$c = \alpha_1 + \alpha_2 - 3\beta + 2\gamma\,;$$

3) найти $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$;

4) записать в тригонометрической форме число δ.

Решение

1. Построим на комплексной плоскости числа $\alpha_1 = 3 - 2i$, $\alpha_2 = 2 - 5i$, $\overline{\alpha_2} = 2 + 5i$, где $\overline{\alpha_2}$ — комплексное число, сопряженное к α_2.

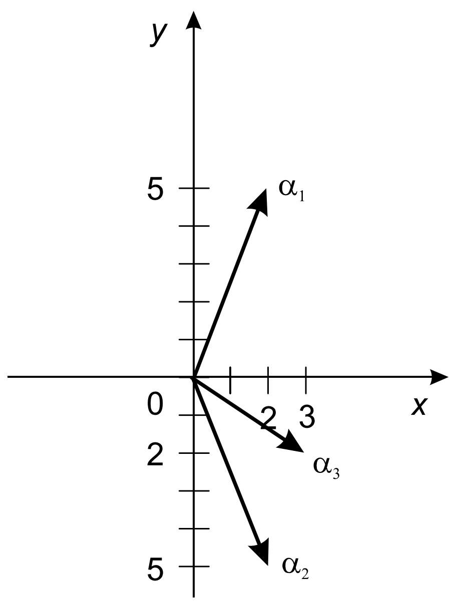


Рис. 8. Изображение комплексных чисел

2. Найдем комплексное число c:

$$c = \alpha_1 + \alpha_2 - 3\beta + 2\gamma = 3 - 2i + 2 - 5i - 3 \cdot 3 + 2 \cdot \left(-2i\right) = -4 - 11i\,.$$

Тогда $\operatorname{Re} c = -4$ — действительная часть комплексного числа c, $\operatorname{Im} c = -11$ — его мнимая часть.

3. Выполним действия с комплексными числами:

$$\alpha_1\alpha_2 = \left(3 - 2i\right)\left(2 - 5i\right) = 3 \cdot 2 + 3\left(-5i\right) - 2i \cdot 2 - 2i\left(-5i\right) =$$

$$= 6 - 15i - 4i + 10i^2 = 6 - 19i - 10 = -4 - 19i\,.$$

Чтобы выполнить деление комплексных чисел в алгебраической форме, умножаем числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{3-2i}{2-5i}=\frac{(3-2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=\frac{3\cdot 2+3\cdot 5i-2i\cdot 2-2i\cdot 5i}{2^2-(5i)^2}=$$

$$=\frac{6+15i-4i-10i^2}{4-25i^2}=\frac{6+11i+10}{4+25}=\frac{16+11i}{29}=\frac{16}{29}+\frac{11}{29}i$$

4. Тригонометрическая форма комплексного числа $z=x+iy$ имеет вид:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где r — модуль комплексного числа z, который вычисляется по формуле

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$

φ — аргумент комплексного числа z, который вычисляется по формуле

$$\varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если точка, изображающая число } z\text{, лежит в I или IV четверти,}\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{если точка, изображающая число } z\text{, лежит во II четверти,}\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{если точка, изображающая число } z\text{, лежит во II четверти.}\end{cases}$$

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $\delta=\sqrt{2}+i$:

$$r=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3},$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $\delta=\sqrt{2}+i$ имеет вид:

$$\delta=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ:

1) $\operatorname{Re}c=-4$, $\operatorname{Im}c=-11$;

2) $\alpha_1\alpha_2=-4-19i$, $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\dfrac{16}{29}+\dfrac{11}{29}i$;

3) $\delta=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7
«ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Цель: закрепление умения вычислять определители и решать системы линейных уравнений, составлять и исследовать математические модели реальных ситуаций с использованием алгебраических методов.

Инструкция для обучающихся
по выполнению практической работы

Практическая работа выполняется по варианту, указанному преподавателем.

По результатам работы оформляется отчет, который содержит:

1) название практической работы;
2) задание;
3) полное, обоснованное решение и ответ.

Решение должно быть математически грамотным, полным. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют определителем первого порядка?
2. Что называют определителем второго порядка?
3. Сформулируйте основные свойства определителей.
4. Какие вы знаете способы решения систем линейных уравнений?
5. В чем состоит метод Крамера решения систем линейных уравнений?

7.1. Задания к практической работе

Задание 1. Предприятие специализируется по выпуску изделий двух видов: I_1 и I_2; при этом используется сырье двух типов: S_1 и S_2. Норма расхода каждого из них на изготовление одного изделия каждого вида и объем расхода сырья за один день заданы в таблице 17. Найти ежедневный объем выпуска каждого вида изделий. Составленную систему решить по формулам Крамера. Сделать проверку.

Таблица 17. Исходные данные

Вариант	Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление одного изделия, усл. ед.		Расход сырья за один день, усл. ед.
		I_1	I_2	
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	S_1	6	4	214
	S_2	3	11	278
2	S_1	5	9	538
	S_2	7	4	435

Продолжение таблицы 17

1	*2*	*3*	*4*	*5*
3	S_1	6	7	535
	S_2	12	3	760
4	S_1	4	8	476
	S_2	3	5	312
5	S_1	11	3	744
	S_2	13	4	887
6	S_1	16	4	860
	S_2	13	7	713
7	S_1	8	19	744
	S_2	3	5	228
8	S_1	14	5	909
	S_2	10	7	783
9	S_1	17	3	801
	S_2	2	15	270
10	S_1	6	7	629
	S_2	15	4	695
11	S_1	17	8	785
	S_2	3	7	295
12	S_1	13	9	939
	S_2	2	5	318
13	S_1	23	2	493
	S_2	14	1	294
14	S_1	3	15	477
	S_2	5	3	399
15	S_1	16	5	823
	S_2	7	9	544
16	S_1	3	5	232
	S_2	12	7	473
17	S_1	25	3	584
	S_2	11	4	399
18	S_1	5	17	725
	S_2	8	4	348
19	S_1	14	9	737
	S_2	10	3	427
20	S_1	4	18	612
	S_2	5	6	468

7.2. Пример выполнения практической работы № 6

Задание 1. Предприятие специализируется по выпуску изделий двух видов: I_1 и I_2; при этом используется сырье двух типов: S_1 и S_2. Норма расхода каждого из них на изготовление одного изделия каждого вида и объем расхода сырья за один день заданы в таблице 18. Найти ежедневный объем выпуска каждого вида изделий. Составленную систему решить по формулам Крамера. Сделать проверку.

Таблица 18. Исходные данные

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление одного изделия, усл. ед.		Расход сырья за один день, усл. ед.
	I_1	I_2	
S_1	3	5	170
S_2	7	10	355

Решение

Пусть ежедневно предприятие выпускает x_1 единиц изделий вида I_1 и x_2 единиц изделий вида I_2. Тогда в соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 170, \\ 7x_1 + 10x_2 = 355. \end{cases}$$

Решим ее по формулам Крамера. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 - 5 \cdot 7 = 30 - 35 = -5.$$

Вычислим Δ_{x_1} и Δ_{x_2}:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 170 & 5 \\ 355 & 10 \end{vmatrix} = 170 \cdot 10 - 5 \cdot 355 = 1700 - 1775 = -75,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 170 \\ 7 & 355 \end{vmatrix} = 3 \cdot 355 - 170 \cdot 7 = 1065 - 1190 = -125.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-75}{-5} = 15,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-125}{-5} = 25.$$

Следовательно, предприятие выпускает 15 единиц изделий вида I_1 и 25 единиц изделий вида I_2.

Ответ: предприятие выпускает 15 единиц изделий вида I_1 и 25 единиц изделий вида I_2.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОМЕЖУТОЧНОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ

Цель: контроль знаний и умений по дисциплине «Математика».

Инструкция для обучающихся по выполнению письменного тестирования

На выполнение письменного теста отводится 90 минут. Тест содержит 17 заданий. Среди них встречаются задания четырех типов:

1) *выбор одного правильного ответа* (в вашем бланке ответов рядом с номером задания укажите номер правильного ответа);
2) *выбор нескольких правильных ответов* (в вашем бланке ответов рядом с номером задания укажите номера правильных ответов);
3) *введение правильного ответа* (в вашем бланке ответов рядом с номером задания укажите правильный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби);
4) *сопоставление двух списков* (в вашем бланке ответов рядом с номером задания укажите для номера элемента из первого столбика соответствующий номер элемента из второго столбика из текста задания).

Образец заданий для тестирования

Выберите один правильный ответ

1. Областью определения функции $y=\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt[3]{x+3}}$ **является множество…**

1) $(6;+\infty)$
2) $[-6;-3)\cup(-3;+\infty)$
3) $(-3;+\infty)$
4) $[-6;+\infty)$

Выберите несколько правильных ответов

2. Какие из представленных ниже функций являются нечетными?

1) $y=\dfrac{x}{\cos x}+\sin x$
2) $y=x^3\cdot \operatorname{tg} x$
3) $y=x^3+\operatorname{tg} x$
4) $y=\dfrac{x(x+1)}{\sin x}$

Введите правильный ответ с клавиатуры

3. Значение предела $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$ **равно…**

Выберите один правильный ответ

4. Производная функции $y=\arcsin\sqrt{x}$ **равна…**

1) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

2) $-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

4) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

Выберите один правильный ответ

5. Точкой максимума функции $y=x^3-3x$ **является…**

1) -1
2) 0
3) 1
4) 2

Выберите один правильный ответ

6. Множество первообразных функции $f(x)=\cos 3x$ **имеет вид…**

1) $3\sin 3x+C$

2) $-\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$

3) $3\sin x+C$

4) $\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$

Выберите один правильный ответ

7. Определенный интеграл $\int\limits_1^2 4x^3dx$ **равен…**

1) 15
2) 36
3) 17
4) x^4

Выберите один правильный ответ

8. По цели произведено 10 выстрелов, зарегистрировано 7 попаданий, относительная частота попадания в цель равна…

1) 0,7
2) 0,5
3) 0,35
4) 0,3

Выберите один правильный ответ

9. Из урны, в которой находятся 6 черных и 10 белых шаров, вынимают одновременно 2 шара. Тогда вероятность того, что оба шара будут белыми, равна…

1) $\frac{3}{8}$
2) $\frac{1}{5}$
3) $\frac{1}{10}$
4) $\frac{5}{8}$

Выберите один правильный ответ

10. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	2	4	6	8
p	0,35	0,25	0,30	0,10

Тогда вероятность $P(2 \le X \le 6)$ **равна…**

1) 0,10
2) 0,60
3) 0,90
4) 0,55

Выберите один правильный ответ

11. Статистическое распределение выборки имеет вид:

x_i	3	7	8	9
n_i	2	4	6	10

Тогда объем выборки равен …

1) 22
2) 27
3) 4
4) 49

Выберите один правильный ответ

12. Модуль комплексного числа $8-6i$ равен…

1) 2
2) 14
3) $2\sqrt{7}$
4) 10

Выберите один правильный ответ

13. Значение выражения $\frac{1+3i}{2-i}$ равно…

1) $-\frac{1}{5}+i\frac{7}{5}$
2) $1+i\frac{7}{5}$
3) $\frac{1}{5}+i\frac{7}{5}$
4) $1-i\frac{7}{5}$

Выберите один правильный ответ

14. Решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$$

методом Крамера можно представить в виде…

1) $x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$

3) $x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$

2) $x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}$

4) $x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$

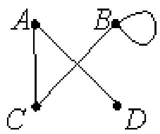
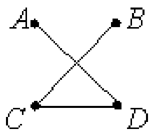
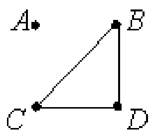
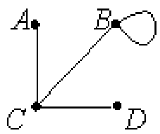
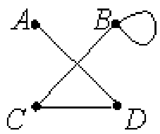
Выберите несколько правильных ответов

15. Членами определителя второго порядка $\begin{vmatrix} m & n \\ o & p \end{vmatrix}$ являются следующие произведения (без учета знака произведения)…

1) *mn*
2) *no*
3) *np*
4) *mp*

Соотнесите элементы двух списков

16. Неориентированные графы имеют множество вершин $\{A,\ B,\ C,\ D\}$. Множества их ребер заданы отношением инцидентности: каждое ребро представлено как пара вершин. **Поставьте в соответствие каждому графу его графическое изображение:**

1. $\{(B,D),(B,C),(C,D)\}$	A 
2. $\{(A,D),(B,C),(C,D)\}$	B 
3. $\{(A,D),(B,C),(C,D),(B,B)\}$	C 
	D 
	E 

Соотнесите элементы двух списков

17. Даны множества A, B, C. **Установите соответствие между ними и множествами, заданными перечислением элементов:**

1. $A=\{x\in R : x(x^2-4x+3)=0\}$	A $\{2\}$
2. $B=\{x\in Z : (x^2-4)(x^2-5)=0\}$	B $\{0, 2\}$
3. $C=\{x\in N : x$ кратно $2,\ x\in[0;3]\}$	C $\{-\sqrt{5}, -2, 2, \sqrt{5}\}$
	D $\{0, 1, 3\}$
	E $\{-2, 2\}$

ЗАДАНИЯ К ТЕМАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Цель: овладение практическими навыками работы с учебной и справочной литературой; развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности; формирование самостоятельности профессионального мышления: способности к профессиональному саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации; овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности; развитие исследовательских умений.

Задание: самостоятельно изучите тему: «Основные теоретико-множественные понятия математики».

Инструкция по выполнению проекта:

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые по их простоте опущены в учебнике), воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи.
2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Обучающийся должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.
3. Правильному пониманию теорем помогает составление схемы доказательства, а также разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в теореме.
4. При изучении материала по учебнику рекомендуем выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п.
5. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач. При этом необходимо обосновывать каждый этап решения, подробно записывать все вычисления.
6. Для контроля усвоения материала обучающийся должен письменно ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в данном пособии, и решить предложенные преподавателем задачи. Конспект необходимо сдать на проверку преподавателю.

Рекомендуемый источник материала:

Дадаян, А.А. Математика [Текст] : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд. — М. : ФОРУМ ; ИНФРА-М, 2014. — С. 7-24. — (Профессиональное образование).

Ответьте на вопросы:

1. Объясните, что такое множество; элемент множества?
2. Приведите примеры конечного и бесконечного множеств.
3. Какие операции выполняются над множествами?
4. Дайте определение понятия «пересечение множеств». Приведите примеры пересечений множеств.
5. Дайте определение понятия «объединение множеств». Приведите примеры объединений множеств.
6. Дайте определение понятия «разность множеств». Приведите примеры разностей множеств.
7. Дайте определение понятия «дополнение одного множества до другого». Приведите примеры дополнений множеств.
8. Сформулируйте определение декартова произведения множеств. Приведите примеры декартовых произведений множеств.
9. Сформулируйте определение бинарного отношения. Приведите примеры бинарных отношений.
10. Какие числовые множества вы знаете? Приведите примеры.

Решите задачи:

№ 1. Запишите множество A, элементы которого являются делителями числа 24.

№ 2. Даны множества $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,2,4,6,8\}$, $C=\{-1,0,3,4,7,8\}$. Найдите множества:

а) $A\cap B$;	г) $A\cup B\cup C$;	ж) $A\setminus B$;
б) $A\cup C$;	д) $(A\cup B)\cap C$;	и) $B\setminus A$;
в) $A\cap B\cap C$;	е) $A\cup(B\cap C)$;	к) $C\setminus A$.

№ 3. Даны множества $A=\{-4,-1,7,8\}$ и $B=\{-8,0,9\}$. Составьте отношения:

а) $a+b>0$; б) $ab>0$; в) $a-b<0$,

где $a\in A$, $b\in B$. Постройте графики указанных отношений.

№ 4. Даны множества чисел: Q — рациональных, Z — целых, R — действительных, $N_{чет}$ — четных натуральных, N — натуральных. Выпишите эти множества в таком порядке, чтобы каждое следующее включало предыдущее.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРОЕКТА «ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ЭКОНОМИКЕ»

Цель: формирование у обучающихся знания о значении математики в профессиональной деятельности, основных математических методов решения прикладных задач; умения строить и анализировать модели реальных экономических процессов с помощью полученных математических знаний.

Задание: по мере прохождения учебного материала, накопления необходимых знаний и умений раскройте тему «Применение математики в экономике».

Инструкция по выполнению проекта:

План работы над проектом:

1. Постановка проблемы, выявление ее причин, формулировка цели выполнения проекта, выдвижение гипотезы.
2. Планирование деятельности (работа в малых группах): формирование групп, выбор ответственных за сбор информации, ее оформление, представление и т. д., составление плана работы над проектом.
3. Поиск информации: работа с учебной и справочной литературой, с электронными базами информации, сбор материала каждым членом группы по всем вопросам проекта, обмен информацией с другими членами команды, обсуждение ее и на основе обсуждения произведение анализа, систематизации и обработки собранного материала.
4. Продукт проекта: оформление стенгазеты или презентации, с обязательным включением задач на применение математики.
5. Представление результатов работы над проектом: сообщение, представление стенгазеты или презентации, вывод о достижении цели проекта, ответы на вопросы слушателей.
6. Оценка результатов работы над проектом: со стороны преподавателя, слушателей, участников проекта.
7. Подведение итогов работы над проектом.

Рекомендуемые источники материала:

1. Математика. Сборник задач профильной направленности [Текст] : учеб. пособие для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И. Башмаков. — М. : Издательский центр «Академия», 2012. — 208 с.

2. Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

3. Электронно-библиотечная система «Издательства «Лань» [Электронный ресурс] / ООО «Издательство Лань». — Электрон. дан. — СПб : ООО «Издательство Лань», 2010-2015. — Режим доступа: http://e.lanbook.com, необходима регистрация. — Загл. с экрана. — Яз. рус.

4. Научная электронная библиотека [Электронный ресурс] : информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины и образования / ООО «Научная электронная библиотека». — Электрон. дан. — М : ООО «Научная электронная библиотека», 2000-2015. — Режим доступа: http://elibrary.ru, необходима регистрация. — Загл. с экрана. — Яз. рус.

5. Электронная библиотека Костромской ГСХА [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВПО Костромская ГСХА. — Электрон. дан. — Режим доступа: http://lib.ksaa.edu.ru/marcweb, по паролю. — Яз. рус.

Оценка результатов:

Критерии оценки слушателей:

1. Тема проекта раскрыта.
2. Оригинальность и содержательность формы представления результатов в математической газете.
3. Новизна информации.
4. Творческий подход.
5. Практическая значимость результатов.
6. Грамотность и осмысленность изложения материала в ходе презентации.

Дополнительные критерии оценки преподавателем:

1. Верно определены цели и задачи работы.
2. Верно распределены роли в группе.
3. Определены источники информации.
4. Эффективное сотрудничество в группе.

Анкета самооценки успешности:

1. Я определял цели и ставил задачи.
2. Я выдвигал гипотезы.
3. Я отобрал содержательный теоретический материал для проекта.
4. Я решил задачу по теме исследования.
5. Я сделал выводы.
6. Я принимал участие в создании стенгазеты.
7. Я выступил с сообщением по теме исследования.
8. Я ответил на вопросы проекта.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

Рекомендуемая литература

1. Богомолов, Н.В. Сборник задач по математике [Текст] : учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. — 9-е изд., стереотип. — : Дрофа, 2013. — 204 с.
2. Дадаян, А.А. Математика [Текст] : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд. — М. : ФОРУМ: ИНФРА-М, 2014. — 544 с. — (Профессиональное образование).
3. Математика. Сборник задач профильной направленности [Текст] : учеб. пособие для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И. Башмаков. — М. : Издательский центр «Академия», 2012. — 208 с.

Использованная литература

4. Гусев, В.А. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля [Текст] : учебник для образоват. учреждений нач. и сред. проф. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. — 4-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2012. — 384 с.
5. Дадаян, А.А. Математика [Текст] : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд. — М. : ФОРУМ ; ИНФРА-М, 2014. — 544 с. — (Профессиональное образование).
6. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / ред. Н.Ш. Кремер. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2012. — 909 с. — (Бакалавр. Углубленный курс).

Учебно-методическое издание

Математика : учебно-методическое пособие по организации самостоятельной и аудиторной работы для обучающихся 2 курса по специальности 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» очной формы обучения / сост. Л.Б. Рыбина, И.С. Белова, О.А. Фролова. — Караваево : Костромская ГСХА, 2015. — 61 с.

Гл. редактор Н.В. Киселева
Редактор выпуска Т.В. Тарбеева
Корректор Т.В. Кулинич

156530, Костромская обл., Костромской район, пос. Караваево, уч. городок, д. 34, КГСХА

Компьютерный набор. Подписано в печать 19/12/2015. Заказ №1295. Формат 84х60/16. Тираж 70 экз. Усл. печ. л. 3,84. Бумага офсетная. Отпечатано 24/12/2015. Цена 39,00 руб.

Отпечатано с готовых оригинал-макетов в академической типографии на цифровом дубликаторе. Качество соответствует предоставленным оригиналам.
вид издания: первичное (редакция от 20.07.2015 № 88б)

Цена 39,00 руб.

2015*1295