ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ОРГАНИЗАЦИИ КОНТАКТНОЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для студентов 1-го и 2-го курсов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника,
направленность «Электроснабжение»
очной формы обучения

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2021

УДК 512(076)
ББК 22.1
В 93

Составители: сотрудники кафедры высшей математики Костромской ГСХА канд. филос. наук, доцент кафедры *Л.Б. Рыбина*, преподаватель *И.А. Батманова,* канд. физ.-мат. наук, д-р экон. наук, доцент, профессор кафедры *В.И. Цуриков*.

Рецензенты: д-р пед. наук, доцент, профессор кафедры физики и автоматики Костромской ГСХА *И.А. Мамаева*, канд. экон. наук, доцент кафедры высшей математики Костромской ГСХА *А.Е. Березкина*.

*Рекомендовано методической комиссией
архитектурно-строительного факультета
в качестве учебно-методического пособия по организации контактной и самостоятельной работы для студентов 1-го и 2-го курсов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника,
направленность «Электроснабжение» очной формы обучения*

В 93 **Высшая математика** : учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы / / сост. Л.Б. Рыбина, И.А. Батманова, В.И. Цуриков. — Караваево : Костромская ГСХА, 2021. — 165 с. ; 20 см. – 50 экз. – Текст непосредственный.

Издание содержит задания для контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями, вопросы и задания для самостоятельного изучения учебного материала, список рекомендуемой литературы.

Учебно-методическое пособие предназначено для организации контактной и самостоятельной работы для студентов 1-го и 2-го курсов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, направленность «Электроснабжение» очной формы обучения.

УДК 512(076)
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы предназначено для студентов 1, 2 курсов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника. Издание содержит задания для индивидуальных домашних заданий, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями. Содержание и набор задач соответствуют рабочей программе дисциплины.

Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) являются одной из основных форм текущего контроля самостоятельной работы студентов. ИДЗ содержат комплект заданий, выполняя которые, студенты должны продемонстрировать умение решать типовые задачи и проводить типовые расчеты. Сроки выполнения ИДЗ указываются в календарно-тематическом плане и рейтинг-плане. Оценка за ИДЗ является существенной компонентой оценки самостоятельной работы студента в течение семестра.

Цель ИДЗ — помочь студентам закрепить и отработать материал, изученный на лекциях и практических занятиях. Для достижения этой цели задания подобраны таким образом, чтобы они охватывали все основные типы задач.

Общие требования к выполнению ИДЗ

Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) должно выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяет преподаватель.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие. Решение задач следует излагать подробно. Все записи, чертежи должны быть аккуратными, четкими и разборчивыми.

На каждой странице тетради необходимо оставить поля шириной 3-5 см для замечаний рецензента. Страницы нумеруются.

Выполненная работа сдается преподавателю в указанный им срок. Рекомендуется внимательно разобрать решения типовых задач, которые приводятся в данном пособии.

Не зачтенная работа возвращается студенту для исправления ошибок. Все исправления ошибок делаются в конце работы. Исправления в тексте прорецензированной работы не допускаются. Работу с выполненными исправлениями следует сдать преподавателю для повторного рецензирования.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия. *Линейная алгебра.* Матрицы и определители. Свойства определителей, способы их вычисления. Действия над матрицами. Обратная матрица. Системы линейных алгебраических уравнений, их решение методом Гаусса, по правилу Крамера, матричным методом. *Векторная алгебра.* Системы координат на прямой, плоскости, в пространстве. Векторы, линейные операции над ними. Проекция вектора на ось, направляющие косинуса вектора. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. *Аналитическая геометрия.* Простейшие задачи аналитической геометрии. Прямая на плоскости. Различные уравнения прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Понятие об уравнении поверхности и линии в пространстве. Уравнения прямой в пространстве. Виды уравнений плоскости. Прямая и плоскость в пространстве. Поверхности второго порядка. Поверхности вращения.

Раздел 2. Введение в математический анализ. *Элементы теории множеств.* Множества, операции над множествами. Декартово произведение множеств. Отображения. Сюрьективные, инъективные и биективные отображения. *Теория пределов. Непрерывность функции.* Функция одной переменной. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Предел переменной, предел функции. Бесконечно большие и бесконечно малые функции и их свойства. Теоремы о пределах. Непрерывность функции в точке. Различные определения непрерывности. Точки разрыва, их классификация. Замечательные пределы. Свойства функций, непрерывных в точке и на отрезке.

Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Производная функции, ее геометрический и физический смыслы. Дифференцируемость функции и ее связь с непрерывностью. Дифференциал функции, его свойства. Основные теоремы о дифференцируемых функциях. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Исследование функций с помощью производной и построение их графиков. Решение задач на наибольшее и наименьшее значения функции.

Раздел 4. Интегральное исчисление функции одной переменной. *Неопределенный интеграл.* Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование иррациональных выражений. *Определенный интеграл.* Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Метод замены переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Приложения определенного интеграла. Приближенные методы вычисления определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Функции нескольких переменных, основные понятия. Линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные. Производная по направлению, градиент. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Экстремумы функции двух независимых переменных. Производная по направлению. Градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Раздел 6. Интегральное исчисление функции нескольких переменных. *Двойной интеграл.* Двойной интеграл, его свойства. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат. Двойной интеграл в полярных координатах. Физические и геометрические приложения двойного интеграла. *Двойной интеграл.* Двойной интеграл, его свойства. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат. Двойной интеграл в полярных координатах. Физические и геометрические приложения двойного интеграла. *Криволинейные интегралы.* Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода. Формула Грина.

Раздел 7. Элементы теории функций комплексной переменной. *Комплексные числа.* Комплексные числа, действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа. Корни из комплексных чисел. *Функции комплексной переменной.* Функции комплексной переменной. Предел и непрерывность функции комплексной переменной. Производная функции комплексной переменной. Аналитические функции. Условия Коши-Римана.

Раздел 8. Дифференциальные уравнения. *Дифференциальные уравнения первого порядка.* Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли. Задача Коши. *Дифференциальные уравнения высших порядков.* Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Раздел 9. Численные методы. Приближенные методы решения алгебраических уравнений: половинного деления, итераций, хорд и касательных. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений: Эйлера и Рунге-Кута.

Раздел 10. Ряды. *Числовые ряды.* Числовой ряд. Сходимость и сумма ряда. Основные свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши. Признаки сравнения рядов. Геометрический ряд. Обобщенный гармонический ряд. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Условная и абсолютная сходимость ряда. *Степенные ряды.* Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях. *Ряды Фурье.* Ряды Фурье. Теорема Дирихле. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на интервале-периоде $(-\pi; \pi)$. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на интервале-периоде $(-l; l)$. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Разложение функций, заданных на полупериоде в ряд по косинусам или по синусам. Разложение в ряд Фурье непериодических функций.

Раздел 11. Теория вероятностей и математическая статистика, статистические методы обработки экспериментальных данных. *Случайные события.* События, их виды. Классическое и статистическое определения вероятности события. Свойства вероятности. Действия над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. *Случайные величины.* Дискретные случайные величины, способы их задания. Функция распределения дискретной случайной величины и ее свойства. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины, их свойства. Числовые характеристики непрерывной случайной величины. Законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин. Нормальный закон распределения. *Элементы математической статистики.* Предмет математической статистики. Выборочный метод исследования. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Полигон частот, гистограмма. Эмпирическая функция распределения. Числовые характеристики вариационного ряда. Точечные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Оптимальный объем представительной выборки. *Статистическая проверка гипотез.* Проверка статистических гипотез. Гипотезы о значениях числовых характеристик. Проверка гипотезы о равенстве средних значений. Критерии согласия. Критерий Пирсона. *Корреляционный анализ.* Представление данных в корреляционном анализе. Коэффициент корреляции. Корреляционное отношение. *Регрессионный анализ.* Корреляционное поле. Линейная регрессия. Статистический анализ уравнения регрессии.

РАЗДЕЛ 1. ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Индивидуальное домашнее задание №1 «Элементы линейной и векторной алгебры»

Базовый уровень

Задание 1. Даны матрицы A, B, C (табл. 1).

Найдите матрицу $D = 3BA + CB$.

Таблица 1. Исходные данные

Номер варианта	Матрица A	Матрица B	Матрица C
1	2	3	4
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

Номер варианта	Матрица A	Матрица B	Матрица C
1	2	3	4
8	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 9 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Номер варианта	Матрица A	Матрица B	Матрица C
1	2	3	4
18	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

Задание 2. Решить систему линейных уравнений (табл. 2):

1) по правилу Крамера, при этом два определителя вычислить по правилу треугольников, один — разложением по элементам любой строки, один — разложением по элементам любого столбца;

2) матричным методом, при этом сделать проверку правильности нахождения обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

Таблица 2. Исходные данные

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -9 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
5	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3, \\ 3x_1-x_2+x_3=12 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 7x_1-5x_2=24, \\ 4x_1+11x_3=39, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=33 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2+2x_3=11, \\ 4x_1+x_2+4x_3=19 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-37, \\ 3x_1+x_2+x_3=3, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=76 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=23, \\ -4x_1-x_2+3x_3=-10 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 7x_1-5x_2=-6, \\ 4x_1+11x_3=8, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=16 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 2x_1-x_2+2x_3=2, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-9, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=-8 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=-9, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=12 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 7x_1-5x_2=-1, \\ 4x_1+11x_3=52, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=29 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=11, \\ 2x_1-x_2+2x_3=8, \\ 4x_1+x_2+4x_3=22 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-19, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=36 \end{cases}$

Задание 3. Даны координаты вершин пирамиды A, B, C, D (табл. 3). Найти:

1) координаты векторов $\bar{a}=\overline{AB}$, $\bar{b}=\overline{AC}$, $\bar{c}=\overline{AD}$, записать их разложение по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$;

2) модуль вектора $\bar{d}=3\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ и его направляющие косинусы;

3) косинус угла BAC;

3) площадь грани ABC;

4) объем пирамиды $ABCD$.

Таблица 3. Исходные данные

Номер варианта	Координаты точек			
	A	*B*	*C*	*D*
1	2	3	4	5
1	$(3;-1;2)$	$(4;-1;-1)$	$(2;0;2)$	$(1;2;4)$
2	$(2;-1;2)$	$(3;-1;-1)$	$(1;0;2)$	$(0;2;4)$
3	$(3;0;2)$	$(4;0;-1)$	$(2;1;2)$	$(1;3;4)$
4	$(2;-1;3)$	$(3;-1;0)$	$(1;0;3)$	$(0;2;5)$
5	$(3;1;2)$	$(4;1;-1)$	$(2;2;2)$	$(1;4;4)$
6	$(2;1;2)$	$(3;1;-1)$	$(1;2;2)$	$(0;4;4)$
7	$(1;1;2)$	$(2;1;-1)$	$(0;2;2)$	$(-1;4;4)$
8	$(0;1;2)$	$(1;1;-1)$	$(-1;2;2)$	$(-2;4;4)$
9	$(0;2;2)$	$(1;2;-1)$	$(-1;3;2)$	$(-2;5;4)$
10	$(0;2;1)$	$(1;2;-2)$	$(-1;3;1)$	$(-2;5;3)$
11	$(2;1;0)$	$(5;3;1)$	$(0;1;2)$	$(4;3;1)$
12	$(1;1;0)$	$(2;3;1)$	$(1;-1;2)$	$(3;2;1)$
13	$(1;1;0)$	$(3;4;5)$	$(2;3;1)$	$(4;5;1)$
14	$(2;-1;0)$	$(-1;3;4)$	$(1;1;1)$	$(0;3;5)$
15	$(3;-1;2)$	$(7;9;1)$	$(5;1;2)$	$(1;2;0)$
16	$(2;4;-3)$	$(3;5;-4)$	$(4;5;-1)$	$(3;4;0)$
17	$(1;3;-1)$	$(2;0;7)$	$(-2;0;7)$	$(5;5;2)$
18	$(1;-1;1)$	$(4;1;2)$	$(2;0;1)$	$(5;2;8)$
19	$(1;4;-2)$	$(-2;5;0)$	$(3;4;0)$	$(2;5;-1)$

Номер варианта	Координаты точек			
	A	*B*	*C*	*D*
20	$(2;-1;1)$	$(4;-4;1)$	$(1;0;1)$	$(3;4;6)$

Повышенный уровень

Задание 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса (табл. 4).

Таблица 4. Исходные данные

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 2x_1-10x_2-3x_3-x_4=33, \\ 3x_2+5x_3-7x_4=-4, \\ 8x_1-x_3+9x_4=23, \\ 5x_1+2x_2-6x_3=3 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x_1-3x_2-5x_3-7x_4=-55, \\ 9x_1-2x_2-6x_3=0, \\ -8x_3+x_4=-18, \\ -3x_1+2x_2-5x_3-x_4=-27 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1-5x_2-3x_3+2x_4=-28, \\ 4x_1+x_2+x_3-7x_4=21, \\ -2x_2-3x_3+x_4=-14, \\ 3x_1+5x_2-4x_4=35 \end{cases}$	4	$\begin{cases} -x_1-3x_2+5x_3+2x_4=22, \\ 5x_1+3x_2-2x_3-4x_4=-33, \\ 2x_1-7x_2=12, \\ 8x_2+4x_3-x_4=-17 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3+x_4=-10, \\ 7x_1-3x_3-2x_4=-8, \\ 9x_1+7x_2-5x_3=25, \\ -4x_3+7x_4=-1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 8x_1+x_2+3x_3=-17, \\ 5x_1-3x_2-x_3+2x_4=-13, \\ 9x_1-6x_2+5x_3-x_4=-36, \\ x_1-3x_2+2x_3+4x_4=-6 \end{cases}$
7	$\begin{cases} -x_1+5x_2-2x_3+8x_4=9, \\ 3x_1-x_2+9x_3=-17, \\ 5x_1-3x_2-2x_3+x_4=14, \\ 2x_2+9x_3=-26 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4=18, \\ 4x_1+2x_2+5x_3+7x_4=24, \\ 3x_1+2x_2+8x_3+5x_4=13, \\ 2x_1+8x_2+7x_3+3x_4=6 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 5x_1+2x_2-7x_3+3x_4=59, \\ x_1-3x_2-x_3+4x_4=20, \\ -7x_1-x_2+x_3-5x_4=-38, \\ 2x_1-9x_2-2x_3-6x_4=-53. \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ x_2+3x_3+x_4=15, \\ 4x_1+x_3+x_4=11, \\ x_1+x_2+5x_4=23 \end{cases}$

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
11	$\begin{cases} 9x_1+8x_2=79, \\ 7x_1-x_2+5x_3=67, \\ x_1-x_2+5x_3+4x_4=29, \\ 3x_2+5x_3+7x_4=33 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-2, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-3x_4=-10 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3+3x_4=41, \\ 9x_1-7x_2-2x_3+14x_4=93, \\ -x_2+5x_3=11, \\ x_2-3x_3-5x_4=-19 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4=18, \\ 4x_1+2x_2+5x_3+7x_4=24, \\ 3x_1+2x_2+8x_3+5x_4=13, \\ 2x_1+8x_2+7x_3+3x_4=6 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 6x_1+4x_2+4x_3+2x_4=18, \\ 7x_1+5x_2+2x_3+4x_4=24, \\ 5x_1+8x_2+2x_3+3x_4=13, \\ 3x_1+7x_2+8x_3+2x_4=6 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5, \\ x_1-2x_2+3x_4=-4, \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12, \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 4x_1+2x_2+2x_3+6x_4=18, \\ 2x_1+5x_2+4x_3+7x_4=24, \\ 2x_1+8x_2+3x_3+5x_4=13, \\ 8x_1+7x_2+2x_3+3x_4=6 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-7x_4=12, \\ 3x_1-5x_2+7x_3-x_4=0, \\ 5x_1-7x_2+x_3-3x_4=4, \\ 7x_1-x_2+3x_3-5x_4=16 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_4=8, \\ 3x_1+x_2+x_3=15, \\ x_1+x_2+4x_4=11, \\ 5x_2+x_3+x_4=23 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3+4x_4=7, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=5, \\ 6x_1+2x_2+x_3=4, \\ 2x_1+3x_2-x_4=-11 \end{cases}$

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу $D=3BA+CB$.

Решение

Найдем произведение BA:

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot4+3\cdot2+(-2)\cdot3 & 1\cdot1+3\cdot(-3)+(-2)\cdot1 & 1\cdot(-2)+3\cdot0+(-2)\cdot2\\ (-1)\cdot4+0\cdot2+1\cdot3 & (-1)\cdot1+0\cdot(-3)+1\cdot1 & (-1)\cdot(-2)+0\cdot0+1\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -10 & -6\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Найдем произведение $3BA$:

$$3BA=3\cdot\begin{pmatrix}4 & -10 & -6\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -30 & -18\\ -3 & 0 & 12\end{pmatrix}.$$

Найдем произведение CB:

$$CB=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot1+1\cdot(-1) & 4\cdot3+1\cdot0 & 4\cdot(-2)+1\cdot1\\ 2\cdot1+(-3)\cdot(-1) & 2\cdot3+(-3)\cdot0 & 2\cdot(-2)+(-3)\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 12 & -7\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix}.$$

Найдем значение выражения $3BA+CB$:

$$3BA+CB=\begin{pmatrix}12 & -30 & -18\\ -3 & 0 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 12 & -7\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12+3 & -30+12 & -18+(-7)\\ -3+5 & 0+6 & 12+(-7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -18 & -25\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}15 & -18 & -25\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

Задание 2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

1) по правилу Крамера, при этом два определителя вычислить по правилу треугольников, один — разложением по элементам любой строки, один — разложением по элементам любого столбца;

2) матричным методом, при этом сделать проверку правильности нахождения обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

Решение

1. Решим систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Составим определитель системы из коэффициентов при неизвестных и вычислим его по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 =$$

$$= 1 + 12 - 20 - 12 - 10 + 2 = -27 .$$

Составим определитель Δ_1, заменив в определителе системы Δ первый столбец столбцом свободных членов, и вычислим его по правилу треугольников:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 10 + 8 \cdot 4 \cdot (-1) - 10 \cdot 1 \cdot 4 - 8 \cdot 2 \cdot 1 - 16 \cdot 2 \cdot (-1) =$$

$$= 16 + 40 - 32 - 40 - 16 + 32 = 0 .$$

Составим определитель Δ_2, заменив в определителе системы Δ второй столбец столбцом свободных членов, и вычислим его, разложив по третьей строке:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 16 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 10 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (16 \cdot 2 - 8 \cdot 4) - 10 \cdot (1 \cdot 2 - 4 \cdot 5) + (1 \cdot 8 - 5 \cdot 16) =$$

$$= 0 + 180 - 72 = 108\,.$$

Составим определитель Δ_3, заменив в определителе системы Δ третий столбец столбцом свободных членов, и вычислим его, получив нули в первом столбце и разложив по нему:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} =$$

умножим элементы первой строки на (-5) и прибавим к соответствующим элементам второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-3) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 0 & -9 & -72 \\ 0 & -7 & -38 \end{vmatrix} =$$

полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & -72 \\ -7 & -38 \end{vmatrix} = -9 \cdot (-38) - (-72) \cdot (-7) = 342 - 504 = -162\,.$$

Вычислим x_1, x_2 и x_3 по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-27} = 0\,,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{108}{-27} = -4\,,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-162}{-27} = 6\,.$$

Итак, $(0, -4, 6)$ — решение системы.

Ответ: $(0, -4, 6)$.

2. Решим систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ матричным методом.

Рассмотрим матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица системы, состоящая из коэффициентов при неизвестных,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ — матрица-столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$ — матрица-столбец свободных членов.

Тогда данная система в матричной форме примет вид:

$$AX = B.$$

Матрица X находится по формуле

$$X = A^{-1}B,$$

где A^{-1} — матрица, обратная к матрице A.

Найдем обратную матрицу A^{-1}. Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27$$ (вычисление в пункте 1).

Так как $\Delta = -27 \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -8,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)) = -6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -11,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) = 7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-(1\cdot 2-4\cdot 5)=18,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 5=-9.$$

Составляем матрицу $\widetilde{A}$ из алгебраических уравнений:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -8\\ -6 & -11 & 7\\ 0 & 18 & -9\end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу $\widetilde{A}$, получаем матрицу $\overline{A}$:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 1 & -11 & 18\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу A^{-1} находим по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\overline{A}.$$

Получаем:

$$A^{-1}=\frac{1}{-27}\cdot\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 1 & -11 & 18\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0\\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3}\\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Проверка

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0\\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3}\\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 1 & -11 & 18\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 1+4\cdot(-8) & 1\cdot(-6)+2\cdot(-11)+4\cdot 7 & 1\cdot 0+2\cdot 18+4\cdot(-9) \\ 5\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot(-8) & 5\cdot(-6)+1\cdot(-11)+2\cdot 7 & 5\cdot 0+1\cdot 18+2\cdot(-9) \\ 3\cdot 3+(-1)\cdot 1+1\cdot(-8) & 3\cdot(-6)+(-1)\cdot(-11)+1\cdot 7 & 3\cdot 0+(-1)\cdot 18+1\cdot(-9) \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили единичную матрицу. Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена правильно.

Найдем матрицу X:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} 3\cdot 16+(-6)\cdot 8+0\cdot 10 \\ 1\cdot 16+(-11)\cdot 8+18\cdot 10 \\ (-8)\cdot 16+7\cdot 8+(-9)\cdot 10 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 108 \\ -162 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Итак, $(0,-4,6)$ — решение системы.

Ответ: $(0,-4,6)$.

3. Решим систему $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=16, \\ 5x_1+x_2+2x_3=8, \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$ методом Гаусса.

Умножим первое уравнение на (-5) и прибавим ко второму уравнению; умножим первое уравнение на (-3) и прибавим к третьему. Получим:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=16, \\ \quad -9x_2-18x_3=-72, \\ \quad -7x_2-11x_3=-38. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $\left(-\frac{1}{9}\right)$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ x_2 + 2x_3 = 8, \\ -7x_2 - 11x_3 = -38. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 7 и прибавим к третьему. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_3 = 18. \end{cases}$$

Умножим третье уравнение на $\frac{1}{3}$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_3 = 6. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Получили систему ступенчатого вида. Начиная с третьего уравнения, обратным ходом находим неизвестные:

$$x_3 = 6,$$
$$x_2 = 8 - 2x_3 = 8 - 2 \cdot 6 = 8 - 12 = -4,$$
$$x_1 = 16 - 2x_2 - 4x_3 = 16 - 2 \cdot (-4) - 4 \cdot 6 = 16 + 8 - 24 = 0.$$

Итак, (0, –4, 6) — решение системы.

Ответ: (0, –4, 6).

Задание 3. Даны координаты вершин пирамиды $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 4)$.

Найти:

1) координаты векторов $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$, записать их разложение по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$;

2) модуль вектора $\bar{d} = 3\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$ и его направляющие косинусы;

3) косинус угла BAC;

4) площадь грани ABC;

5) объем пирамиды $ABCD$.

Решение

1. Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$, зная координаты его начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$, надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты его начала:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тогда

$$\overline{a}=\overline{AB}=(4-3;-1+1;-1-2)=(1;0;-3),$$

$$\overline{b}=\overline{AC}=(2-3;0+1;2-2)=(-1;1;0),$$

$$\overline{c}=\overline{AD}=(1-3;2+1;4-2)=(-2;3;2).$$

Если вектор $\overline{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ задан своими координатами, то его можно записать в виде разложения по координатному базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ следующим образом:

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}.$$

Тогда разложение векторов $\overline{a}=\overline{AB}$, $\overline{b}=\overline{AC}$, $\overline{c}=\overline{AD}$ по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ имеет вид:

$$\overline{a}=\overline{i}+3\overline{k},$$

$$\overline{b}=-\overline{i}+\overline{j},$$

$$\overline{c}=-2\overline{i}+3\overline{j}+2\overline{k}.$$

2. Найдем координаты вектора $\overline{d}=3\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$.

При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов — складываются одноименные координаты. Получим

$$3\overline{a}=\left(3\cdot 1;\ 3\cdot 0;\ 3\cdot(-3)\right)=\left(3;\ 0;\ -9\right).$$

Тогда

$$\overline{d}=3\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}=(3;0;-9)-(-1;1;0)+(-2;3;2)=$$

$$=(3+1-2;0-1+3;-9-0+2)=(2;2;-7).$$

Модуль вектора $\overline{d}=\left(d_x;d_y;d_z\right)$ находится по формуле

$$\left|\overline{d}\right|=\sqrt{d_x^2+d_y^2+d_z^2}.$$

Таким образом, $\left|\overline{d}\right|=\sqrt{2^2+2^2+(-7)^2}=\sqrt{58}$.

Направляющие косинусы вектора $\overline{d}$ — это косинусы углов, которые образует этот вектор с положительными направлениями координатных осей O_x, O_y и O_z. Они вычисляются по формулам

$$\cos\alpha=\frac{d_x}{\left|\overline{d}\right|},\ \cos\beta=\frac{d_y}{\left|\overline{d}\right|},\ \cos\gamma=\frac{d_z}{\left|\overline{d}\right|}.$$

Тогда $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{58}}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{58}}$, $\cos\gamma=-\dfrac{7}{\sqrt{58}}$.

3. Косинус угла BAC найдем как косинус угла между векторами $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AC}$ по формуле

$$\cos \angle BAC = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|},$$

где $\bar{a} \cdot \bar{b}$ — скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

$|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$ — произведение длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Скалярное произведение векторов $\bar{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x;\, b_y;\, b_z)$ находится по формуле

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Тогда

$$\cos \angle BAC = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Получим

$$\cos \angle BAC = \frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2}\,\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{10}\,\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{20}} = -\frac{\sqrt{20}}{20}.$$

4. Площадь треугольника ABC вычислим по формуле

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|,$$

где $\bar{a} \times \bar{b}$ — векторное произведение векторов $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AC}$.

Векторное произведение векторов $\bar{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x;\, b_y;\, b_z)$ находится по формуле

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Найдем векторное произведение векторов $\bar{a} = \overline{AB} = (1; 0; -3)$ и $\bar{b} = \overline{AC} = (-1; 1; 0)$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}.$$

Тогда

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \sqrt{3^2+3^2+1^2} = \sqrt{19}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{19}}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

5. Объем пирамиды $ABCD$ находится по формуле

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|,$$

где $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ — смешанное произведение векторов $\overline{a}=\overline{AB}$, $\overline{b}=\overline{AC}$ и $\overline{c}=\overline{AD}$.

Векторное произведение векторов $\overline{a}=\left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$, $\overline{b}=\left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ и $\overline{c}=\left(c_x; c_y; c_z\right)$ находится по формуле

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Найдем смешанное произведение векторов $\overline{a}=\overline{AB}=(1;0;-3)$, $\overline{b}=\overline{AC}=(-1;1;0)$ и $\overline{c}=\overline{AD}=(-2;3;2)$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2+3=5.$$

Тогда

$$V_{ABCD} = \frac{5}{6} \text{ (куб. ед.).}$$

Повышенный уровень

Задание 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$$

Убедитесь, что система имеет единственное решение, вычислив главный определитель системы, а затем решите ее методом Гаусса.

Решение

Вычислим главный определитель системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножаем первую строку последовательно на (-2), (-3) и снова на (-2) и складываем со второй, третьей и четвертой строками. Затем полученный определитель раскладываем по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & 8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -8 & 1 \\ -4 & -10 & 8 \\ -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot(-10)\cdot 5 + (-8)\cdot 8\cdot(-7) + (-4)\cdot(-4)\cdot 1 - 1\cdot(-10)\cdot(-7) -$$

$$- 8\cdot(-4)\cdot 0 - (-8)\cdot(-4)\cdot 5 = 448 + 16 - 70 - 160 = 234 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное решение, которое найдем с помощью метода Гаусса.

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Умножаем первую строку последовательно на (-2), (-3) и снова на (-2) и складываем со второй, третьей и четвертой строками, исключая переменную x_1 из всех строк, начиная со второй:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Поменяем местами второй и четвертый столбцы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -10 & -4 & -14 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & -20 \end{array}\right).$$

Умножаем вторую строку последовательно на (-8) и на (-5) и складываем с третьей и четвертой строками, исключая переменную x_4 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 54 & -4 & -62 \\ 0 & 0 & 36 & -7 & -50 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на $\frac{1}{54}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{27} & -\frac{31}{27} \\ 0 & 0 & 36 & -7 & -50 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на (-36) и прибавим к четвертой строке, исключая из нее переменную x_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{27} & -\frac{31}{27} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{26}{3} \end{array}\right).$$

Умножим четвертую строку на $-\frac{3}{13}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{27} & -\frac{31}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Получили матрицу ступенчатого вида. Ей соответствует система ступенчатого вида:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + 3x_3 + 2x_2 = 6, \\ x_4 - 8x_3 = 6, \\ x_3 - \frac{2}{27}x_2 = -\frac{31}{27}, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Используя обратный ход метода Гаусса, находим неизвестные:

$$x_2 = 2,$$

$$x_3 = -\frac{31}{27} + \frac{2}{27} \cdot 2 = -1,$$

$$x_4 = 6 + 8 \cdot (-1) = -2,$$

$$x_1 = 6 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 6 - 4 + 3 - 4 = 1.$$

Итак, решение системы (1, 2, –1, –2).

Ответ: (1, 2, –1, –2).

1.2. Контрольная работа № 1 «Аналитическая геометрия на плоскости»

Базовый уровень

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC (табл. 5). Найти:

1) длину стороны AB;
2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол A;
4) уравнение высоты CD и ее длину;
5) длину медианы AE;
6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;
7) точку пересечения медиан;
8) уравнение прямой, проходящей через точку A, параллельно высоте CD.

Таблица 5. Исходные данные

Номер варианта	A	B	C
1	$(-3;-2)$	$(0;10)$	$(6;2)$
2	$(1;1)$	$(4;13)$	$(10;5)$
3	$(0;3)$	$(3;15)$	$(9;7)$
4	$(-2;0)$	$(1;12)$	$(7;4)$
5	$(2;-1)$	$(5;11)$	$(11;3)$
6	$(3;-3)$	$(6;9)$	$(12;1)$
7	$(-1;2)$	$(2;14)$	$(8;6)$
8	$(5;-4)$	$(8;8)$	$(14;0)$
9	$(-4;5)$	$(-1;17)$	$(5;9)$
10	$(4;4)$	$(7;16)$	$(13;8)$
11	$(-4;2)$	$(4;-4)$	$(6;5)$
12	$(-2;1)$	$(6;-5)$	$(8;4)$

13	$(-3;-3)$	$(5;-9)$	$(7;0)$
14	$(2;2)$	$(10;-4)$	$(12;5)$
15	$(4;-1)$	$(12;-7)$	$(14;2)$
16	$(-6;-2)$	$(2;-8)$	$(4;1)$
17	$(1;2)$	$(13;-7)$	$(11;7)$
18	$(-7;-1)$	$(-5;-10)$	$(3;4)$
19	$(-5;0)$	$(7;9)$	$(5;-5)$
20	$(-7;2)$	$(5;11)$	$(3;-3)$

Задание 2. Дано уравнение эллипса (табл. 6). Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Таблица 6. Исходные данные

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$4x^2+y^2=16$	11	$64x^2+y^2=64$
2	$9x^2+4y^2=36$	12	$9x^2+16y^2=144$
3	$4x^2+y^2=36$	13	$25x^2+16y^2=400$
4	$9x^2+y^2=9$	14	$16x^2+25y^2=400$
5	$x^2+9y^2=9$	15	$x^2+16y^2=16$
6	$x^2+4y^2=16$	16	$16x^2+9y^2=144$
7	$16x^2+y^2=16$	17	$4x^2+3y^2=36$
8	$3x^2+4y^2=36$	18	$25x^2+9y^2=225$
9	$x^2+9y^2=36$	19	$9x^2+49y^2=441$
10	$9x^2+y^2=36$	20	$49x^2+9y^2=441$

Задание 3. Даны действительная полуось a и эксцентриситет ε гиперболы (табл. 7). Построить гиперболу и найти координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот гиперболы.

Таблица 7. Исходные данные

Номер варианта	α	ε	Номер варианта	α	ε
1	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	11	8	$\sqrt{2}$
2	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	12	$6\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$
3	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	13	$5\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$
4	$\sqrt{5}$	$3\sqrt{2}$	14	$4\sqrt{7}$	$3\sqrt{7}$

5	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	15	$3\sqrt{7}$	$4\sqrt{7}$
6	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	16	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$
7	$4\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	17	$3\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$
8	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$	18	$4\sqrt{6}$	2
9	$2\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	19	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$
10	7	$\sqrt{3}$	20	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$

Задание 4. Дано уравнение параболы (табл.8). Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.

Таблица 8. Исходные данные

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$y^2 = -10x$	11	$y^2 = -5x$
2	$x^2 = 10y$	12	$x^2 = -5y$
3	$y^2 = 9x$	13	$y^2 = 3x$
4	$x^2 = -9y$	14	$x^2 = 4y$
5	$y^2 = -8x$	15	$y^2 = -3x$
6	$x^2 = 8y$	16	$x^2 = 3y$
7	$y^2 = 7x$	17	$y^2 = 2x$
8	$x^2 = -7y$	18	$x^2 = -2y$
9	$y^2 = -6x$	19	$y^2 = -11x$
10	$x^2 = 6y$	20	$x^2 = 11y$

Повышенный уровень

Задание 5. Через фокус параболы (табл. 8) проведена прямая под углом 135° к оси Ox. Найти длину образовавшейся хорды.

Задание 6. Доказать оптическое свойство параболы: луч света, исходящий из фокуса параболы, отразившись от нее, идет по прямой, параллельной оси этой параболы.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-2;4)$, $B(6;-2)$, $C(8;7)$.

Найти:

1) длину стороны AB;

2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;

3) внутренний угол A;

4) уравнение высоты CD и ее длину;

5) длину медианы AE;

6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;

7) точку пересечения медиан;

8) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно высоте CD.

Решение

1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяем по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Подставляя в нее координаты точек $A(-2; 4)$ и $B(6; -2)$, найдем длину стороны AB:

$$AB = \sqrt{(6-(-2))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10\,.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,.$$

Подставив в него координаты точек $A(-2; 4)$ и $B(6; -2)$, получим уравнение прямой AB:

$$\frac{y-4}{-2-4} = \frac{x-(-2)}{6-(-2)},$$

$$\frac{y-4}{-6} = \frac{x+2}{8},$$

$$8(y-4) = -6(x+2),$$

$$4(y-4) - 3(x+2),$$

$$4y - 16 = -3x - 6,$$

$$3x + 4y - 10 = 0\,.$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой AB разрешим уравнение этой прямой относительно y, то есть запишем в виде $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент:

$$3x + 4y - 10 = 0\,,$$

$$4y = -3x + 10\,,$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}.$$

Отсюда определяем угловой коэффициент прямой AB: $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Аналогично по двум точкам $A(-2; 4)$ и $C(8; 7)$ составим уравнение прямой AC:

$$\frac{y-4}{7-4} = \frac{x-(-2)}{8-(-2)},$$

$$\frac{y-4}{3} = \frac{x+2}{10},$$

$$10(y-4) = 3(x+2),$$

$$10y - 40 = 3x + 6,$$

$$3x - 10y + 46 = 0.$$

Найдем угловой коэффициент k_{AC} прямой AC:

$$10y = 3x + 46,$$

$$y = \frac{3}{10}x + \frac{23}{5},$$

$$k_{AC} = \frac{3}{10}.$$

3. Угол φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Искомый внутренний угол A образован прямыми AB и AC, угловые коэффициенты которых $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, $k_{AC} = \frac{3}{10}$. Отмечая на рисунке треугольника ABC в системе координат направление угла A против хода часовой стрелки, определяем порядок прямых: AB — первая, AC — вторая. Следовательно $k_1 = k_{AB} = -\frac{3}{4}$, $k_2 = k_{AC} = \frac{3}{10}$.

Подставляем угловые коэффициенты в формулу угла между прямыми:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{10}} = \frac{\frac{6+15}{20}}{1 - \frac{9}{40}} = \frac{\frac{21}{20}}{\frac{31}{40}} = \frac{21 \cdot 40}{20 \cdot 31} = \frac{42}{31}.$$

Тогда $\angle A = \operatorname{arctg}\frac{42}{31}$.

4. Высота CD перпендикулярна стороне AB, поэтому угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, то есть $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{1}{-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{4}{3}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;\,y_1)$ в заданном угловым коэффициентом k направлении, имеет вид:

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Для составления уравнения высоты CD подставим в эту формулу координаты точки $C(8;\,7)$ и угловой коэффициент $k_{CD}=\dfrac{4}{3}$:

$$y-7=\frac{4}{3}(x-8),$$

$$3(y-7)=4(x-8),$$

$$3y-21=4x-32,$$

$$4x-3y-11=0.$$

Найдем длину высоты CD, то есть расстояние от точки C до прямой AB. Расстояние от точки $M_0(x_0;\,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $C(8;\,7)$ и коэффициенты из уравнения прямой AB: $3x+4y-10=0$.

Тогда $CD=\dfrac{|3\cdot 8+4\cdot 7-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{42}{\sqrt{25}}=\dfrac{42}{5}=8{,}4$.

5. Точка E — середина отрезка BC. Для определения ее координат применим формулы деления отрезка пополам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Подставляем в них координаты точек $B(6;\,-2)$ и $C(8;\,7)$:

$$x_E=\frac{6+8}{2}=7,\quad y_E=\frac{-2+7}{2}=\frac{5}{2}.$$

То есть $E\left(7;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

Найдем длину медианы AE, то есть расстояние между точками $A(-2;\,4)$ и $E\left(7;\,\dfrac{5}{2}\right)$:

$$AE=\sqrt{(7-(-2))^2+\left(\frac{5}{2}-4\right)^2}=\sqrt{9^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{81+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{333}{4}}=\frac{3\sqrt{37}}{2}.$$

6. Точка D — точка пересечения прямых AB и CD. Чтобы найти ее координаты, решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases}3x+4y-10=0,\\4x-3y-11=0.\end{cases}$$

Применим правило Крамера:

$$\begin{cases}3x+4y=10,\\4x-3y=11,\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-4\cdot4=-9-16=-25,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}10 & 4\\11 & -3\end{vmatrix}=10\cdot(-3)-4\cdot11=-30-44=-74,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 10\\4 & 11\end{vmatrix}=3\cdot11-10\cdot4=33-40=-7,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{74}{25},\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{7}{25}.$$

Итак, $D\left(\frac{74}{25};\frac{7}{25}\right)$.

Найдем координаты центра окружности, то есть середину отрезка CD, где $C(8;7)$, $D\left(\frac{74}{25};\frac{7}{25}\right)$:

$$x=\frac{8+\frac{74}{25}}{2}=\frac{274}{50}=\frac{137}{25},\qquad y=\frac{7+\frac{7}{25}}{2}=\frac{182}{50}=\frac{91}{25}.$$

Итак, $M\left(\frac{137}{25};\frac{91}{25}\right)$ — центр окружности.

Радиус окружности R равен половине длины отрезка CD:

$$R=\frac{CD}{2}=\frac{42}{10}=\frac{21}{5}.$$

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где $(a;b)$ — координаты центра окружности; R — ее радиус.

Подставив в него координаты точки $M\left(\frac{137}{25}; \frac{91}{25}\right)$ и $R = \frac{21}{5}$, получим уравнение окружности, для которой CD является диаметром:

$$\left(x - \frac{137}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{91}{25}\right)^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{137}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{91}{25}\right)^2 = \frac{441}{25}.$$

7. Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2:1$, начиная от вершины. Найдем координаты точки N, делящей медиану AE в отношении $\lambda = \frac{AN}{NE} = \frac{2}{1} = 2$. Используем формулы деления отрезка в данном отношении:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Подставим в них координаты точек $A(-2; 4)$, $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$ и $\lambda = 2$:

$$x_N = \frac{-2 + 2 \cdot 7}{1 + 2} = 4, \qquad y_N = \frac{4 + 2 \cdot \frac{5}{2}}{1 + 2} = 3.$$

Итак, $N(4; 3)$ — точка пересечения медиан.

8. Составим уравнение прямой l, проходящей через точку A, параллельно высоте CD. Из условия параллельности прямых l и CD следует, что их угловые коэффициенты равны, то есть $k_l = k_{CD} = \frac{4}{3}$. Подставляя в формулу $y - y_1 = k(x - x_1)$ координаты точки $A(-2; 4)$ и $k_l = \frac{4}{3}$, получим уравнение прямой l:

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - (-2)),$$

$$3y - 12 = 4x + 8,$$

$$4x - 3y + 20 = 0.$$

При пересечении данных прямых получается треугольник ABC (рис. 1).

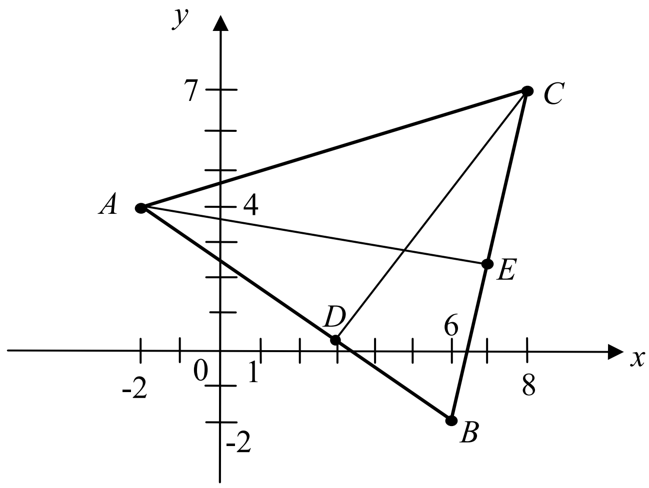

Рис. 1. Треугольник ABC

Задание 2. Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Решение

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1.$$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ — каноническое уравнение эллипса.

Так как $a^2 = 9$, то $a = 3$ — большая полуось, $b^2 = 4$, $b = 2$ — малая полуось.

$A_1(-3;\ 0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;\ -2)$, $B_2(0;2)$ — вершины эллипса.

Найдем c — расстояние от центра эллипса до каждого фокуса по формуле связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим $c^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$.

Тогда $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$ — фокусы эллипса.

Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$, получим $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

По полученным данным можно построить эллипс (рис. 2).

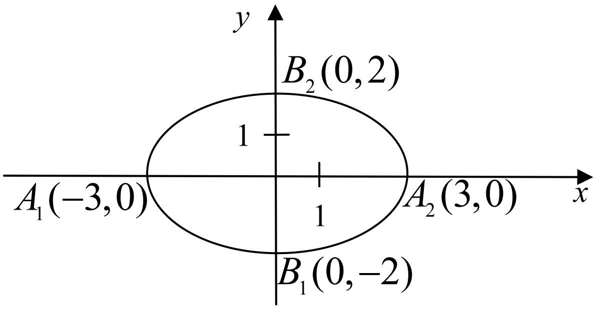

Рис. 2. Эллипс

Задание 3. Даны действительная полуось $a = 2\sqrt{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{3}$ гиперболы. Построить гиперболу и найти координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот гиперболы.

Решение

$A_1\left(-2\sqrt{3}; 0\right)$, $A_2\left(2\sqrt{3}; 0\right)$ — вершины гиперболы.

Из формулы для нахождения эксцентриситета гиперболы $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ найдем значение c — расстояние от центра гиперболы до каждого фокуса:

$$c = \varepsilon a = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Тогда $F_1\left(-6; 0\right)$, $F_2\left(6; 0\right)$ — фокусы гиперболы.

Из формулы связи $c^2 = a^2 + b^2$ найдем мнимую полуось b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 36 - 12 = 24,$$

$$b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Составим каноническое уравнение гиперболы, которое имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Получим $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{24} = 1$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. Подставив $a = 2\sqrt{3}$, и $b = 2\sqrt{6}$, получим $y = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}x$.

После преобразований имеем: $y = \pm\sqrt{2}x$ — уравнения асимптот данной гиперболы.

Построим гиперболу (рис. 3).

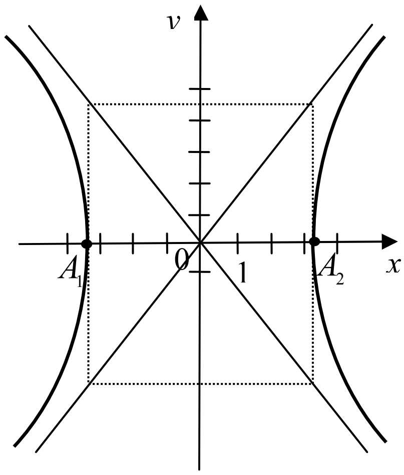

Рис. 3. Гипербола

Задание 4. Дано уравнение параболы $y^2 = 4x$. Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.

Решение

$y^2 = 4x$ — уравнение параболы, с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox, с ветвями, идущими вправо.

$y^2 = 2px$ — общий вид уравнения такой параболы, где p — расстояние между фокусом и директрисой.

Из уравнения находим: $2p = 4$, откуда $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$.

Директрисой параболы $y^2 = 2px$ является прямая, параллельная оси Oy, с уравнением $x = -\frac{p}{2}$, а фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Таким образом, для данной параболы директрисой служит прямая $x = -1$, а точка $F(1; 0)$ — фокусом.

По данным исследования построим параболу (рис. 4).

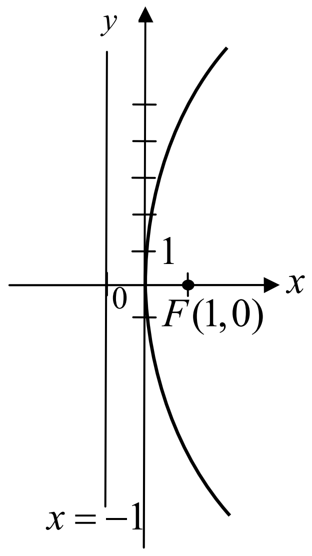

Рис. 4. Парабола

РАЗДЕЛ 2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Контрольная работа № 2 «Вычисление пределов»

Задание. Найти пределы функций (табл. 9).

Таблица 9. Исходные данные

Номер варианта	Пределы	Номер варианта	Пределы
1	2	3	4
1	1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-7x+2}{3x^5+6x^2-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}}{x-5}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{\sin3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{x-1}$	2	1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{4x^4+3x-6}$ 3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{8-x}}{x-5}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{2\cos3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{x-1}$
3	1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+2}{4x^3-2x-7}$	4	1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{7x^2+8x+1}{2x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2-1}{2x^5+x+3}$

	3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{6-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}3x}{\sin^2 2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{4/x}$		3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}{x-7}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\mathrm{tg}3x}{x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x+1}$
5	1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x^2-16}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6+5x^2-1}{4x^6+4x+5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\mathrm{tg}2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{5/x}$	6	1) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{2x-20}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+2x-3}{8x^3+5x+7}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+7}-\sqrt{9-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cos 5x}{\sin 3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+2}\right)^{2x+1}$
7	1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+2x^2-5}{5x^4+x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\mathrm{tg}4x}{\sin^2 6x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{4/x}$	8	1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+3x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x+6}{3x^3+6x+4}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}}{x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\mathrm{tg}4x}{x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$
9	1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-4x+1}{3x^6-2x^2-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}}{x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\mathrm{tg}5x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x-2}$	10	1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x^2+2x+8}{x^2-16}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+4x^2-3}{2x^4+3x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cos 7x}{\sin 2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{6/x}$

Повышенный уровень

Задание. Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}(cos\ x)^{\frac{1}{\sin x}}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{5x}$.

Решение

1) Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, надо и в числителе, и в знаменателе дроби выделить множитель $(x-a)$ при $x\to a$ и сократить дробь на него.

Разложив числитель и знаменатель на множители, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{9}{5}.$$

(При разложении квадратного трехчлена на множители используйте формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена).

2) Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наивысшей степени. Разделим числитель и знаменатель данной дроби на x^2 и применим основные теоремы о пределах и свойства бесконечно малых величин, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2.$$

3) Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на множитель, сопряженный числителю, то есть на $\left(\sqrt{3x-2}+2\right)$, получим:

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-2-4}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}=\frac{3}{4}.$$

4) Применим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и формулу тригонометрии

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 4}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

5) Применим второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{\frac{6}{x}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{30}=e^{30}.$$

РАЗДЕЛ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Контрольная работа № 3 «Дифференцирование функций одной переменной»

Базовый уровень

Задание 1. Найти производные заданных функций (табл. 10).

Таблица 10. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	2	3	4
1	1) $y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4$ 2) $y=\frac{4x+7\text{tg}x}{\sqrt{1+9x^2}}$ 3) $y=\cos 3x\cdot e^{\sin x}$ 4) $y=\ln\text{arctg}2x$	2	1) $y=(3x-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$ 2) $y=\frac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$ 3) $y=2^{3x}\text{tg}2x$ 4) $y=\cos\ln 5x$
3	1) $y=(x^2-\frac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4$ 2) $y=\frac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$	4	1) $y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\frac{\sin 2x}{\cos 5x}$

	3) $y=e^{tgx}\ln 2x$ 4) $y=\cos\sqrt{x^2+3}$		3) $y=2^{8x}\,\mathrm{tg}3x$ 4) $y=\arcsin\ln 4x$
5	1) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\mathrm{tg}x}$ 3) $y=e^{ctgx}\cdot\sin 4x$ 4) $y=\sin\ln 5x$	6	1) $y=(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5)^2$ 2) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ 3) $y=3^{tgx}\arcsin(x^2)$ 4) $y=\ln\sin 6x$
7	1) $y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3$ 2) $y=\dfrac{\mathrm{arc\,tg}7x}{2-9x^2}$ 3) $y=e^{\mathrm{ctg}x}\cos 6x$ 4) $y=\sin\ln 2x$	8	1) $y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4$ 2) $y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$ 3) $y=4^{\cos x}\mathrm{arctg}2x$ 4) $y=\ln\cos 5x$
9	1) $y=(3x^5-\dfrac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\dfrac{\cos 6x}{\sin 3x}$ 3) $y=e^{x^3}\mathrm{tg}7x$ 4) $y=\arcsin\ln 2x$	10	1) $y=(x^4+2\sqrt[3]{x}+1)^2$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\mathrm{ctg}x}$ 3) $y=4^{5x}\mathrm{ctg}6x$ 4) $y=\ln\cos 7x$
11	1) $y=(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\dfrac{5x+7\cos x}{\sqrt{1+4x^2}}$ 3) $y=ctg6x\cdot e^{\cos 2x}$ 4) $y=\ln\arccos 3x$	12	1) $y=(2x-4\sqrt[4]{x^3}-6)^3$ 2) $y=\dfrac{\mathrm{arc}\,tg4x}{1-7x^3}$ 3) $y=4^{5x}\mathrm{ctg}6x$ 4) $y=\sin\ln 4x$
13	1) $y=(x^6-\dfrac{1}{x^4}+5\sqrt{x})^5$ 2) $y=\dfrac{\arccos 6x}{x^3+e^{2x}}$ 3) $y=e^{ctgx}\ln 6x$ 4) $y=\sin\sqrt{x^4+8}$	14	1) $y=(5x^5-\dfrac{7}{\sqrt{x}}+4)^4$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=7^{5x}\mathrm{ctg}2x$ 4) $y=\mathrm{arctg}\ln 6x$
15	1) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=e^{\cos 3x}\cdot\arcsin 4x$ 4) $y=\sin\ln 5x$	16	1) $y=(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5)^2$ 2) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ 3) $y=3^{tgx}\arcsin(x^2)$

			4) $y=\ln\sin\dfrac{3x}{5}$
17	1) $y=(3x-3\sqrt[5]{x}+2)^6$ 2) $y=\dfrac{\sin 6x}{\cos\dfrac{x}{3}}$ 3) $y=2^{\sin x}\arcsin 2x$ 4) $y=\sin\ln 5x$	18	1) $y=(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\mathrm{tg}x}$ 3) $y=4^{\cos x}\mathrm{arctg}2x$ 4) $y=\cos\ln 5x$
19	1) $y=(3x^5-\dfrac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\mathrm{ctg}x}$ 3) $y=e^{ctgx}\cdot\sin 4x$ 4) $y=\arcsin\ln 4x$	20	1) $y=(3x-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=4^{5x}\mathrm{ctg}6x$ 4) $y=\sin\ln 2x$

Повышенный уровень

Задание 2. Найти производную неявной функции (табл. 11).

Таблица 11. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	$x^3y^3-2xy+3=0$	2	$x^2y^2-\cos x=0$
3	$\cos(xy)-2x=0$	4	$\dfrac{x}{y}+xy-2=0$
5	$5x^2y^2-7y+4x=0$	6	$x^3y^3-4xy^2+1=0$
7	$x^2+xy+y^2=3$	8	$x^2+y^2-xy=0$
9	$x^3+y^3-3xy=0$	10	$x^4+y^4=x^2y^2$
11	$y=1+x\cos y$	12	$y^3+e^{xy}=0$
13	$xy+e^y=0$	14	$x^2y^3-\sin y+3=0$
15	$\sin x+xy^2=0$	16	$x^3y^2-\cos y+4=0$
17	$\ln y+xy-5=0$	18	$x^2y^3+x\ln y=0$
19	$tgy-xy^2=0$	20	$\sin y-xy^2+4=0$

Задание 3. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции (табл. 12).

Таблица 12. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	$\begin{cases} x = 4\sin 5t, \\ y = \cos 5t \end{cases}$	2	$\begin{cases} x = 2\sin 3t, \\ y = 5\cos 3t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 2e^{3t} + 1, \\ y = e^{6t} - 4 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = 6e^{2t} + 7, \\ y = e^{2t} - 3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = t^3 - 4, \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = 2e^{3t} + 1 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = 9e^{7t} - 6 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 8t^3 - 9 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = 2\sin 3t + 1, \\ y = \cos 3t - 2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = 7\sin 5t - 3, \\ y = \cos 5t + 4 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 4\sin 2t - 1 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = \sin 5t, \\ y = -3\cos 5t + 7 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = e^{5t} + 2, \\ y = 2\ln t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = e^{-7t} - 4, \\ y = 6\ln t \end{cases}$
17	$\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + 8t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = t^4 - 5t, \\ y = 2t^2 + 3t^3 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x = \sqrt{t} - 2, \\ y = t^3 + 4 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 4\sqrt{t} + 1, \\ y = 2t^2 - 5 \end{cases}$

Задание 4. Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $s(t) = 4 + 8t - 5t^2$, где высота $s(t)$ измеряется в метрах, а время t – в секундах. Найти: а) скорость тела в начальный момент времени; б) скорость тела в момент соприкосновения с землей; в) наибольшую высоту подъема тела.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Найти производные заданных функций

1) $y=\left(x^4-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^3$;

2) $y=\dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$;

3) $y=e^{ctgx}\arcsin\sqrt{x}$;

4) $y=3^{\cos^2 x}+\operatorname{arctg}5x$.

Решение

1) $y=\left(x^4-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^3$ — сложная функция.

Применим формулы дифференцирования:

$$\left(u^3\right)'=3u^2u',\ \left(x^n\right)'=nx^{n-1},$$

а также формулы

$$\frac{1}{x^n}=x^{-n},\ \sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}.$$

Имеем

$$y'=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)'=.$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-2x^{-3}+x^{\frac{2}{3}}-6\right)'=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+6x^{-4}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+\frac{6}{x^4}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right).$$

2) Для дифференцирования функции $y=\dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$ применим правило производной частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Получим

$$y' = \frac{\left(\cos\frac{x}{4}\right)' x^2 - \cos\frac{x}{4}\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-\sin\frac{x}{4}\left(\frac{1}{4}x\right)' - \cos\frac{x}{4}\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4} - 2x\cos\frac{x}{4}}{x^4}.$$

3) Для дифференцирования функции $y = e^{\operatorname{ctg} x}\arcsin\sqrt{x}$ применим правило производной произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Получим

$$y' = \left(e^{\operatorname{ctg} x}\right)' \arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(\operatorname{ctg} x\right)' \arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right) =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x}\right).$$

4) Для дифференцирования функции $y = 3^{\cos^2 x} + \operatorname{arctg} 5x$ применяем правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$y' = 3^{\cos^2 x}\ln 3\left(\cos^2 x\right)' + \frac{1}{1+(5x)^2}(5x)' =$$

$$= 3^{\cos^2 x}\ln 3\cdot 2\cos x(\cos x)' + \frac{1}{1+25x^2}5 =$$

$$= 3^{\cos^2 x}\ln 3\cdot 2\cos x(-\sin x) + \frac{5}{1+25x^2} =$$

$$= -3^{\cos^2 x}\ln 3\sin 2x + \frac{5}{1+25x^2}.$$

Повышенный уровень

Задание 2. Найти производную неявной функции $x^4 + x^2 y^3 - \cos y = 0$.

Решение

Дифференцируем по переменной *x* обе части равенства, рассматривая *y*, как функцию от *x*:

$$4x^3 + \left(x^2\right)^{/} \cdot y^3 + x^2 \cdot \left(y^3\right)^{/} - \left(-\sin y\right) \cdot y^{/} = 0,$$

$$4x^3 + 2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 y^{/} + y^{/} \cdot \sin y = 0,$$

$$3x^2 y^2 y^{/} + y^{/} \cdot \sin y = -4x^3 - 2xy^3,$$

Выразим из полученного уравнения искомую производную y':

$$y^{/}\left(3x^2 y^2 + \sin y\right) = -2x\left(2x^2 + y^3\right),$$

$$y^{/} = \frac{-2x\left(2x^2 + y^3\right)}{3x^2 y^2 + \sin y}.$$

Задание 3. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{t}\cos t. \end{cases}$

Решение

Производная параметрически заданной функции $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ находится по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем y'_t:

$$y'_t = \left(e^{-t}\cos t\right)' = \left(e^{-t}\right)'\cos t + e^{-t}(\cos t)' =$$
$$= -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t).$$

Найдем x'_t:

$$x'_t = \left(e^{t}\cos t\right)' = \left(e^{t}\right)'\cos t + e^{t}(\cos t)' =;$$
$$= e^{t}\cos t - e^{t}\sin t = e^{t}(\cos t - \sin t).$$

Тогда

$$y'_x = \frac{-e^{-t}(\cos t + \sin t)}{e^{t}(\cos t - \sin t)} = \frac{\cos t + \sin t}{e^{2t}(\sin t - \cos t)}.$$

3.2. Индивидуальное задание № 2
«Исследование функций одной переменной и построение графиков»

Базовый уровень

Задание №1. Исследовать данную функцию $y = f(x)$ (табл. 13) методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Таблица 13. Исходные данные

№ варианта	$y = f(x)$
1	2
1	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
2	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
3	$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$
4	$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
5	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$
6	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
7	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$
8	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$
9	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$
10	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$
11	$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$
12	$y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$
13	$y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$

14	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$
15	$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$
16	$y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$
17	$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$
18	$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$
19	$y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$
20	$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения данной функции $y = f(x)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$ (табл. 14).

Таблица 14. исходные данные

№ варианта	$y = f(x)$	α	β
1	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$	–1	3
2	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$	–1	2
3	$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$	2	4
4	$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	–1	2
5	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	0	4
6	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$	–2	3
7	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$	–3	0
8	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$	–3	1
9	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$	1	4
10	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$	–1	4
11	$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$	–4	1
12	$y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$	–4	0
13	$y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$	–5	0
14	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$	0	3
15	$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$	–3	5
16	$y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$	–5	3
17	$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$	–5	–1
18	$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$	–5	2
19	$y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$	–2	3
20	$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$	1	5

Задание 3. Исследовать данную функцию $y = f(x)$ методами дифференциального исчисления и построить ее график (табл. 15).

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Таблица 15. Исходные данные

№ варианта	$y = f(x)$	№ варианта	$y = f(x)$
1	$y = \frac{x^2+1}{x}$	2	$y = \frac{x^2+9}{x}$
3	$y = \frac{x^2}{x-1}$	4	$y = \frac{x^2+8}{x+1}$
5	$y = \frac{x^2-3}{x+2}$	6	$y = \frac{x^2+21}{x-2}$
7	$y = \frac{x^2-8}{x-3}$	8	$y = \frac{x^2+16}{x+3}$
9	$y = \frac{x^2+9}{x+4}$	10	$y = \frac{x^2-12}{x-4}$
11	$y = \frac{x^2+4}{x}$	12	$y = \frac{x^2+25}{x}$
13	$y = \frac{x^2+3}{x-1}$	14	$y = \frac{x^2+24}{x+1}$
15	$y = \frac{x^2+5}{x+2}$	16	$y = \frac{x^2+32}{x-2}$
17	$y = \frac{x^2-5}{x-3}$	18	$y = \frac{x^2+27}{x+3}$
19	$y = \frac{x^2-15}{x+4}$	20	$y = \frac{x^2-7}{x-4}$

Задание 4. Вычислить предел (табл. 16) по правилу Лопиталя.

Таблица 16. Исходные данные

№ варианта	Предел	№ варианта	Предел
1	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$	2	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tgx}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^{x^3+1}-e}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$
7	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\cdot\ln\cos 5x}$	10	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{tgx-tga}{\ln x-\ln a}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+tg^2x}{x\cdot\sin 3x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$
13	$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$
15	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln tgx}$	16	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$
19	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$

Повышенный уровень

Задание 5. Решить задачу (табл. 17).

Таблица 17. Исходные данные

№ варианта	Задача
1	2
1	Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием и вертикальной боковой поверхностью заданного объёма, $V=25\ м^3\,(\approx 8\pi)$. Каковы, должны быть линейные размеры ямы (радиус R и высота H), чтобы на облицовку её дна и боковой поверхности пошло наименьшее количество материала?

2	Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), если на его изготовление имеется $S = 18,84\ м^2 \left(\approx 6\pi\right)$ материала?
3	В эллипс $\frac{x^2}{128} + \frac{y^2}{32} = 1$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти стороны этого прямоугольника, если они параллельны осям эллипса.
4	Требуется вырыть яму конической формы (воронку) с образующей $a = 3\ м$. При какой глубине объём воронки будет наибольшим?
5	Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак с заданным объёмом V. Каковы должны быть линейные размеры бака, чтобы его полная поверхность была наименьшей?
6	Проволокой длиной $20\ м$ требуется огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?
7	Среди цилиндров, полная поверхность которых равна, $S = 6\pi\ м^2$. Найти цилиндр, имеющий наибольший объём.
8	Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью $294\ м^2$ и разделить, затем этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?
9	Огород прямоугольной формы огорожен изгородью, длина которой $72\ м$. Какова должна быть размеры огорода, чтобы его площадь была наибольшей?
10	Деталь из листового железа имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной $10\ см$. Каким должно быть основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?
11	Какое положительное число, будучи сложенным, с обратным ему числом, даёт наименьшую сумму?
12	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.
13	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
14	Найти прямоугольник наибольшей площади, если сумма длин его катета и гипотенузы постоянна и равна $4\ см$.
15	Из прямоугольного листа жести размером $24\ см \times 9\ см$ требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?
16	Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь наибольшую площадь.

17	Требуется изготовить полотняный шатёр, имеющий форму прямого кругового конуса заданной вместимости, $V=\dfrac{9\pi}{2}$ $м^3$. Каковы должны быть размеры конуса (высота и радиус основания), чтобы на шатёр ушло наименьшее количество полотна?
18	Требуется изготовить ящик с крышкой, объём которого был бы равен, $72\ см^3$, причём стороны основания, относились бы как $1:2$. Каковы, должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?
19	Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной $20 см.$ Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольший?
20	Открытый чан имеет форму цилиндра объёма, $V=27\pi\ м^3$. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Область определения функции: $D(y)=R$.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения.

3. Исследуем функцию на четность:

$$y(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-(-x)^2-3(-x)+5=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+5.$$

Так как $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, то есть это функция общего вида. Ее график не будет обладать симметрией относительно начала координат и оси Oy.

4. Найдем первую производную:

$$y'=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5\right)'=x^2-2x-3.$$

Найдем критические точки функции. Приравняем производную к нулю и решим уравнение:

$$x^2-2x-3=0;$$

$$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16;$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1},$$

$$x_1=-1,\ x_2=3.$$

Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критические точки. Эти точки разбивают область определения на три интервала: $(-\infty;-1)$, $(-1;3)$, $(3;+\infty)$. В полученных интервалах расставляем знак производной y' (рис. 5).

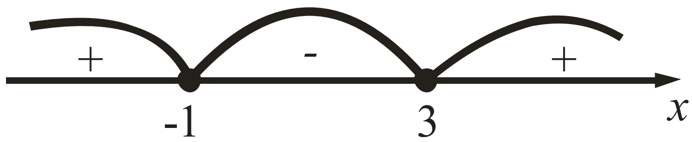

Рис. 5. Исследование на экстремум

Данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$, $(3;+\infty)$ и убывает на интервале $(-1;3)$.

$x=-1$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max}=y(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)+5=6\frac{2}{3},$$

$$y_{\min}=y(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3+5=-4.$$

5. Найдем вторую производную:

$$y''=\left(x^2-2x-3\right)'=2x-2.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем производную y'' к нулю и решим уравнение:

$$2x - 2 = 0,$$
$$x = 1.$$

Точек, в которых вторая производная y'' не существует, нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критическую точку второго рода. Область определения разбивается на два интервала: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис.6).

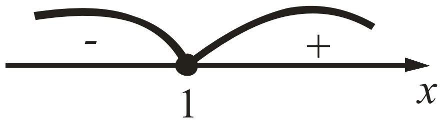

Рис. 6. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на интервале $(-\infty; 1)$ и вогнутый на интервале $(1; +\infty)$.

При переходе через критическую точку второго рода $x = 1$ вторая производная меняет знак, следовательно, $x = 1$ – абсцисса точки перегиба.

Вычислим значение функции в точке $x = 1$:

$$y(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 5 = 1\frac{1}{3}.$$

$y = 1\frac{1}{3}$ — ордината точки перегиба.

Итак, $\left(1; 1\frac{1}{3}\right)$ — точка перегиба.

6. Для нахождения точки пересечения графика функции с осью Oy подставим в уравнение функции значение $x = 0$. Тогда $y = 5$. Значит, график функции пересекает ось Oy в точке $(0; 5)$.

Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью Ox следует решить кубическое уравнение $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0$. Оно имеет не более трех решений. Следовательно, график функции пересекает ось Ox не более чем в трех точках.

7. По результатам исследования построим график функции (рис. 7).

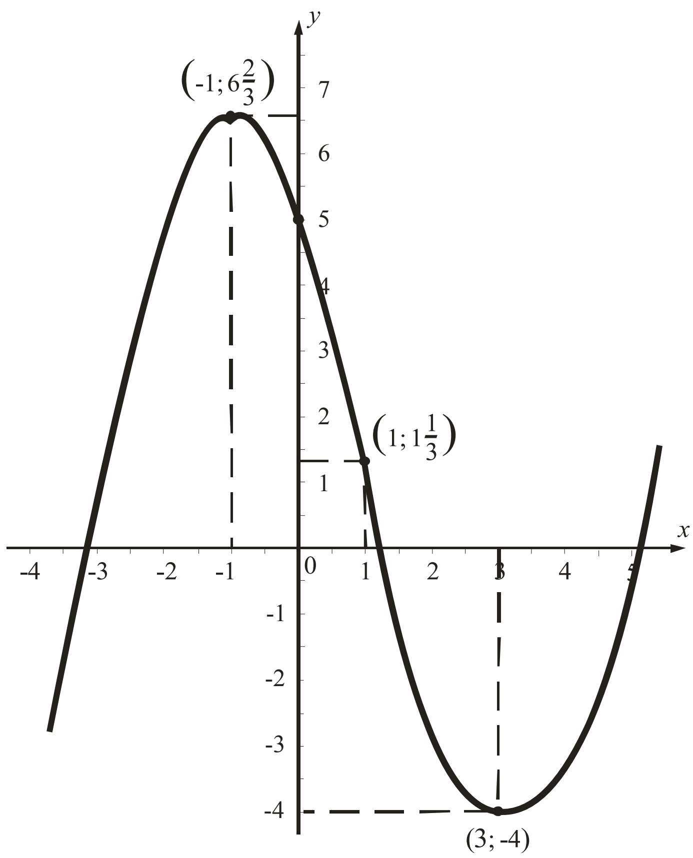

Рис. 7. График функции $y=\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}-3x+5$

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^{4}-2x^{2}+5$ на отрезке $[-2;3]$.

Решение

Найдем производную функции:

$$y'=4x^{3}-4x=4x\left(x^{2}-1\right).$$

Найдем критические точки:

$$y'=0,\ 4x\left(x^{2}-1\right)=0,$$

$$x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1.$$

Все критические точки принадлежат отрезку $[-2;3]$.

Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$y(0)=5,$$

$$y(-1)=4,$$

$$y(1)=4,$$

$$y(-2)=12,$$

$$y(3)=68.$$

Итак, $y_{наиб}=y(3)=68$, $y_{наим}=y(-1)=y(1)=4$.

Ответ: $y_{наиб}=y(3)=68$, $y_{наим}=y(-1)=y(1)=4$.

Задание 3. Исследовать данную функцию $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Найдем область определения функции: $D(y)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-6(-x)+13}{-x-3}=\frac{x^2+6x+13}{-x-3};$$

$$y(-x)\neq y(x),\ y(-x)\neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Исследуем функцию на непрерывность: $x=3$ — точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=-\infty,\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=+\infty.$$

Следовательно, $x=3$ — точка разрыва второго рода.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y' = \frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+13)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

Найдем критические точки:

$y' = 0$, если $x^2 - 6x + 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$.

Производная не существует при $x = 3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 8).

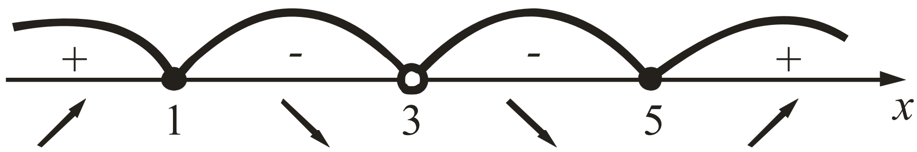

Рис. 8. Исследование на экстремум

Функция возрастает на $(-\infty;1)$ и на $(5;+\infty)$.

Функция убывает на $(1;3)$ и на $(3;5)$.

$x = 1$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(1) = -4,$$
$$y_{\min} = y(5) = 4.$$

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)' = \frac{(x^2-6x+5)'(x-3)^2-(x^2-6x+5)((x-3)^2)'}{(x-3)^4} =$$
$$= \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)2(x-3)}{(x-3)^4} =$$
$$= \frac{2(x-3)((x-3)^2-x^2+6x-5)}{(x-3)^4} =$$
$$= \frac{2(x^2-6x+9-x^2+6x-5)2(x-3)}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем вторую производную y'' к нулю и решим уравнение $\dfrac{8}{(x-3)^3} = 0$. Оно не имеет решений.

Вторая производная не существует при $x = 3$, но данная точка не является точкой перегиба, так как является точкой разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

На числовую ось нанесем область определения функции. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис. 9).

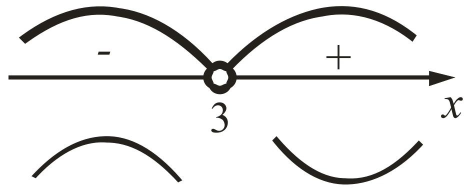

Рис. 9. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на $(-\infty; 3)$ и вогнутый на $(3; +\infty)$.

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как $x = 3$ — точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением $x = 3$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$. Найдем параметры k и b:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x(x-3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x^2-3x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{13}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-6x+13}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13-x^2+3x}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x+13}{x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{13}{x}}{1-\frac{3}{x}} = -3.$$

Итак, $y = x - 3$ — уравнение наклонной асимптоты.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

При $x = 0$ получим $y = \frac{13}{-3} = -4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0; -4\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения с осью Oy.

При $y = 0$ получим $\frac{x^2-6x+13}{x-3} = 0$, $x^2 - 6x + 13 = 0$;

$$D = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0.$$

Следовательно, точек пресечения с осью Ox нет.

8. По результатам исследования строим график функции (рис. 10).

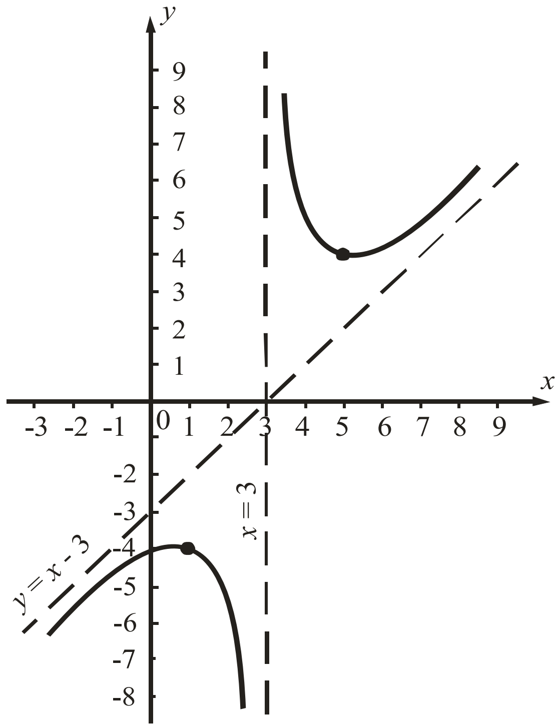

Рис. 10. График функции

Задание 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{\sin\left(\pi - 3x\right)}$ по правилу Лопиталя.

Решение

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\sin(\pi - 3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{(1 - 2\cos x)'}{(\sin(\pi - 3x))'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{-3\cos(\pi - 3x)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Повышенный уровень

Задание 5. Определить размеры силосного сооружения, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, объемом 108 м^3, чтобы суммарная площадь поверхности дна и стенок была минимальной.

Решение

Пусть x (м) — сторона основания силосного сооружения, а y (м) — его глубина. Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S\left(x,\, y\right) = x^2 + 4xy.$$

Так как объем сооружения 108 м^3 и $V = x^2 y$, то $y = \dfrac{108}{x^2}$.

Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S\left(x\right)=x^2+4x\cdot\frac{108}{x^2}=x^2+\frac{432}{x},\ \text{где}\ x>0.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое значение x, при котором функция $S\left(x\right)$ принимает наименьшее значение.

Найдем производную:

$$S'=2x-\frac{432}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$2x-\frac{432}{x^2}=0.$$

Решая это уравнение относительно x, получим $x=6$.

На числовую ось нанесем область определения функции $S\left(x\right)$ и критическую точку $x=6$. В полученных промежутках расставляем знак производной S' (рис. 11).

Рис. 11. Знаки производной

По достаточному условию экстремума в точке $x=6$ функция $S\left(x\right)$ имеет минимум. Так как функция $S\left(x\right)$ непрерывна при $x>0$ и имеет единственную точку экстремума $x=6$ и это точка минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение, то есть $S_{наим}=S\left(6\right)$. Тогда глубина сооружения $y=\frac{108}{x^2}=\frac{108}{36}=3$ (м).

Ответ: длина основания 6 м, глубина 3 м.

РАЗДЕЛ 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Контрольная работа №4 «Неопределенный и определенный интегралы»

Базовый уровень

Задание № 1. Найдите неопределенные интегралы. В пунктах 1) и 2) сделайте проверку дифференцированием (табл. 20):

Таблица 20. Исходные данные

№ варианта	Интегралы	№ варианта	Интегралы
1	2	3	4
1	1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\cos x}\sin xdx$ 3) $\int\ln xdx$	2	1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2+x^4}dx$ 3) $\int(8x-2)\sin 5xdx$
3	1) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}$ 3) $\int(2x+1)\sin 3xdx$	4	1) $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$ 3) $\int(x-3)e^{-2x}dx$
5	1) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 3) $\int(x-1)e^{2x}dx$	6	1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ 3) $\int\sqrt{x}\ln 3xdx$
7	1) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ 3) $\int(5x+1)\ln xdx$	8	1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2x^4+5}dx$ 3) $\int x^3\ln xdx$
9	1) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^2}xdx$ 3) $\int x\cos 2xdx$	10	1) $\int\left(4-\frac{1}{x^3}-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ 3) $\int(2x+8)e^{-7x}dx$
11	1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2+x^4}dx$ 3) $\int\ln xdx$	12	1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\cos x}\sin xdx$ 3) $\int(8x-2)\sin 5xdx$

13	1) $\int\left(5x^4-\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int(\ln x)^3\dfrac{dx}{x}$ 3) $\int(x-3)e^{-2x}dx$	14	1) $\int\left(3x^2+\dfrac{5}{x^6}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\ln x}\cdot\dfrac{dx}{x}$ 3) $\int(2x+1)\sin 3xdx$
15	1) $\int\left(4x^3-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\dfrac{x}{2x^4+5}dx$ 3) $\int\sqrt{x}\ln 3xdx$	16	1) $\int\left(5x^4-\dfrac{4}{x^5}+\dfrac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ 3) $\int x^3\ln xdx$
17	1) $\int\left(7x^6-\dfrac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ 3) $\int(5x+1)\ln xdx$	18	1) $\int\left(6x^5-\dfrac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\dfrac{arctgx}{1+x^2}dx$ 3) $\int(x-1)e^{2x}dx$
19	1) $\int\left(8x-\dfrac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^2}xdx$ 3) $\int(2x+8)e^{-7x}dx$	20	1) $\int\left(4-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\dfrac{dx}{x\ln x}$ 3) $\int x\cos 2xdx$

Базовый уровень

Задание № 2. Вычислить определенный интеграл (табл. 21):

Таблица 21. Исходные данные

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx$	2	$\int\limits_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2}\dfrac{\cos\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$
3	$\int\limits_0^{12\sqrt{3}}\dfrac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$	4	$\int\limits_1^{\sqrt{3}}\dfrac{x^2dx}{1+x^6}$
5	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 xdx$	6	$\int\limits_1^{e}\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx$

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
7	$\int\limits_{-3}^{0}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$	8	$\int\limits_{1}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$
9	$\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$	10	$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^3 xdx$
11	$\int\limits_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx$	12	$\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
13	$\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3dx}{x^8+1}$	14	$\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^2 xdx}{x}$
15	$\int\limits_{0}^{1}x^3\sqrt{4+5x^4}dx$	16	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$
17	$\int\limits_{1}^{2}\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$	18	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3-\sin x}dx$
19	$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	20	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{4-\cos x}dx$

Базовый уровень

Задание № 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (табл. 22). Построить фигуру.

Таблица 22. Исходные данные

Номер варианта	Уравнения линий
1	2
1	$y=\frac{1}{2}x^2-x+1,\quad y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$
2	$y=\frac{1}{2}x^2+x+2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$
3	$y=\frac{1}{3}x^2-3x+2,\quad y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$
4	$y=2x^2+6x-3,\quad y=-x^2+x+5$
5	$y=3x^2-5x-1,\quad y=-x^2+2x+1$

6	$y=x^2-3x-1, \quad y=-x^2-2x+5$
7	$y=2x^2-6x+1, \quad y=-x^2+x-1$
8	$y=\frac{1}{3}x^2-2x+4, \quad y=-\frac{2}{3}x^2-x+2$
9	$y=x^2-5x-3, \quad y=-3x^2+2x-1$
10	$y=x^2-2x-5, \quad y=-x^2-x+1$
11	$y=\frac{1}{4}x^2-2x-5, \quad y=-\frac{3}{4}x^2-x+1$
12	$y=\frac{1}{2}x^2+3x-2, \quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$
13	$y=2x^2-6x-2, \quad y=-x^2+x-4$
14	$y=2x^2+3x+1, \quad y=-x^2-2x+9$
15	$y=x^2-2x-4, \quad y=-x^2-x+2$
16	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-2, \quad y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3$
17	$y=2x^2+4x-7, \quad y=-x^2-x+1$
18	$y=2x^2-6x+3, \quad y=-2x^2+x+5$
19	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-1, \quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$
20	$y=x^2-3x-4, \quad y=-x^2-x+8$

Базовый уровень

Задание № 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой, прямой и осью Ox (табл. 23). Сделать рисунок фигуры вращения.

Таблица 23. Исходные данные

Номер варианта	Уравнения линий	Номер варианта	Уравнения линий
1	$y=2x^2, \quad y=-2x+4$	2	$y=4x^2, \quad y=-2x+6$
3	$y=x^2, \quad y=-x+2$	4	$y=x^2, \quad y=-x+3$
5	$y=3x^2, \quad y=-x+4$	6	$y=2x^2, \quad y=-3x+14$
7	$y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=-x+3$	8	$y=\frac{1}{3}x^2, \quad y=-x+6$
9	$y=\frac{1}{2}x^2, \quad y=-3x+8$	10	$y=3x^2, \quad y=-2x+5$
11	$y=\frac{1}{3}x^2, \quad y=-3x+12$	12	$y=\frac{1}{3}x^2, \quad y=-2x+9$
13	$y=4x^2, \quad y=-2x+2$	14	$y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=-2x+6$
15	$y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=-\frac{1}{2}x+2$	16	$y=2x^2, \quad y=-x+10$
17	$y=3x^2, \quad y=-3x+6$	18	$y=\frac{1}{2}x^2, \quad y=-x+3$
19	$y=x^2, \quad y=-2x+5$	20	$y=3x^2, \quad y=-5x+8$

Повышенный уровень

Задание № 5. Найдите неопределенные интегралы (табл. 24):

Таблица 24. Исходные данные

№ варианта	Интегралы	№ варианта	Интегралы
1	2	3	4
1	1) $\int \frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$ 2) $\int \frac{x}{x^3+1}dx$ 3) $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$	2	1) $\int \frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx$ 2) $\int \frac{x+20}{x^3-8}dx$ 3) $\int \cos^4 2x dx$
3	1) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$ 2) $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$ 3) $\int \sin^3 5x dx$	4	1) $\int \frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx$ 2) $\int \frac{2x+5}{x^3+2x}dx$ 3) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

5	1) $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx$ 2) $\int \frac{3x-1}{x^3+3x}dx$ 3) $\int \sin^4 3x dx$	6	1) $\int \frac{3x+7}{x^2+8x+17}dx$ 2) $\int \frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}dx$ 3) $\int \cos^3 2x dx$
7	1) $\int \frac{8x-3}{x^2+6x+10}dx$ 2) $\int \frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx$ 3) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$	8	1) $\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5}dx$ 2) $\int \frac{5x-11}{x(x^2+4)}dx$ 3) $\int \cos^3 x \sin^3 x dx$
9	1) $\int \frac{7x+3}{x^2-4x+5}dx$ 2) $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2+3)}dx$ 3) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$	10	1) $\int \frac{7x-3}{x^2+6x+13}dx$ 2) $\int \frac{2x}{x^3-1}dx$ 3) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$
11	1) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$ 2) $\int \frac{x}{x^3+1}dx$ 3) $\int \sin^3 5x dx$	12	1) $\int \frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx$ 2) $\int \frac{2x+5}{x^3+2x}dx$ 3) $\int \cos^4 2x dx$
13	1) $\int \frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$ 2) $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$ 3) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$	14	1) $\int \frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx$ 2) $\int \frac{x+20}{x^3-8}dx$ 3) $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$
15	1) $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx$ 2) $\int \frac{3x-1}{x^3+3x}dx$ 3) $\int \sin^4 3x dx$	16	1) $\int \frac{3x+7}{x^2+8x+17}dx$ 2) $\int \frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}dx$ 3) $\int \cos^3 2x dx$
17	1) $\int \frac{7x-3}{x^2+6x+13}dx$ 2) $\int \frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx$ 3) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$	18	1) $\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5}dx$ 2) $\int \frac{5x-11}{x(x^2+4)}dx$ 3) $\int \cos^3 x \sin^3 x dx$

19	1) $\int \frac{7x+3}{x^2-4x+5}dx$ 2) $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2+3)}dx$ 3) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos^2 x}$	20	1) $\int \frac{8x-3}{x^2+6x+10}dx$ 2) $\int \frac{2x}{x^3-1}dx$ 3) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}$

Повышенный уровень

Задание № 6. Вычислить определенный интеграл (табл. 25):

Таблица 25. Исходные данные

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	$\int_2^3 x\ln(x-1)dx$	2	$\int_1^2 \ln(3x+2)dx$
3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$	4	$\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx$
5	$\int_1^2 (x-1)\ln xdx$	6	$\int_0^2 xe^{-x}dx$
7	$\int_{-\frac{1}{2}}^0 xe^{-2x}dx$	8	$\int_1^e x\ln xdx$
9	$\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}} \frac{x}{e^{3x}}dx$	10	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x-2)\cos xdx$
11	$\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln xdx$	12	$\int_1^{e^3} \ln xdx$
13	$\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$	14	$\int_0^{\pi} x\sin 7xdx$
15	$\int_1^2 x^2\ln xdx$	16	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (3x+5)\cos xdx$
17	$\int_{-3}^0 (x-2)e^{-\frac{x}{3}}dx$	18	$\int_1^e \frac{\ln xdx}{x^2}$

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
19	$\int_{-1}^{0} x\ln(1-x)dx$	20	$\int_{0}^{\pi} (2x-4)\sin x dx$

Повышенный уровень

Задание № 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией (табл. 26). Построить фигуру.

Таблица 26. Исходные данные

Номер варианта	Задание	Номер варианта	Задание
1	$r = a(1+\sin 2\varphi)$	2	$r = 3\sin 2\varphi$
3	$r = \cos\varphi$	4	$r = 5\cos\varphi$
5	$r = \cos 2\varphi$	6	$r = \sqrt{3}\sin\varphi$
7	$r = 4\cos\varphi$	8	$r = 3(1+\sin\varphi)$
9	$r = a(1+\cos\varphi)\ (a>0)$	10	$r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$
11	$r = \sin^2\varphi$	12	$r = a\cos 2\varphi\ (a>0)$
13	$r = \cos^2\varphi$	14	$r = 2a(1-\cos\varphi)\ (a>0)$
15	$r = \sin 2\varphi$	16	$r = 2\sin^2\varphi$
17	$r = 4\cos^2\varphi$	18	$r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$
19	$r = 5\cos\varphi$	20	$r = \sin\varphi$

Повышенный уровень

Задание № 8. Вычислить длину дуги кривой (табл. 27):

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_1 \le t \le t_2 .$$

Таблица 27. Исходные данные

Номер варианта	$x(t)$	$y(t)$	t_1	t_2
1	2	3	4	5
1	$a\sin^3 t$	$b\cos^3 t$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	$2t$	$\frac{4}{3}\sqrt{t^3}$	-1	0
3	$2(t-\sin t)$	$2(1-\cos t)$	0	2π

Номер варианта	$x(t)$	$y(t)$	t_1	t_2
1	2	3	4	5
4	$\frac{1}{3}t^3 - t$	$t^2 + 2$	0	3
5	$e^t \cos t$	$e^t \sin t$	0	$\ln \pi$
6	$8\sin t + 6\cos t$	$6\sin t - 8\cos t$	0	$\frac{\pi}{2}$
7	$\cos^3 t$	$\sin^3 t$	0	$\frac{\pi}{2}$
8	$4(t - \sin t)$	$4(1 - \cos t)$	0	2π
9	$2(\cos t + t\sin t)$	$2(\sin t - t\cos t)$	0	π
10	t^2	$t - \frac{1}{3}t^3$	0	1
11	$b\cos^3 t$	$a\sin^3 t$	0	$\frac{\pi}{2}$
12	$\cos t + t\sin t$	$\sin t - t\cos t$	0	$\frac{\pi}{4}$
13	$3(t - \sin t)$	$3(1 - \cos t)$	π	2π
14	$2\cos t$	$2\sin t$	0	$\frac{\pi}{3}$
15	$e^t \sin t$	$e^t \cos t$	0	π
16	$\frac{1}{6}t^6$	$2 - \frac{t^4}{4}$	0	1
17	$4\cos t$	$4\sin t$	0	$\frac{\pi}{3}$
18	$3\sin t + 4\cos t$	$4\sin t - 3\cos t$	0	π
19	$2\cos t - \cos 2t$	$2\sin t - \sin 2t$	0	$\frac{\pi}{2}$
20	$\frac{1}{3}t^3 - t$	$t^2 + 1$	0	1

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

2) $\int e^{x^5}x^4dx$;

3) $\int(4x+1)\sin 3x dx$;

Решение

1) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

Применим формулу интегрирования $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=4\int x^{-2}dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{3}}dx+6\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+6\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=-\frac{4}{x}-\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16}+9\sqrt[3]{x^2}+C.$$

2) $\int e^{x^5}x^4dx$.

Применим способ замены переменной:

$$\int e^{x^5}x^4dx=\begin{bmatrix} u=x^5, \\ du=5x^4dx, \\ x^4dx=\frac{1}{5}du \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int e^u du=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{x^5}+C.$$

3) $\int(4x+1)\sin 3x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

$$\int(4x+1)\sin 3x dx=\begin{bmatrix} u=4x+1, & du=4dx \\ dv=\sin 3x dx, & v=\int\sin 3x dx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{3}\int\cos 3x dx=-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x+C=$$

$$-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{9}\sin 3x+C.$$

(Проверку дифференцированием выполните самостоятельно.)

Задание № 2. Вычислить определенный интеграл

1. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$,

2. $\int\limits_2^3 x\ln(x-1)dx$.

Решение

1) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$. Выполним замену переменной. Пусть $t=1+x^2$, тогда $dt=2xdx$, откуда $xdx=\frac{1}{2}dt$. Находим новые пределы интегрирования. Если $x=0$, то $t=1$. Если $x=\sqrt{3}$, то $t=4$, что следует из зависимости $t=1+x^2$.

Тогда

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 \sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 t^{\frac{1}{3}}dt=$$

Применим формулу интеграла от степенной функции $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ и формулу Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4}\Bigg|_1^4=\frac{3\sqrt[3]{t^4}}{8}\Bigg|_1^4=\frac{3}{8}\sqrt[3]{4^4}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{1^4}=\frac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4}-1\right).$$

Ответ: $\frac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4}-1\right)$.

2) $\int\limits_2^3 x\ln(x-1)dx$. Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Пусть $u=\ln(x-1)$, $dv=xdx$. Находим $du=\frac{dx}{x-1}$, $v=\int xdx=\frac{x^2}{2}$.

Тогда

$$\int_2^3 x\ln(x-1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x-1)\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}dx = \frac{9}{2}\ln 2 - 2\ln 1 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2-1+1}{x-1}dx =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}dx = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_2^3 \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\int_2^3 xdx + \int_2^3 dx + \int_2^3 \frac{d(x-1)}{x-1}\right) = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 + x\Big|_2^3 + \ln(x-1)\Big|_2^3\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 2 + 3 - 2 + \ln 2 - \ln 1\right) = 4\ln 2 - \frac{7}{4}.$$

Ответ: $4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

Задание № 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 - x - 2$ и $y = -x^2 + x - 1$. Построить фигуру.

Решение

Построив линии, получим фигуру (рис. 12).

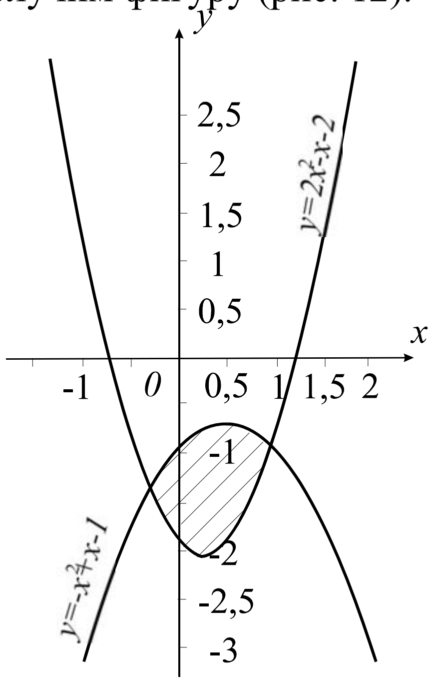

Рис. 12. Фигура

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1, \qquad x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Вычисление площади осуществляем по формуле

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx,$$

где $y = f(x)$, $y = g(x)$ — кривые, ограничивающие фигуру $\left(f(x) \geq g(x)\right)$.

Тогда

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(\left(-x^2 + x - 1\right) - \left(2x^2 - x - 2\right)\right)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-3x^2 + 2x + 1\right)dx =$$

$$= \left(-3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \left(x^3 + x^2 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$= \left(-1 + 1 + 1\right) - \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{34}{27} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\frac{34}{27}$ (кв. ед.).

Задание № 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой $y = 8x^2$, прямой $y = -6x + 14$ и осью Ox. Сделать рисунок фигуры вращения.

Решение

Построив линии, получим фигуру вращения (рис. 13).

Найдем абсциссу точки пересечения параболы и прямой в первом квадранте. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$8x^2 = -6x + 14.$$

Решим полученное квадратное уравнение.

$$4x^2 + 3x - 7 = 0,$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot (-7) = 121,$$

$$x_1 = \frac{-3-11}{8} = -\frac{7}{4}, \qquad x_2 = \frac{-3+11}{8} = 1.$$

Первому квадранту соответствует корень $x_2 = 1$.

Найдем абсциссу точки пересечения прямой $y=-6x+14$ с осью Ox, решив уравнение $-6x+14=0$, откуда $x=\frac{7}{3}$.

Таким образом, тело ограничено при $0\le x\le 1$ поверхностью, образованной вращением параболы $y=8x^2$ вокруг оси Ox, а при $1\le x\le \frac{7}{3}$ — вращением прямой $y=-6x+14$.

Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

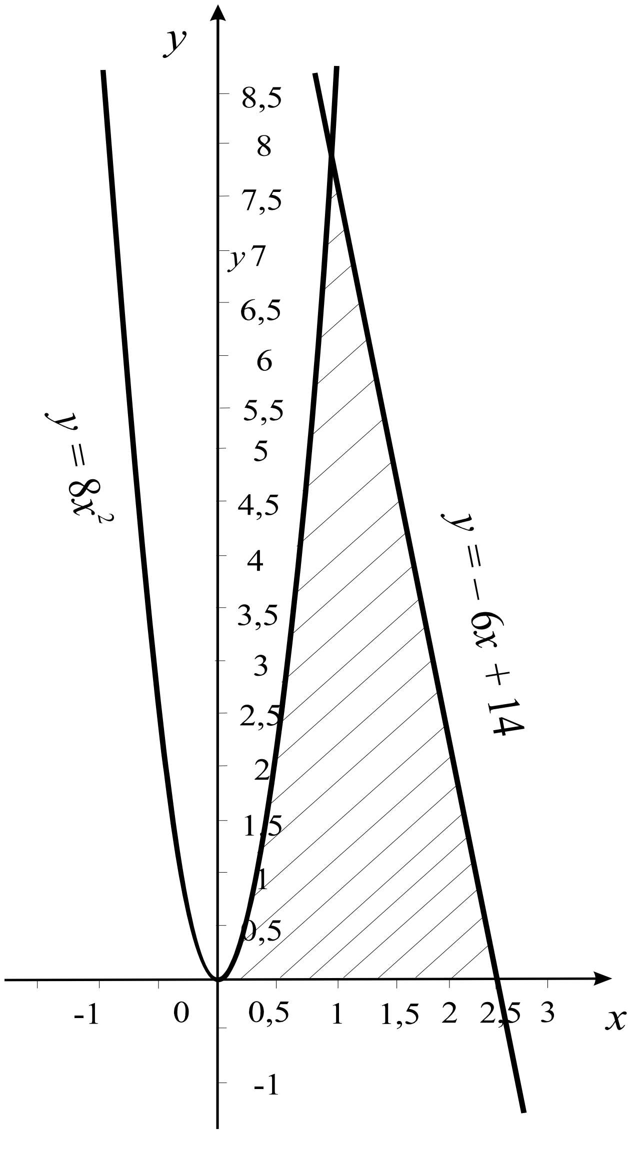

Рис. 13. Фигура

где $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ — уравнения линий, ограничивающих криволинейную трапецию, которая вращается вокруг оси Ox.

Тогда искомый объем:

$$V=\pi\int_0^1\left(8x^2\right)^2dx+\pi\int_1^{\frac{7}{3}}\left(-6x+14\right)^2dx.$$

Для вычисления второго интеграла применим метод подведения под знак дифференциала:

$$V=64\pi\int_0^1 x^4dx-\frac{\pi}{6}\int_1^{\frac{7}{3}}\left(-6x+14\right)^2d\left(-6x+14\right)=$$

$$=64\pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1-\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\left(-6x+14\right)^3}{3}\Bigg|_1^{\frac{7}{3}}=\frac{64\pi}{5}+\frac{256\pi}{9}=\frac{1\,856}{45}\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: $\frac{1856}{45}\pi$ (куб. ед.).

Повышенный уровень

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx$;

2) $\int\cos^3x\sin^4xdx$.

Решение

1) $\int\frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx$.

Подынтегральная функция является простейшей рациональной дробью третьего типа. В ее знаменателе выделим полный квадрат и сделаем замену переменных:

$$\int\frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx=\left[\begin{array}{l}x^2-6x+13=\\=x^2-6x+9+4=\\=(x-3)^2+4,\\x-3=t,\\x=t+3,dx=dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{2(t+3)-2}{t^2+4}dt=\int\frac{2t+4}{t^2+4}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+4}+$$

$$+4\int\frac{dt}{4+t^2}=\int\frac{d(t^2+4)}{t^2+4}+4\int\frac{dt}{t^2+2^2}=$$

$$=\ln\left|t^2+4\right|+4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\ln\left|x^2-6x+13\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$$

2) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$.

Применим основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Получим:

$$\int \cos^3 x \sin^4 x dx = \int \cos^2 x \cos x \sin^4 x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^4 x \cos x dx =$$

$$\begin{bmatrix} t = \sin x, \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix}$$

$$= \int \left(1 - t^2\right) t^4 dt = \int \left(t^4 - t^6\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Повышенный уровень

Задание № 6. Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 x \ln(x-1) dx$.

Решение

Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пусть $u = \ln(x-1)$, $dv = x dx$. Находим $du = \dfrac{dx}{x-1}$, $v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2}$.

Тогда

$$\int_2^3 x \ln(x-1) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x-1)\Bigg|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{9}{2}\ln 2 - 2\ln 1 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} dx =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} dx = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_2^3 \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\int_2^3 x dx + \int_2^3 dx + \int_2^3 \frac{d(x-1)}{x-1}\right) = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^3 + x\Big|_2^3 + \ln(x-1)\Big|_2^3\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 2 + 3 - 2 + \ln 2 - \ln 1\right) = 4\ln 2 - \frac{7}{4}.$$

Ответ: $4\ln 2 - \dfrac{7}{4}$.

Повышенный уровень

Задание № 7. Найти площадь, ограниченную линией $r = a\sin 3\varphi$.

Решение

Заданная линия — трехлепестковая роза (рис. 14).

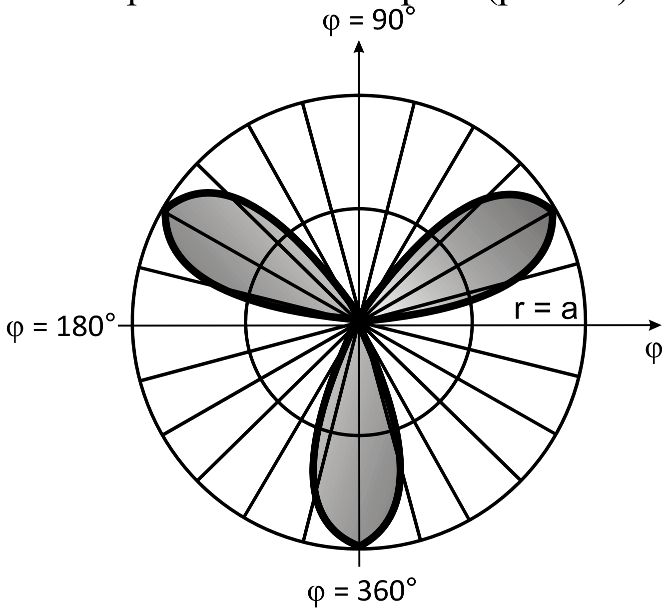

Рис. 14. Фигура

Для вычисления площади фигуры в полярных координатах используем формулу

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Найдем площадь половинки одного лепестка и умножим ее на 6:

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2(3\varphi)\,d\varphi = 3a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{3a^2}{2}\left(\varphi - \frac{1}{6}\cdot\sin 6\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{6}\sin\pi\right) - (0-0)\right) = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$ кв. ед.

Повышенный уровень

Задание № 8. Вычислить длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t \\ y = \left(t^2 - 2\right)\cos t - 2t\sin t \end{cases},$$

где $0 \le t \le \pi$.

Решение

Если уравнение кривой задано в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где $t_1 \le t \le t_2$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

Найдем $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = \left(t^2 - 2\right)' \sin t + \left(t^2 - 2\right)(\sin t)' + (2t)' \cos t + 2t(\cos t)' =$$

$$= 2t\sin t + \left(t^2 - 2\right)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2 \cos t,$$

$$y'(t) = \left(t^2 - 2\right)' \cos t + \left(t^2 - 2\right)(\cos t)' - (2t)' \sin t - 2t(\sin t)' =$$

$$= 2t\cos t - \left(t^2 - 2\right)\sin t - 2\sin t - 2t\cos t = -t^2 \sin t.$$

Тогда

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(t^2 \cos t\right)^2 + \left(-t^2 \sin t\right)^2}\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{t^4 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\, dt = \int_0^{\pi} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \text{ (ед.).}$$

Ответ: $\frac{\pi^3}{3}$ (ед.).

РАЗДЕЛ 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. Контрольная работа № 5 «Кратные и криволинейные интегралы»

Базовый уровень

Задание № 1. Вычислить интеграл (табл. 28).

Таблица 28. Исходные данные

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x}+5\right) dy$	2	$\int_1^4 dx \int_0^x (y+1) dy$
3	$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \sqrt{x} dy$	4	$\int_0^1 dx \int_x^{2\sqrt{x}} \left(y^2-1\right) dy$
5	$\int_1^4 dx \int_0^x \left(x^2+y\right) dy$	6	$\int_0^1 dx \int_x^{2\sqrt{x}} y dy$
7	$\int_{-1}^2 dx \int_0^x (x-y) dy$	8	$\int_0^3 dx \int_{-3x}^{x^2} x dy$
9	$\int_1^2 dx \int_0^x \left(x^2+1\right) dy$	10	$\int_1^2 dx \int_0^x (y+x) dy$

Задание № 2. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями (табл. 29). Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

Таблица 29. Исходные данные

Номер варианта	Уравнения поверхностей
1	$x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+3y+z-6=0$
2	$z=0,\ y=x^2,\ y+z=2$
3	$z=0,\ z=y,\ y=4-x^2$
4	$z=0,\ z=2y,\ y=9-x^2$
5	$z=0,\ y=\frac{1}{3}x^2,\ y+z=3$
6	$z=0,\ x=y^2,\ x+z=2$
7	$z=0,\ x=4-y^2,\ z=2x$
8	$z=0,\ x=y^2,\ x+z=3$

Номер варианта	Уравнения поверхностей
1	$x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+3y+z-6=0$
9	$z=0,\ x=9-y^2,\ z=2x$
10	$z=0,\ x=\dfrac{1}{2}y^2,\ x+z=2$

Задание № 3. Дан криволинейный интеграл и точки $A(0;\ 1)$, $B(3;\ 1)$, $C(3;\ 10)$ (табл. 30).

Вычислить данный интеграл по трем различным путям l:

1) по ломаной ABC;

2) по прямой AC;

3) по параболе $y=x^2+1$ от точки A до точки C.

Таблица 30. Исходные данные

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	$\int\limits_l (2x-2y)dx-(x+y^2)dy$	2	$\int\limits_l (y-x)dx+(x+y^2)dy$
3	$\int\limits_l (x^2-y)dx+(y-x)dy$	4	$\int\limits_l (2y+x)dx+(2x-1)dy$
5	$\int\limits_l (2x-2y^2)dx-(x+y)dy$	6	$\int\limits_l (y^2+1)dx+(1+2xy)dy$
7	$\int\limits_l (x+y^2)dx+2xydy$	8	$\int\limits_l (x-1)dx+(y^2+2)dy$
9	$\int\limits_l (x^2+2y)dx+(2x-y)dy$	10	$\int\limits_l (x-2y)dx-(x+y^2)dy$

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x x^2y\,dy$.

Решение.

Вычислим внутренний интеграл по переменной *y*, считая *x* постоянной величиной:

$$\int\limits_0^x x^2ydy=x^2\int\limits_0^x ydy=x^2\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x=x^2\cdot\frac{x^2}{2}-0=\frac{x^4}{2}.$$

Вычислим внешний интеграл по переменной x от функции, полученной при вычислении внутреннего интеграла:

$$\int\limits_0^2 \frac{x^4}{2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^4 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{x^5}{10}\Bigg|_0^2 = \frac{2^5}{10} - 0 = \frac{32}{10} = 3{,}2\,.$$

Итак,

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x x^2 y\, dy = 3{,}2\,.$$

Ответ: 3,2.

Задание 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $y=0$, $4x+3y-12=0$ и $z=9-x^2$ $(x \ge 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

Решение.

Построим тело. Учитывая, что $z=0$ – плоскость Oxy, $y=0$ – плоскость Oxz, $4x+3y-12=0$ – плоскость, параллельная оси Oz, $z=9-x^2$ – цилиндрическая поверхность, у которой направляющей служит парабола, а образующие параллельны оси Oy, строим цилиндрическое тело (рис. 15) и область интегрирования (рис. 16).

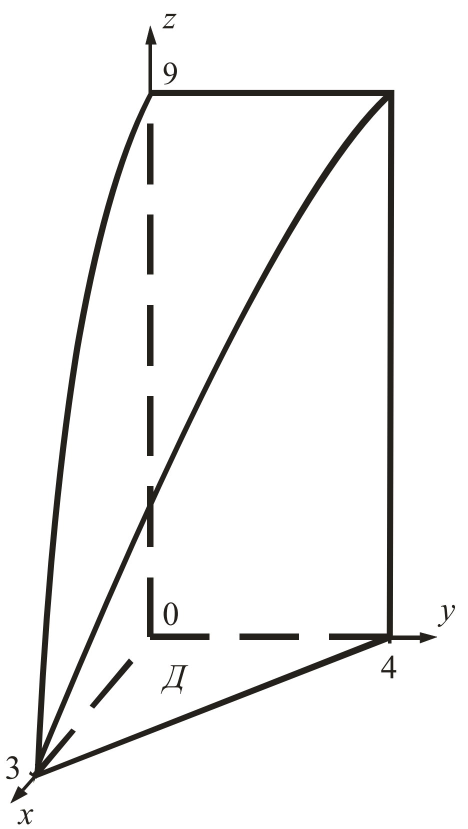

Рис. 15. Тело

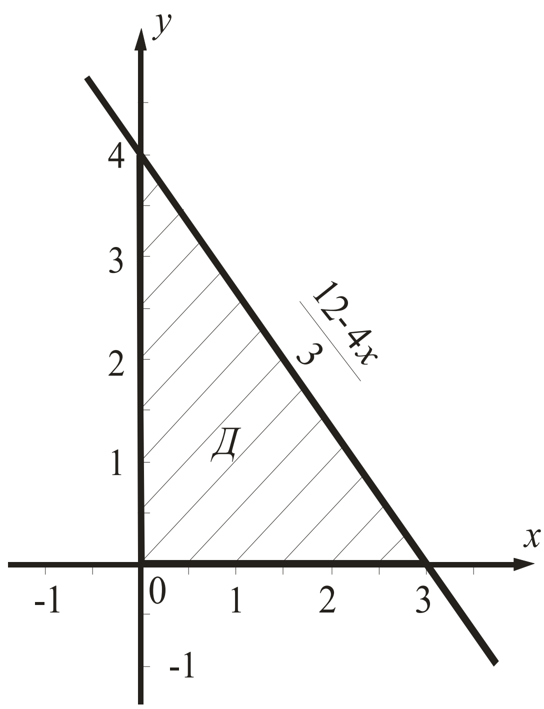

Рис. 16. Область интегрирования

Объем тела найдем по формуле

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy,$$

где $z=f(x,y)$ – уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху, D – проекция тела на плоскость xOy.

Тогда

$$V=\iint_D \left(9-x^2\right)dxdy=\int_0^3 dx\int_0^{\frac{12-4x}{3}}\left(9-x^2\right)dy=\int_0^3\left(9-x^2\right)y\Big|_0^{\frac{12-4x}{3}}dx=$$

$$=\int_0^3\left(9-x^2\right)\frac{12-4x}{3}dx=\int_0^3\left(36-12x-4x^2+\frac{4}{3}x^3\right)dx=$$

$$=\left(36x-6x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^4}{3}\right)\Bigg|_0^3=108-54-36+27=45.$$

Ответ: $V=45$ куб. ед.

Задание 3. Дан криволинейный интеграл $\int_l ydx+xdy$ и точки $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(4;2)$. Вычислить данный интеграл по трем различным путям l:

1) по ломаной ABC;
2) по прямой AC;
3) по кривой $y^2=x$ от точки A до точки C.

Решение.

Изобразим точки $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(4;2)$, а также пути интегрирования (рис. 17).

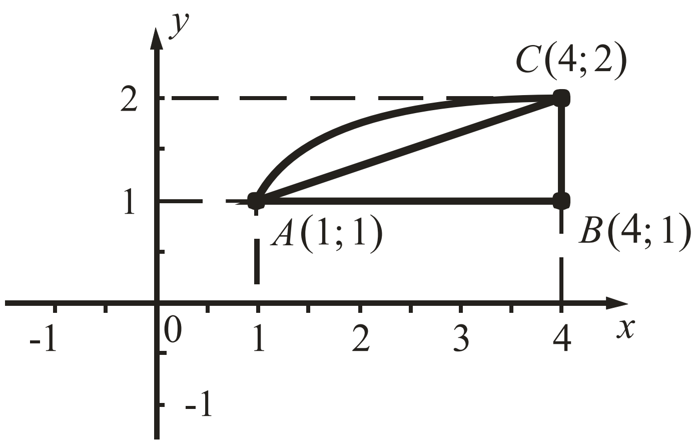

Рис. 17. Пути интегрирования

1) Интеграл по ломаной ABC заменим суммой интегралов по ее звеньям AB и BC:

На AB $y=1$, $dy=0$ и x изменяется от $x_A=1$ до $x_B=4$. Тогда

$$\int\limits_{AB} ydx+xdy=\int\limits_1^4 dx=x\Big|_1^4=4-1=3;$$

На BC $x=4$, $dx=0$ и y изменяется от $y_B=1$ до $y_C=2$. Тогда

$$\int\limits_{BC} ydx+xdy=\int\limits_1^2 4dy=4y\Big|_1^2=8-4=4.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{ABC} ydx+xdy=3+4=7.$$

2) Составим уравнение прямой AC. Воспользуемся уравнением, прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}; \qquad \frac{x-1}{4-1}=\frac{y-1}{2-1}; \qquad \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1},\ x=3y-2.$$

Таким образом, на прямой AC $x=3y-2$, $dx=3dy$ и y изменяется от $y_B=1$ до $y_C=2$.

Тогда

$$\int\limits_{AC} ydx+xdy=\int\limits_1^2\big(3ydy+(3y-2)dy\big)=\int\limits_1^2(3y+3y-2)dy=$$

$$=\int\limits_1^2(6y-2)dy=\left(3y^2-2y\right)\Big|_1^2=(12-4)-(3-2)=7.$$

3) На дуге параболы AC $y^2=x$, $dx=2ydy$ и y изменяется от $y_B=1$ до $y_C=2$. Тогда

$$\int\limits_{AC} ydx+xdy=\int\limits_1^2\left(y\cdot 2ydy+y^2dy\right)=3\int\limits_1^2 y^2dy=y^3\Big|_1^2=8-1=7.$$

В данном случае значение интеграла оказалось одинаковым по каждому из выбранных путей, то есть интеграл не зависит от пути интегрирования. Так бывает в интеграле $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, когда выполняется условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В данном интеграле $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$.

Ответ: 7.

РАЗДЕЛ 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Индивидуальное домашнее задание № 3 «Комплексные числа. Функции комплексной переменной»

Базовый уровень

Задание 1. Найти алгебраическую форму комплексного числа z (табл. 31), выполнив действия в показательной форме. Найти модуль $|z|$ и значение аргумента $\arg z$ комплексного числа z.

Таблица 31. Исходные данные

Номер варианта	z	Номер варианта	z
1	$z=\dfrac{4-4i}{(2-2i)^6}$	11	$z=\dfrac{(\sqrt{3}-i)^5}{(\sqrt{3}+i)^7}$
2	$z=\dfrac{(2-2i)^6}{(1-\sqrt{3}i)^6}$	12	$z=\dfrac{(3-3i)^3}{(1+\sqrt{3}i)^5}$
3	$z=\dfrac{(1-i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^5}$	13	$z=\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}{\left(-2-2i\right)^6}$
4	$z=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{(1-i)^4}$	14	$z=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^5}$
5	$z=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^3}{(1+i)^4}$	15	$z=\dfrac{\left(2+2i\right)^2}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}$
6	$z=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{(-2-2i)^4}$	16	$z=\dfrac{\left(4+4i\right)^8}{\left(2-2i\right)^6}$
7	$z=\dfrac{(1-i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$	17	$z=\dfrac{\left(2+2i\right)^6}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^6}$
8	$z=\dfrac{(1-i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3}$	18	$z=\dfrac{\left(1-i\right)^6}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^5}$
9	$z=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{20}}{(1-i)^{20}}$	19	$z=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{\left(1-i\right)^4}$

10	$z=\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$	20	$z=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{\left(1+i\right)^4}$

Задание 2. Решить квадратное уравнение (табл. 32). Корни уравнения найти в алгебраической форме.

Таблица 32. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$z^2+2z+26=0$	11	$2z^2+6z+5=0$
2	$z^2-4iz-13=0$	12	$3z^2+5iz+2=0$
3	$z^2+2iz-5=0$	13	$z^2+8iz-7=0$
4	$10z^2+2z+1=0$	14	$z^2+6iz-18=0$
5	$z^2-4z+20=0$	15	$5z^2+2iz+3=0$
6	$z^2+iz+2=0$	16	$z^2-2z+2=0$
7	$z^2-8z+17=0$	17	$z^2-2z+17=0$
8	$z^2+2iz+8=0$	18	$z^2-10iz-9=0$
9	$2z^2+3iz+2=0$	19	$5z^2-2iz-1=0$
10	$5z^2+2z+1=0$	20	$z^2+2z+10=0$

Задание 3. Дано уравнение. Найти z (табл. 33), выполнив действия в алгебраической форме.

Таблица 33. Исходные данные

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$z(1+4i)=-1+i$	11	$z(3-i)=2+i$
2	$z(3-i)=1+2i$	12	$z(1+4i)=-2+i$
3	$z(2-i)=3+i$	13	$z(-1+2i)=3+i$
4	$z(1-i)=-2+i$	14	$z(1-i)=1-2i$
5	$z(1+i)=2-4i$	15	$z(2+3i)=-1+i$
6	$z(1+i)=-3+2i$	16	$z(3-i)=1-2i$
7	$z(2+i)=1-i$	17	$z(3-i)=-2+i$
8	$z(3+i)=-2+i$	18	$z(-2+3i)=i-5$
9	$z(1+3i)=1+2i$	19	$z(1+4i)=-1+2i$
10	$z(2+3i)=1+i$	20	$z(1-i)=-2-i$

Задание 4

1) Найти значение многочлена $P(x)$ (табл. 34) в точке x_0.

Таблица 34. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Многочлен $P(x)$	x_0.
1	$P(x)=x^2-2ix-5$	$x_0=2-i$
2	$P(x)=7x^3-9x^2+x-6$	$x_0=2+i$
3	$P(x)=x^2+4x+20$	$x_0=1-i$
4	$P(x)=2x^2+4x-4$	$x_0=-1-2i$
5	$P(x)=x^2-4ix-13$	$x_0=3+2i$
6	$P(x)=x^3+3x^2-24x-80$	$x_0=5+i$
7	$P(x)=-x^3-3x^2+24x-80$	$x_0=5+i$
8	$P(x)=2x^3-5x^2-4x+12$	$x_0=2+2i$
9	$P(x)=x^2+2ix-5$	$x_0=2+i$
10	$P(x)=x^2-8x+12$	$x_0=2+i$
11	$P(x)=x^2+8ix-7$	$x_0=1-7i$
12	$P(x)=5x^2-3ix-5$	$x_0=3-i$
13	$P(x)=6x^3+3x^2-9x+11$	$x_0=-2-3i$
14	$P(x)=2x^3-3x^2-4x+4$	$x_0=1+2i$
15	$P(x)=x^2-x+1$	$x_0=4-i$
16	$P(x)=x^2-4ix-13$	$x_0=3-2i$
17	$P(x)=x^3+3x^2-24x-80$	$x_0=3+i$
18	$P(x)=x^3+3x^2-24x-80$	$x_0=5-2i$
19	$P(x)=2x^3-5x^2-4x+12$	$x_0=2-3i$
20	$P(x)=x^2+2ix-5$	$x_0=2-i$

2) Найти значение многочлена $P(x)$ (табл. 35) в точке x_0.

Таблица 35. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Многочлен $P(x)$	x_0
1	$P(x)=x^5+10x^3-20x^2+15x-4$	$x_0=-i$
2	$P(x)=8x^5-16x^4+16x^2-8x$	$x_0=i$
3	$P(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$	$x_0=i$

4	$P(x)=-10x^3+20x^2-15x+30$	$x_0=2i$
5	$P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$	$x_0=-3i$
6	$P(x)=x^4+2x^3-11$	$x_0=-3i$
7	$P(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$	$x_0=i$
8	$P(x)=x^4+7x^3+15x^2+13x+4$	$x_0=-i$
9	$P(x)=x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2$	$x_0=2i$
10	$P(x)=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$	$x_0=-3i$
11	$P(x)=x^4-2x^3+2x-1$	$x_0=3i$
12	$P(x)=x^4+11x^3-45x^2-81x+54$	$x_0=2i$
13	$P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$	$x_0=-2i$
14	$P(x)=x^6+6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$	$x_0=-i$
15	$P(x)=5x^3-6x^2-3x+4$	$x_0=4i$
16	$P(x)=x^4+7x^3-15x^2+13x+4$	$x_0=i$
17	$P(x)=x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2$	$x_0=i$
18	$P(x)=x^4+11x^3+45x^2+81x+54$	$x_0=i$
19	$P(x)=x^4-2x^3+2x-1$	$x_0=-4i$
20	$P(x)=x^4+11x^3+45x^2+81x+54$	$x_0=-2i$

Задание 5. Найти все значения корня (табл. 36).

Таблица 36. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Корень	Номер варианта	Корень
1	$\sqrt[5]{2+2i}$	11	$\sqrt[6]{2-2i}$
2	$\sqrt[5]{-5-5i}$	12	$\sqrt[4]{4-4i}$
3	$\sqrt[6]{\sqrt{3}+i}$	13	$\sqrt[5]{-4+4i}$
4	$\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$	14	$\sqrt[8]{1+i}$
5	$\sqrt[7]{\sqrt{3}-i}$	15	$\sqrt[4]{-2+2i}$
6	$\sqrt[6]{-2-2i}$	16	$\sqrt[8]{1-i}$
7	$\sqrt[5]{-3+3i}$	17	$\sqrt[6]{-4-4i}$
8	$\sqrt[8]{-1-i}$	18	$\sqrt[6]{3-3i}$
9	$\sqrt[6]{\sqrt{3}i-1}$	19	$\sqrt[5]{-1-\sqrt{3}i}$
10	$\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$	20	$\sqrt[8]{-\sqrt{3}+i}$

Задание 6. На комплексной плоскости построить множество точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям (табл. 37).

Таблица 37. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	1-е условие	2-е условие	3-е условие
1	2	3	4
1	$\operatorname{Im} z^2 = 4$	$\operatorname{Re}(2z+1) = 2$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 4, \\ \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z \end{cases}$
2	$\operatorname{Im}(z^2 - 2) = 2$	$\operatorname{Re}(z - 2i) = 3$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 3, \\ \operatorname{Im} z \le 2 \end{cases}$
3	$\operatorname{Im}(z^2 - 3) = 6$	$\operatorname{Im}(2z + yi) = 4$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 3, \\ \lvert\operatorname{Re} z\rvert > 2 \end{cases}$
4	$\operatorname{Re} z^2 = 4$	$\operatorname{Re}(z + y) = 2$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 2, \\ \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}$
5	$\operatorname{Re}(z^2 - 2i) = 4$	$\operatorname{Re}(3z - y) = 3$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 3, \\ \operatorname{Im} z \ge 1 \end{cases}$
6	$\operatorname{Re}(z^2 + 3i) = 4$	$\operatorname{Im}(z + xi) = 2$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 4, \\ \lvert\operatorname{Re} z\rvert < 2 \end{cases}$
7	$\operatorname{Re}(z^2 - 4i) = 1$	$\operatorname{Im}(z + xi) = 3$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 4, \\ \operatorname{Re} z \ge 2 \end{cases}$
8	$\operatorname{Im}(z^2 - 1) = 2$	$\operatorname{Re}(2z - y) = 4$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 2, \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$
9	$\operatorname{Im}(z^2 + 1) = 6$	$\operatorname{Re}(3z + y) = 6$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 2, \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$
10	$\operatorname{Im}(z^2 - 5) = 4$	$\operatorname{Im}(z + 2xi) = 4$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 3, \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$
11	$\operatorname{Im}(z^2 - 5) = 2$	$\operatorname{Im}(z - 2xi) = 6$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 3, \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$
12	$\operatorname{Re} z^2 = 9$	$\operatorname{Re}(z + 2) = y$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 2, \\ \operatorname{Im} z \le 0 \end{cases}$

13	$\mathrm{Re}\left(z^2+y^2\right)=4$	$\mathrm{Im}\left(z-4i\right)=x$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 4, \\ \mathrm{Im}\, z>0 \end{cases}$
14	$\mathrm{Re}\left(z^2+y^2\right)=9$	$\mathrm{Im}\left(z-3i\right)=x$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 4, \\ \lvert\mathrm{Re}\, z\rvert \ge 1 \end{cases}$
15	$\mathrm{Re}\left(z^2-x^2\right)=-1$	$\mathrm{Im}\left(z+2i\right)=x$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 2, \\ \lvert\mathrm{Re}\, z\rvert > 1 \end{cases}$
16	$\mathrm{Re}\left(z^2-x^2\right)=-4$	$\mathrm{Re}\left(3z-6\right)=y$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 3, \\ \lvert\mathrm{Im}\, z\rvert \le 2 \end{cases}$
17	$\mathrm{Im}\left(z^2+y^2\right)=2$	$\mathrm{Re}\left(z-2\right)=y$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 3, \\ \lvert\mathrm{Im}\, z\rvert > 1 \end{cases}$
18	$\mathrm{Im}\left(z^2-y^2\right)=6$	$\mathrm{Re}\left(2z-4\right)=y$	$\begin{cases} \lvert z\rvert < 4, \\ \lvert\mathrm{Re}\, z\rvert \ge 2 \end{cases}$
19	$\mathrm{Im}\left(z^2+y^2\right)=4$	$\mathrm{Re}\left(3z-3\right)=y$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 4, \\ \lvert\mathrm{Re}\, z\rvert < 1 \end{cases}$
20	$\mathrm{Re}\left(3z+y\right)=6$	$\mathrm{Im}\left(z+4i\right)=x$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \le 4, \\ \lvert z\rvert > 1 \end{cases}$

Пример решения типовых задач

Задание 1. Найти алгебраическую форму комплексного числа $z=\dfrac{4-4i}{\left(2-2i\right)^6}$, выполнив действия в показательной форме. Найти модуль $\lvert z\rvert$ и значение аргумента $\arg z$ комплексного числа z.

Решение

Запишем комплексные числа $z_1=4-4i$ и $z_2=2-2i$ в показательной форме.

Показательная форма комплексного числа $z=x+iy$ имеет вид:

$$z=re^{i\varphi},$$

где $r=\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ — модуль комплексного числа z;

$\varphi=\arg z$ — аргумент комплексного числа z, который находится по формуле:

$$\varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если точка, изображающая число } z, \text{ лежит в I или IV четверти},\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{если точка, изображающая число } z, \text{ лежит во II четверти},\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{если точка, изображающая число } z, \text{ лежит во II четвертию}.\end{cases}$$

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z_1=4-4i$:

$$|z_1|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2},$$

$$\arg z_1=\operatorname{arctg}\left(\frac{-4}{4}\right)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа z_1 имеет вид:

$$z_1=4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z_2=2-2i$:

$$|z_2|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2},$$

$$\arg z_2=\operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{2}\right)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа z_2 имеет вид:

$$z_2=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Найдем сначала показательную форму комплексного числа z. При этом при возведении в степень комплексного числа в показательной форме его модуль возводится в степень, а аргумент умножается на показатель степени, то есть, если $z=re^{i\varphi}$, то $z^n=r^ne^{in\varphi}$. При делении двух комплексных чисел в показательной форме их модули делятся, а аргументы вычитаются. Таким образом, получим

$$z=\frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\left(2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^6}=\frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\left(2\sqrt{2}\right)^6e^{-\frac{\pi}{4}i\cdot 6}}=\frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{512e^{-\frac{6\pi}{4}i}}=\frac{4\sqrt{2}}{512}e^{-\frac{\pi}{4}i-\left(-\frac{6\pi}{4}i\right)}=\frac{\sqrt{2}}{128}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

Отсюда $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{128}$ — модуль комплексного числа z. Так как $\varphi=\arg z\in(-\pi;\pi]$, то $\varphi=\arg z=\dfrac{5\pi}{4}-2\pi=-\dfrac{3\pi}{4}$ — аргумент комплексного числа z.

Тогда показательная форма комплексного числа z имеет вид:

$$z=\frac{\sqrt{2}}{128}e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа $z=x+iy$ имеет вид:

$$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right).$$

Тогда $z=\frac{\sqrt{2}}{128}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ — тригонометрическая форма данного комплексного числа z.

Получим его алгебраическую форму:

$$z=\frac{\sqrt{2}}{128}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{128}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{1}{128}-\frac{1}{128}i.$$

Итак, $z=-\frac{1}{128}-\frac{1}{128}i$.

Ответ: $z=-\frac{1}{128}-\frac{1}{128}i$, $|z|=\frac{\sqrt{2}}{128}$, $\arg z=-\frac{3\pi}{4}$.

Задание 2. Решить квадратное уравнение $z^2+2z+26=0$. Корни уравнения найти в алгебраической форме.

Решение

Воспользуемся известным алгоритмом нахождения корней квадратного уравнения:

$$z^2+2z+26=0;$$
$$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot26=4-104=-100;$$
$$\sqrt{D}=\sqrt{-100}=\pm10i;$$
$$z_1=\frac{-2+10i}{2}=-1+5i,\quad z_2=\frac{-2-10i}{2}=-1-5i.$$

Ответ: $z_1=-1+5i$, $z_2=-1-5i$.

Задание 3. Дано уравнение $z\left(1+4i\right)=-1+i$. Найти z, выполнив действия в алгебраической форме.

Решение

Найдем z:

$$z=\frac{-1+i}{1+4i}.$$

Чтобы выполнить деление в алгебраической форме, умножаем числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$z=\frac{-1+i}{1+4i}=\frac{(-1+i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{-1+4i+i-4i^2}{1-16i^2}=\frac{-1+5i+4}{1+16}=$$

$$=\frac{3+5i}{17}=\frac{3}{17}+\frac{5}{17}i.$$

Ответ: $z=\frac{3}{17}+\frac{5}{17}i$.

Задание 4. Найти значение многочлена $P(x)$ в точке x_0.

а) $P(x)=x^2-2ix-5$, $x_0=2-i$;

б) $P(x)=x^5+10x^3-20x^2+15x-4$, $x_0=-i$.

Решение

а) Найдем значение многочлена $P(x)=x^2-2ix-5$ в точке $x_0=2-i$:

$$P(x_0)=P(2-i)=(2-i)^2-2i\cdot(2-i)-5=4-2\cdot 2\cdot i+i^2-4i+2i^2-5=$$

$$=4-4i-1-4i-2-5=-4-8i.$$

б) Найдем значение многочлена $P(x)=x^5+10x^3-20x^2+15x-4$ в точке $x_0=-i$:

$$P(x_0)=P(-i)=(-i)^5+10(-i)^3-20(-i)^2+15(-i)-4=$$

$$=-i+10i-20\cdot(-1)-15i-4=-i+10i+20-15i-4=16-6i.$$

Ответ: а) $-4-8i$; б) $16-6i$.

Задание 5. Найти все значения корня $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение

Запишем число $z=-1+i$ в тригонометрической форме, для этого найдем его модуль и аргумент, используя формулы:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi.$$

Получим:

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{1}\right)+\pi=-\operatorname{arctg}1+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z=-1+i$ имеет вид:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Корень n-ой степени из комплексного числа $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$, не равного нулю, имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ ...,n-1$.

Тогда

$$\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),$$

где $k=0,1,2$.

Получаем три значения корня:

$$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Ответ: $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$,

$z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

Задание 6. На комплексной плоскости построить множества точек, которые задаются условиями:

1) $\mathrm{Re}\,z=2$;

2) $|z|<2$;

3) $\mathrm{Im}\,z^2=2$.

Решение

1) Для комплексного числа $z=x+iy$ действительная часть $\mathrm{Re}\,z=x$. Так как по условию $\mathrm{Re}\,z=2$, то $x=2$. Это уравнение прямой, перпендикулярной оси *Ox* (рис. 18).

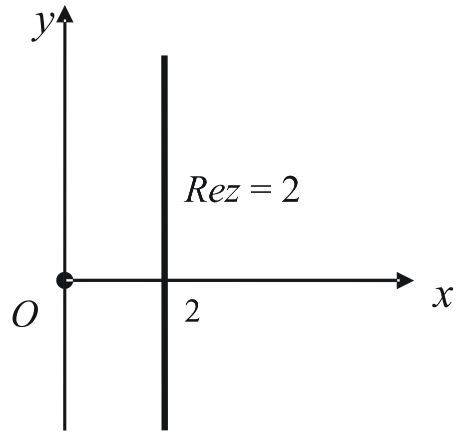

Рис. 18. Множество точек z, для которых Rez = 2

2) Для комплексного числа $z = x + iy$ имеем $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как $|z| < 2$, то $\sqrt{x^2 + y^2} < 2$, откуда $x^2 + y^2 < 4$. Это неравенство определяет внутреннюю часть круга с центром в начале координат и радиусом, равным 2 (рис. 19).

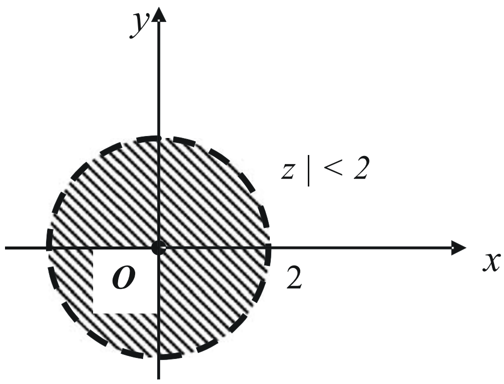

Рис. 19. Множество точек z, для которых | z | < 2

3) Если $z = x + iy$, то $z^2 = x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Тогда мнимая часть $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. Так как по условию $\operatorname{Im} z^2 = 2$, то $2xy = 2$, откуда $y = \dfrac{1}{x}$. Это уравнение гиперболы (рис. 20).

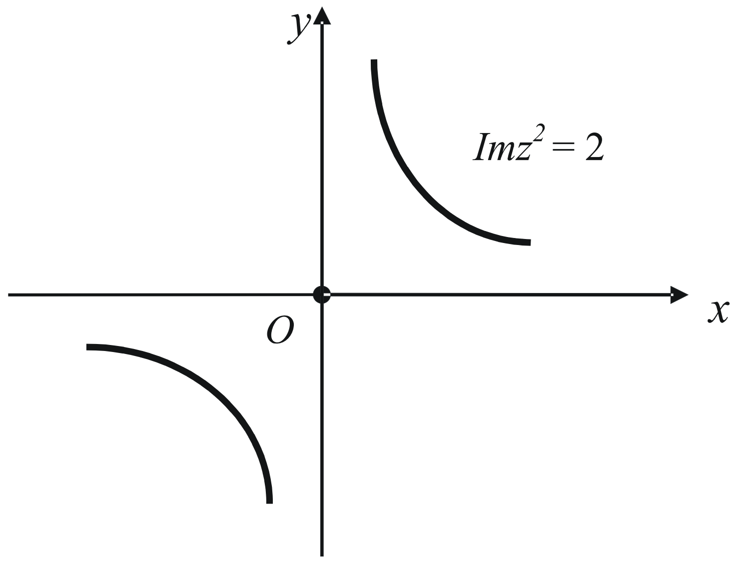

Рис. 20. Множество точек z,
для которых $Imz^2 = 2$

РАЗДЕЛ 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8.1. Индивидуальное задание № 4 «Решение дифференциальных уравнений»

Базовый уровень

Задание № 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 38):

Таблица 38. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$y - xy = \left(1 + x^2\right)y'$
2	$x\left(1 + y^2\right) + y\left(1 - x^2\right)y' = 0$
3	$y' = (2y + 1)ctgx$
4	$\left(1 + x^2\right)y' = y\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$
5	$\left(1 + x^2\right)y^3 + \left(1 - y^2\right)x^3 y' = 0$
6	$x\left(1 + y^2\right) + \left(1 + y^3\right)y' = 0$
7	$y' \cos x = (y + 1)\sin x$
8	$(2 + y)dx - (2 - x)dy = 0$
9	$\left(e^{2x} + 1\right)dy + ye^{2x}dx = 0$
10	$y'tgx - y = 0$
11	$y' \sin x - y\ln y = 0$
12	$y' = e^{x-y}$

13	$(e^x+2)y' = ye^x$
14	$(e^x+1)dy + e^x dx = 0$
15	$x^2 dy + (y-1)dx = 0$
16	$y'\cos x - y\sin x = 0$
17	$(1+x^2)y' = 1+y^2$
18	$e^y(1+x^2)y' - 2x(1+e^y) = 0$
19	$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$
20	$xy(1+x^2)y' = 1+y^2$

Задание № 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 39).

Таблица 39. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$xye^{\frac{x}{y}} + y^2 = x^2 y' e^{\frac{x}{y}}$
2	$(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$
3	$x\ln\frac{x}{y}dy - ydx = 0$
4	$xyy' = y^2 + 8x^2$
5	$y' = \frac{x-y}{x+y}$
6	$2x^2y' + x^2 + y^2 = 0$
7	$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$
8	$4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$
9	$y' = \frac{8x+5y}{5x-2y}$
10	$x^2y' + y^2 - 2xy = 0$
11	$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
12	$xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$
13	$xy' = y\ln\frac{y}{x}$
14	$(x^2 - y^2)y' = 2xy$
15	$y' = \frac{x+y}{x-y}$

16	$\left(x^2+y^2\right)dx-xydy=0$
17	$xy'-y=xtg\dfrac{y}{x}$
18	$xy'-y-\sqrt{xy}=0$
19	$y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$
20	$y'=\dfrac{y^2}{x^2+xy}$

Задание № 3.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 40).

Таблица 40. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$\left(1+x^2\right)y'+y=arctgx$
2	$y'\cos^2 x+y=tgx$
3	$xy'+y-x-1=0$
4	$x^2y'=2xy+3$
5	$xy'+y-3=0$
6	$\left(1+x^2\right)y'-2xy=\left(1+x^2\right)^2$
7	$y'-2xy=2xe^{x^2}$
8	$x^3y'+3x^2y=2$
9	$xy'-y=-2\ln x$
10	$xy'-y=x^3$
11	$y'-y=e^x$
12	$2xy'+y=2x^3$
13	$y'x\ln x-y=3x^3\ln^2 x$
14	$xy'-y=-\ln x$
15	$y'-y\cos x=-\sin 2x$
16	$xy'+y=x+1$
17	$y'\cos x+y\sin x=2x\cos^2 x$
18	$xy'-3y=x^4\ln x$
19	$xy'-2y=4x^3\cos^2 x$
20	$xy'-5y=e^xx^7$

Задание № 4.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 41).

Таблица 41. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	2
1	$3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$
2	$2y' - \frac{2x - 5}{x^2} y = \frac{5}{y}$
3	$y' - ytgx = -\frac{2}{3} y^4 \sin x$
4	$y' - y = xy^2$
5	$y' + 2y = (x + 1)y^{-2}$
6	$xy^2 y' = x^2 + y^3$
7	$y' + 2y = y^2 e^x$
8	$2xyy' - y^2 + x = 0$
9	$y' = -\frac{y}{x} - xy^2$
10	$xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$
11	$y' + 2y = 2x^3 y^3$
12	$xy' - y = x^3 y^2$
13	$xy' + y = -x^2 y^2$
14	$xy' + 2y = 3x^5 y^2$
15	$y' + y = -e^{2x} y^2$
16	$xy' - 2y = x^2 \sqrt{y}$
17	$y' - ytgx = y^2 \sin x \cos x$
18	$xy' + y = 2xy^2 \ln x$
19	$y' - ytgx = -y^2 \cos x$
20	$xy' = x^5 y^2 - 2y$

Задание № 5. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка, при указанных начальных условиях (табл. 42).

Таблица 42. Исходные данные

№ варианта	Уравнение	Начальные условия
1	2	3
1	$(y-2)y''=2(y')^2$	$y(0)=3,\ y'(0)=1$
2	$y'y''=2y$	$y(0)=0,\ y'(0)=0$
3	$y''-e^y y'=0$	$y(0)=0,\ y'(0)=1$
4	$x^3 y''=4\ln x$	$y(1)=4,\ y'(1)=0$
5	$y''+y'tgx=\cos x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$
6	$xy''=\ln x+1$	$y(1)=0,\ y'(1)=0$
7	$xy''-2y'=2x^4$	$y(1)=\frac{1}{5},\ y'(1)=4$
8	$y''=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	$y(0)=1,\ y'(0)=2$
9	$y''-y'ctgx=\sin x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$
10	$xy''-y'-x^2=0$	$y(1)=\frac{4}{3},\ y'(1)=3$
11	$2y''=e^{4y}$	$y(0)=0,\ y'(0)=\frac{1}{2}$
12	$y''y^3=1$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$
13	$y'y''=1$	$y(0)=\frac{1}{3},\ y'(0)=1$
14	$yy''=(y')^2$	$y(0)=1,\ y'(0)=2$
15	$2(y')^2=(y-1)y''$	$y(0)=0,\ y'(0)=1$
16	$y''=xe^x$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$
17	$(x^2+1)y''=2xy'$	$y(0)=1,\ y'(0)=3$
18	$2y''-3y^2=0$	$y(-2)=1,\ y'(-2)=-1$
19	$2yy''=(y')^2$	$y(0)=4,\ y'(0)=2$
20	$2yy''=1+(y')^2$	$y(0)=1,\ y'(0)=1$

Задание № 6. Найти общее решение дифференциального уравнения (табл. 43).

Таблица 43. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$y''+2y'-3y=6x$
2	$y''-4y'=4x^2-8x$
3	$y''+2y'+2y=x^2+1$
4	$y''-4y'=8x+4$
5	$y''-4y'=x^2+x$
6	$y''+2y'+2y=3x^2+x$
7	$y''+2y'+2y=x+2$
8	$y''+2y'+2y=x^3+x+1$
9	$y''-4y'=12x^2$
10	$y''-3y'=2-6x$
11	$y''-2y'=6x^2-10x+12$
12	$y''+2y'+2y=x^3+2x^2+3$
13	$y''+2y'+2y=x^2-1$
14	$y''-4y'=x^2+x-4$
15	$y''+2y'+2y=x^2+2x+1$
16	$y+2y'+2y=2x^3+2x^2$
17	$y''+2y'-3y=6x$
18	$y''+2y'-3y=6x$
19	$y''-2y'-8y=16x^2+2$
20	$y''-y=x^2$

Задание № 7. Найти общее решение дифференциального уравнения (табл. 44).

Таблица 44. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$9y''-6y'+y=\sqrt[3]{e^x}$
2	$3y''+2y'-y=\sqrt[3]{e^x}$
3	$y''-3y'+2y=e^{2x}$
4	$y''-4y'+4y=3e^x$
5	$4y''-12y'+9y=\sqrt{e^{3x}}$
6	$y''-4y'+4y=2e^{-2x}$
7	$y''-4y'+4y=5e^{-x}$

8	$y'' - 4y' + 4y = \frac{9}{4}\sqrt{e^x}$
9	$4y'' - 20y' + 25y = \sqrt{e^{5x}}$
10	$9y'' + 6y' + y = 2\sqrt[3]{e^{-x}}$
11	$y'' - 4y' + 4y = 8e^{4x}$
12	$y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{4}\sqrt{e^{3x}}$
13	$y'' - 4y' + 4y = 36e^{-4x}$
14	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
15	$y'' - 4y' + 4y = \frac{25}{4}\sqrt{e^{-x}}$
16	$y'' - 3y' - 4y = 3e^{-x}$
17	$9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}$
18	$9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}$
19	$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$
20	$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

Задание № 8. Найти общее решение дифференциального уравнения (табл. 45).

Таблица 45. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$y'' + 9y = \sin 3x + \cos 3x$
2	$4y'' + 9y = \sin\frac{3}{2}x$
3	$y'' + 4y = 2\sin 2x$
4	$y'' - 4y = 5\sin 3x - 10\cos 3x$
5	$y'' - 4y = 5\sin x + \cos x$
6	$y'' + y = 4\sin x$
7	$y'' - 4y = 13\cos 3x$
8	$y'' + 9y = 3\cos 3x$
9	$2y'' + y = \sin\frac{x}{\sqrt{2}}$
10	$y'' - 4y = \sin 4x + 16\cos 4x$
11	$y'' - 4y = \sin 2x - 2\cos 2x$
12	$y'' + 2y' + 2y = x^3 + 2x^2 + 3$

13	$y'' + 2y = \sin\sqrt{2x}$
14	$y'' - 4y = 5\sin x + \cos x$
15	$y'' - 4y = 29\cos 5x$
16	$y'' - 4y = 4\sin 4x + \cos 4x$
17	$y'' + 9y = \cos 3x$
18	$6y'' + y = \cos\dfrac{x}{\sqrt{6}}$
19	$y'' - 4y = 4\sin 2x$
20	$y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$

Повышенный уровень

Задание № 9. Электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных активного сопротивления R, катушки индуктивности с индуктивностью L, конденсатора с емкостью C, заряженного до разности потенциалов U_0, замыкается в момент времени t_0. Найти зависимость силы тока от времени.

Пример выполнения типовых заданий

Задание № 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$.

Решение

Уравнение $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$ является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, деля обе части уравнения на $\left(1+x^2\right)\sqrt{1+y^2}$, получим:

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = 0.$$

Интегрируем обе части:

$$\int\frac{x}{1+x^2}\,dx + \int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = C,$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1+y^2\right) = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\sqrt{1+y^2}=C.$$

Получили общий интеграл данного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\sqrt{1+y^2}=C$.

Задание № 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\left(xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$.

Решение

Уравнение $\left(xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$ является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части уравнения на dx:

$$\left(xy+y^2\right)-x^2\frac{dy}{dx}=0.$$

Так как $\frac{dy}{dx}=y'$, получим:

$$\left(xy+y^2\right)-x^2y'=0,$$

$$x^2y'=xy+y^2,$$

$$y'=\frac{xy+y^2}{x^2},$$

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}.$$

Сделаем замену $u=\frac{y}{x}$, где u — некоторая функция переменной x. Тогда $y=ux$. Дифференцируя, получим $y'=u'x+u$.

В результате замены заданное уравнение примет вид:

$$u'x+u=u+u^2$$

или

$$u'x=u^2,$$

$$x\frac{du}{dx}=u^2.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные, проинтегрируем и получим его общий интеграл:

$$xdu=u^2dx,$$

$$\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C,$$

Так как $u = \frac{y}{x}$, то имеем:

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C,$$

откуда

$$y = -\frac{x}{\ln|x| + C}.$$

Получили общее решение данного однородного дифференциального уравнения.

Ответ: $y = -\frac{x}{\ln|x| + C}$.

Задание № 3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x^2 y' - 5xy - 1 = 0$.

Решение

Уравнение $x^2 y' - 5xy - 1 = 0$ является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части уравнения на x^2:

$$y' - \frac{5}{x} y = \frac{1}{x^2}.$$

Сделаем замену $y = uv$, где u и v — некоторые функции переменной x. Дифференцируя, получим $y' = u'v + uv'$.

В результате замены заданное уравнение примет вид:

$$u'v + uv' - \frac{5}{x} uv = \frac{1}{x^2}$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{5}{x} v\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Выберем функцию v так, чтобы имело место равенство

$$v' - \frac{5}{x} v = 0.$$

Найдем из него функцию v, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{5v}{x},$$
$$\frac{dv}{v}=\frac{5dx}{x},$$
$$\int\frac{dv}{v}=5\int\frac{dx}{x},$$
$$\ln|v|=5\ln|x|,$$
$$\ln|v|=\ln\left|x^5\right|,$$
$$v=x^5.$$

Найдем из него функцию v, как частное решение:

$$u'v=\frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v=x^5$, получим уравнение:

$$x^5u'=\frac{1}{x^2}.$$

Найдем из него функцию u, как общее решение:

$$x^5\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2},$$
$$x^5du=\frac{dx}{x^2},$$
$$du=\frac{dx}{x^7},$$
$$\int du=\int\frac{dx}{x^7},$$
$$u=-\frac{1}{6x^6}+C.$$

Тогда

$$y=uv=\left(-\frac{1}{6x^6}+C\right)x^5=Cx^5-\frac{1}{6x}.$$

Итак, $y=Cx^5-\dfrac{1}{6x}$ — общее решение данного линейного дифференциального уравнения.

Ответ: $y=Cx^5-\dfrac{1}{6x}$.

Задание № 4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy'+2y-y^2=0$.

Решение

Уравнение $xy' + 2y = y^2$ является уравнением Бернулли.

Разделим обе части уравнения на y^2, получим:

$$\frac{xy'}{y^2} + \frac{2}{y} = 1.$$

Введем новую переменную

$$z = \frac{1}{y},$$

где z — функция переменной x. Дифференцируя ее по правилу производной сложной функции, имеем:

$$z' = -\frac{1}{y^2}y'.$$

В результате замены получим линейное уравнение

$$-xz' + 2z = 1$$

или

$$z' - \frac{2}{x}z = -\frac{1}{x}.$$

Решим его с помощью замены $z = uv$, $z' = u'v + uv'$, которая приводит уравнение к виду:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = -\frac{1}{x}$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = -\frac{1}{x}.$$

Выберем функцию v так, чтобы имело место равенство

$$v' - \frac{2}{x}v = 0.$$

Найдем из него функцию v, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = 2\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\left|x^2\right|,$$

$$v = x^2.$$

При таком выборе функции v функция u находится из уравнения

$$u'v = -\frac{1}{x}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v = x^2$, получим уравнение:

$$x^2 u' = -\frac{1}{x}.$$

Найдем из него функцию *u*, как общее решение:

$$x^2 \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x},$$

$$x^2 du = -\frac{dx}{x},$$

$$du = -\frac{dx}{x^3},$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x^3},$$

$$u = \frac{1}{2x^2} + C.$$

Тогда

$$z = uv = \left(\frac{1}{2x^2} + C\right)x^2 = \frac{1}{2} + Cx^2.$$

Так как $z = \frac{1}{y}$, то

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} + Cx^2,$$

откуда

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2} + Cx^2}$$

или

$$y = \frac{2}{1 + 2Cx^2}.$$

Получили общее решение данного дифференциального уравнения.

Ответ: $y = \dfrac{2}{1 + 2Cx^2}$.

Задание № 5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{x^2} - \frac{y'}{x}$, если $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

Решение

Уравнение $y'' = \frac{1}{x^2} - \frac{y'}{x}$ не содержит явным образом функцию y, поэтому является дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка с помощью замены $y' = p$, где $p = p(x)$. Тогда $y'' = p'$.

В результате замены уравнение примет вид:

$$p' = \frac{1}{x^2} - \frac{p}{x}$$

или

$$p' + \frac{p}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения применим замену $p = uv$, $p' = u'v + uv'$. В результате которой уравнение примет вид:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2}$$

или

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Выберем функцию v так, чтобы имело место равенство

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

Найдем из него функцию v, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

При таком выборе функции v функция u находится из уравнения

$$u'v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v = \frac{1}{x}$, получим уравнение:

$$\frac{1}{x}u' = \frac{1}{x^2}.$$

Найдем из него функцию *u*, как общее решение:

$$\frac{du}{xdx} = \frac{1}{x^2},$$

$$du = \frac{dx}{x},$$

$$\int du = \int \frac{dx}{x},$$

$$u = \ln|x| + C_1.$$

Тогда

$$p = uv = \left(\ln|x| + C_1\right)\frac{1}{x} = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{C_1}{x}.$$

Так как $p = y'$, то имеем:

$$y' = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{C_1}{x}.$$

Используем начальное условие $y'(1) = 2$. Подставляя в последнее равенство $x = 1$, $y' = 2$, найдем C_1:

$$2 = \frac{\ln 1}{1} + \frac{C_1}{1},$$

$$C_1 = 2.$$

Тогда

$$y' = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{2}{x}.$$

Интегрированием найдем из полученного уравнения функцию *y*:

$$y = \int\left(\frac{\ln|x|}{x} + \frac{2}{x}\right)dx = \int \ln|x| d\left(\ln|x|\right) + 2\int\frac{dx}{x} = \frac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + C_2.$$

Итак, получили:

$$y = \frac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + C_2.$$

Используем начальное условие $y(1) = 1$. Подставляя в последнее равенство $x = 1$, $y = 1$, найдем C_2:

$$1 = \frac{\ln^2 1}{2} + 2\ln 1 + C_2,$$

$$C_2 = 1.$$

Следовательно,

$$y = \frac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + 1.$$

Получили частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

Ответ: $y = \dfrac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + 1$.

Задание № 6. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1$.

Решение

Уравнение $y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;
$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;
$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k = 0.$$

Его корни: $k_1 = 0$ и $k_2 = -2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x}$$

или

$$y_{оо} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой многочлен вто-

рой степени и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx .$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C ,$$

$$y''_{чн} = 6Ax + 2B .$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$6Ax + 2B + 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = x^2 + 2x - 1$$

или

$$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2 + 2x - 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 2, \\ 2B + 2C = -1. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$A = \frac{1}{6},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{3}{4}.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x .$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x .$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x .$$

Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x .$

Задание № 7. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$.

Решение

Уравнение $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;
$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;
$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Его корни: $k_1 = -1$ и $k_2 = 2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой показательную функцию вида $f(x) = ae^{mx}$ и $m = 2$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = Axe^{2x}.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$

$$y''_{чн} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - Ae^{2x} - 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = 9e^{2x}.$$

Приведя подобные слагаемые и разделив обе части уравнения на e^{2x}, определим коэффициент A:

$$3Ae^{2x} = 9e^{2x},$$

$$3A = 9,$$

$$A = 3.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = 3xe^{2x}.$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$.

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 4y = 4\cos 2x - 12\sin 2x$.

Решение.

Уравнение $y'' + 4y = 4\cos 2x - 12\sin 2x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;
$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;
$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0$$

или

$$k^2 = -4.$$

Его корни: $k_1 = -2i$ и $k_2 = 2i$.

Так как корни характеристического уравнения комплексные сопряженные вида $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right).$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = e^{0x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$$

или

$$y_{оо} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой тригонометри-

ческую функцию вида $f(x) = a\cos nx + b\sin nx$ и числа $k = \pm ni = \pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$

$$y''_{чн} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x +$$

$$+ x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) =$$

$$= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x +$$

$$+ 4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x$$

или

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получим:

$$\begin{cases} -4A = -12, \\ 4B = 4; \end{cases}$$

Тогда $A = 3$, $B = 1$.

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x)$.

РАЗДЕЛ 10. РЯДЫ

10.1. Индивидуальное задание № 5 «Ряды»

Базовый уровень

Задание № 1. Для заданного ряда записать общий член и с его помощью, если возможно, выяснить вопрос о сходимости (расходимости) ряда (табл. 46).

Таблица 46. Исходные данные

Номер варианта	Задание	Номер варианта	Задание
1	$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\dots$	11	$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}\dots$
2	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots$	12	$2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\dots$
3	$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\dots$	13	$\frac{1}{5}+\frac{2}{9}+\frac{3}{13}+\dots$
4	$\frac{1}{11}+\frac{2}{21}+\frac{3}{31}+\dots$	14	$\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{3}{7}+\dots$
5	$\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\dots$	15	$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\dots$
6	$\frac{2}{11}+\frac{4}{21}+\frac{6}{31}+\dots$	16	$2+4+6\dots$
7	$1+3+5+\dots$	17	$\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{3}{7}+\dots$
8	$\frac{7}{2}+\frac{7}{4}+\frac{7}{6}+\dots$	18	$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\dots$
9	$6+\frac{6}{2^3}+\frac{6}{3^3}+\dots$	19	$\frac{1}{9}+\frac{2}{10}+\frac{3}{11}+\dots$
10	$\frac{5}{2}+\frac{10}{3}+\frac{15}{4}+\dots$	20	$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\dots$

Задание № 2. Для данного ряда записать три его первых члена и найти сумму ряда (табл. 47).

Таблица 47. Исходные данные

Номер варианта	Ряд 1	Ряд 2
1	2	3
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{40n^2-28n-45}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$

5	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2+35n-6}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$
18	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$
20	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$

Задание № 3. С помощью признака Даламбера или Коши исследовать на сходимость данные ряды (табл. 48).

Таблица 48. Исходные данные

Номер варианта	Ряд 1	Ряд 2
1	2	3
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^3+2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^3$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^4$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+25}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$

14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{2^n}$
18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{4^n}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+8}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5n+2}$
20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{2^n}$

Задание № 4. Дан ряд (табл. 49).

Требуется:

1) исследовать его на сходимость по признаку Лейбница;
2) вычислить приближенное значение суммы, взяв три первых члена ряда;
3) оценить допускаемую при этом погрешность.

Таблица 49. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Задание	Номер варианта	Задание
1	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10^n}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{5^n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{6^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+5}{10^n}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+3}{5^n}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{5^n}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{10^n}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4n+2}{10^n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4n+1}{5^n}$

6	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{5^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{n+2}{4^n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2n+1}{10^n}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{5n+1}{5^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n-2}{5^n}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^5}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n+1}{10^n}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n}{10^n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n-1}{5^n}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n^4}$

Задание № 5. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n x^n}{b^n\sqrt{n+1}}$ (табл. 50). При заданных значениях a и b написать первые три члена ряда, найти область сходимости ряда.

Таблица 50. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	a	b	Номер варианта	a	b
1	2	3	11	3	5
2	4	7	12	5	9
3	7	6	13	2	5
4	3	2	14	4	3
5	5	2	15	6	4
6	3	7	16	4	5
7	8	3	17	7	4
8	5	7	18	2	6
9	3	4	19	7	5
10	5	8	20	2	4

Задание № 6. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка с начальным условием (табл. 51). Найти решение задачи Коши в виде ряда Маклорена (ограничиться тремя первыми ненулевыми членами разложения).

Таблица 51. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Уравнение, начальное условие
1	2
1	$y'=2y^2+3x^4+4x-18,\ y(0)=3$
2	$y'=3y^2+4x^4+2x-3,\ y(0)=1$
3	$y'=y^2+8x^4+9x-4,\ y(0)=2$

4	$y' = 2y^2 + 6x^3 - 6x - 8,\ y(0) = 2$
5	$y' = 3y^2 + 3x^2 - 2x - 27,\ y(0) = 3$
6	$y' = 4y^2 + 4x^3 + 6x - 4,\ y(0) = 1$
7	$y' = 5y^2 - 8x^4 + 3x - 5,\ y(0) = 1$
8	$y' = 3y^2 + x^4 + 4x - 12,\ y(0) = 2$
9	$y' = y^2 - x^4 + 2x - 9,\ y(0) = 3$
10	$y' = 2y^2 + x^3 - 3x - 8,\ y(0) = 2$
11	$y' = 6y^2 + 2x^4 + 2x - 6,\ y(0) = 1$
12	$y' = 3y^2 - 4x^3 + 2x - 12,\ y(0) = 2$
13	$y' = 8y^2 + x^3 - 3x - 8,\ y(0) = 1$
14	$y' = 4y^2 + 2x^3 + 3x - 16,\ y(0) = 2$
15	$y' = y^2 + x^4 - 2x - 9,\ y(0) = 3$
16	$y' = 2y^2 - 2x^3 + 3x - 2,\ y(0) = 1$
17	$y' = 5y^2 + 4x^4 - x - 20,\ y(0) = 2$
18	$y' = y^2 - 3x^3 + 2x - 9,\ y(0) = 3$
19	$y' = 6y^2 + 3x^3 + 4x - 6,\ y(0) = 1$
20	$y' = 3y^2 - 4x^4 - 5x - 12,\ y(0) = 2$

Задание № 7. Вычислить приближенное значение определенного интеграла с точностью $\delta = 0{,}001$ (табл. 52).

Таблица 52. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	$\int_0^{0,4} x^2 \sin x^2 dx$	11	$\int_0^{0,8} \frac{x^4}{1+x^6} dx$
2	$\int_0^{0,4} x \sin x^3 dx$	12	$\int_0^{0,5} \frac{x^2}{1+x^4} dx$
3	$\int_0^{0,5} x^3 \sin x^2 dx$	13	$\int_0^{0,4} x^2 \ln\left(1+x^2\right) dx$
4	$\int_0^{0,3} x^2 \cos x^2 dx$	14	$\int_0^{0,4} x \ln\left(1+x^3\right)' dx$

5	$\int_0^{0,4} x^4 \cos x^2 dx$	15	$\int_0^{0,4} x^2 arctgx^2 dx$
6	$\int_0^{0,5} x^5 \cos x^3 dx$	16	$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$
7	$\int_0^{0,4} x^4 e^{-x} dx$	17	$\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$
8	$\int_0^{0,5} x^5 e^{-x} dx$	18	$\int_0^{0,4} \frac{e^x-1}{x} dx$
9	$\int_0^{0,6} x^6 e^{-x} dx$	19	$\int_0^{0,1} \sqrt[3]{1+x^3} dx$
10	$\int_0^{0,6} \frac{x^6}{1+x^8} dx$	20	$\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx$

Примеры решения типовых задач

Задание № 1. Для данного ряда

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\ldots$$

Записать общий член и с его помощью, если возможно, выяснить вопрос о сходимости (расходимости) ряда.

Решение

Найдем формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\ldots u_n+\ldots.$$

Числители членов ряда образуют числовую последовательность, состоящую из натуральных чисел:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots .$$

Знаменатели членов ряда образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 6$ и разностью $d = 1$:

$$6, 7, 8, \ldots, a_n, \ldots$$

n-й член арифметической прогрессии находится по формуле:

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

Поэтому

$$a_n = 6 + 1\cdot(n-1) = 6 + n - 1 = n + 5.$$

Таким образом, общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{n}{n+5}.$$

Итак,

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{n+5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}.$$

Проверим, выполняется ли необходимый признак сходимости, состоящий в том, что если ряд сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{5}{n}} = 1 \neq 0.$$

Необходимый признак не выполняется, значит, ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ расходится.

Задание № 2. Для данного ряда записать три его первых члена и найти сумму ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{40n^2 - 28n - 45}$

Решение

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \ldots$.

Это геометрический ряд, его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = \frac{1}{4}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Этот ряд сходится.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии находится по формуле:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Тогда сумма данного ряда

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $S = \frac{1}{2}$.

2. По формуле общего члена ряда $a_n = \dfrac{14}{49n^2 - 28n - 45}$ найдем несколько первых членов ряда:

при $n = 1$ $a_1 = \dfrac{14}{49 \cdot 1^2 - 28 \cdot 1 - 45} = \dfrac{14}{-24} = -\dfrac{7}{12}$,

при $n = 2$ $a_2 = \dfrac{14}{49 \cdot 2^2 - 28 \cdot 2 - 45} = \dfrac{14}{95}$,

при $n = 3$ $a_3 = \dfrac{14}{49 \cdot 3^2 - 28 \cdot 3 - 45} = \dfrac{14}{312} = \dfrac{7}{156}$.

Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{40n^2 - 28n - 45} = -\frac{7}{12} + \frac{14}{95} + \frac{7}{156} + \ldots .$$

Преобразуем формулу общего члена ряда $a_n = \dfrac{14}{49n^2 - 28n - 45}$, разложив знаменатель $49n^2 - 28n - 45$ на множители:

$$49n^2 - 28n - 45 = 0;$$

$$D = 14^2 + 45 \cdot 49 = 49(4 + 45) = 49^2;$$

$$n_{1,2} = \frac{14 \pm 49}{49};$$

$$n_1 = \frac{63}{49} = \frac{9}{7}, \quad n_2 = -\frac{35}{49} = -\frac{5}{7}.$$

Тогда

$$49n^2 - 28n - 45 = 49\left(n - \frac{9}{7}\right)\left(n + \frac{5}{7}\right) = (7n - 9)(7n + 5).$$

Итак,

$$a_n = \frac{14}{(7n - 9)(7n + 5)}.$$

Разложим полученную дробь на сумму простых дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$a_n = \frac{14}{(7n - 9)(7n + 5)} = \frac{A}{7n - 9} + \frac{B}{7n + 5} = \frac{A(7n + 5) + B(7n - 9)}{(7n - 9)(7n + 5)}.$$

Записываем равенство числителей:

$$14 = A(7n+5) + B(7n-9);$$
$$14 = 7An + 5A + 7Bn - 9B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n в левой и правой частях полученного равенства:

$$\begin{cases} 7A + 7B = 0, \\ 5A - 9B = 14; \end{cases} \left| \begin{matrix} n \\ n^0 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} A = -B, \\ -14B = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1; \\ B = -1. \end{cases}$$

Тогда общий член ряда примет вид

$$a_n = \frac{A}{7n-9} + \frac{B}{7n+5} = \frac{1}{7n-9} - \frac{1}{7n+5}.$$

Используя его, выпишем первые n членов ряда:

$$a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12},$$
$$a_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{19},$$
$$a_3 = \frac{1}{12} - \frac{1}{26},$$
$$a_4 = \frac{1}{19} - \frac{1}{32},$$
$$a_5 = \frac{1}{26} - \frac{1}{40}, \ \dots ,$$
$$a_{n-3} = \frac{1}{7n-30} - \frac{1}{7n-16},$$
$$a_{n-2} = \frac{1}{7n-23} - \frac{1}{7n-9},$$
$$a_{n-1} = \frac{1}{7n-16} - \frac{1}{7n-2},$$
$$a_n = \frac{1}{7n-9} - \frac{1}{7n+5}.$$

Найдем сумму первых n членов ряда (n-ю частичную сумму)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Получим:

$$S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5}.$$

Найдем предел n-й частичной суммы ряда при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7n-2}-\frac{1}{7n+5}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}.$$

Так как предел n-й частичной суммы при $n \to \infty$ существует и конечен, то ряд сходится и его сумма равна значению этого предела, то есть

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 0,3.$$

Ответ: $S = 0,3$.

Задание № 3. С помощью признака Даламбера или Коши исследовать на сходимость данные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

Решение

1. Для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots$ на сходимость используем интегральный признак Коши, согласно которому, если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на множестве натуральных чисел являются значениями непрерывной положительной функции $f(x)$, монотонно убывающей на промежутке $[1;\ +\infty)$, то ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ на $[1;\ +\infty)$. Она непрерывна и положительна на этом промежутке. Значения функции $f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f(2)=\frac{1}{2}$, $f(3)=\frac{1}{\sqrt{5}}$, ..., то есть $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ монотонно убывает на промежутке $[1;\ +\infty)$.

Значит можно применять интегральный признак Коши. Найдем несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x+2}\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b+2}-2\sqrt{3}\right) = +\infty.$$

Так как несобственный интеграл расходится, то, согласно интегральному признаку Коши, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ расходится.

2. Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ на сходимость используем признак Даламбера, согласно которому, если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если $q<1$; расходится, если $q>1$; требуются дополнительное исследование, если $q=1$.

Для данного ряда $a_n=\frac{n}{3^n}$, $a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}<1.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, то, согласно признаку Даламбера, данный ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ сходится.

Задание № 4. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$.

Требуется:

1) исследовать его на сходимость по признаку Лейбница,
2) если ряд сходится, исследовать его на абсолютную сходимость,
3) вычислить приближенное значение суммы, взяв три первых члена ряда;
4) оценить допускаемую при этом погрешность.

Решение

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}=\frac{1}{10}-\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}-\frac{4}{10000}+...$ является знакочередующимся.

Проверим, выполняется ли признак Лейбница, согласно которому, если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и предел модуля общего члена ряда при $n\to\infty$ равен нулю, то знакочередующийся ряд сходится.

Члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$ монотонно убывают по абсолютной величине: $\frac{1}{10}>\frac{2}{100}>\frac{3}{1000}>\frac{4}{10000}>...$

Найдем предел модуля общего члена ряда при $n\to+\infty$, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{10^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{10^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{\left(10^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{10^x\ln 10}=0$$

Согласно признаку Лейбница, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$ сходится.

2. Выясним, как сходится знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$, условно или абсолютно. Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}.$$

Исследуем его на сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)10^n}{10^{n+1}n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10n}=$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{10}<1.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$ сходится. Следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$ сходится абсолютно.

3. Вычислим приближенное значение суммы ряда, взяв три первых члена:

$$S \approx S_3 = \frac{1}{10} - \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} = 0,1 - 0,02 + 0,003 = 0,983.$$

4. Оценим погрешность вычисления.

Если ряд удовлетворяет признаку Лейбница, то его остаток по модулю не превышает абсолютной величины первого члена остатка.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{10^n} = \frac{1}{10} - \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} - \underbrace{\frac{4}{10000} + \frac{5}{100000} + \ldots}_{\text{остаток ряда}};$$

$$|a_4| = \left| -\frac{4}{10000} \right| = 0,0004.$$

Поэтому погрешность вычислений $\delta \leq 0,0004$.

Задание № 5. Написать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение

Возьмем последовательно n = 1, 2, 3, …. Тогда данный ряд записывается в виде:

$$\frac{5x}{1^2 \cdot 3} + \frac{5^2 x^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{5^3 x^3}{3^2 \cdot 3^3} + \ldots + \frac{5^n x^n}{n^2 \cdot 3^n} + \ldots.$$

Это степенной ряд. Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{n+1} x^{n+1} n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1} 5^n x^n} \right| = \frac{5}{3} |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{5}{3} |x|.$$

Данный ряд сходится абсолютно при тех значениях x, которые удовлетворяют неравенству:

$$\frac{5}{3}|x| < 1, \text{ или } |x| < \frac{3}{5}, \text{ или } -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}.$$

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала. При $x = -\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Последний ряд является знакочередующимся. Исследуем его по признаку Лейбница:

1) абсолютная величина его общего члена стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

2) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине: $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \ldots$.

Следовательно, по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится. Значит, $x=-\frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

При $x=\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Исследуем сходимость этого ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Значит, $x=\frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

Таким образом, $-\frac{3}{5}\le x\le\frac{3}{5}$ — область сходимости данного степенного ряда.

Ответ: $\left[-\frac{3}{5};\ \frac{3}{5}\right)$.

Задание № 6. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка $y'=2y^2+3x^4+4x-18$ и начальное условие $y(0)=3$. Найти решение задачи Коши в виде ряда Маклорена (ограничиться тремя первыми ненулевыми членами разложения).

Решение

Будем искать решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^n(0)}{n!}x^n+\ldots$$

По условию $y(0)=3$.

Найдем $y'(0)$, для этого подставим $x=0;\ y=3$ в уравнение $y'=2y^2+3x^4+4x-18$.

Получим

$$y'(0)=2\cdot 9+3\cdot 0+4\cdot 0-18=0.$$

Найдем $y''(0)$:

$$y''(x)=\left(2y^2+3x^4+4x-18\right)'=4y^2y'+12x^3+4;$$

$$y''(0)=4\cdot 3^2\cdot 0+12\cdot 0^3+4=4.$$

Найдем $y'''(0)$:

$$y'''(x)=\left(4y^2y'+12x^3+4\right)'=8y\left(y'\right)^2+4y^2y''+36x^2;$$

$$y'''(0)=8\cdot 3\cdot 0^2+4\cdot 3^2\cdot 4+36\cdot 0=144.$$

Нашли три первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд решения дифференциального уравнения:

$$y(x)=3+\frac{4}{2!}x^2+\frac{144}{3!}x^3+\ldots$$

$$y(x)=3+2x^2+24x^3+\ldots$$

Ответ: $y(x)=3+2x^2+24x^3+\ldots$

Задание № 7. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_0^{0,4} x^2\sin x^2dx$ с точностью δ = 0,001.

Решение

Будем использовать разложение в ряд Маклорена функции $y=\sin x$:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\ldots$$

Заменим x на x^2, получим разложение в степной ряд функции $y=\sin x^2$:

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Умножив обе части последнего равенства на x^2, получим разложение в ряд функции $y=x^2\sin x^2$:

$$x^2\sin x^2=x^4-\frac{x^8}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}-\frac{x^{16}}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Промежуток интегрирования $[0;\ 0,4]$ принадлежит области сходимости ряда. В области сходимости ряд можно почленно интегрировать.

Получим

$$\int_0^{0,4} x^2 \sin x^2 dx = \int_0^{0,4} \left(x^4 - \frac{x^8}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} - \frac{x^{16}}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{4n-2}}{(2n-1)!} + ... \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^9}{9 \cdot 3!} + \frac{x^{13}}{5! \cdot 13} - \frac{x^{17}}{7! \cdot 17} + ... + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{4n-1}}{(4n-1) \cdot (2n-1)!} + ... \right) \Bigg|_0^{0,4} =$$

$$= \frac{0,01024}{5} - \frac{0,4^9}{9 \cdot 6} + \frac{0,4^{13}}{120 \cdot 13} + ... + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{4n-1}}{(4n-1) \cdot (2n-1)!} + ...$$

После интегрирования получили знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница (члены монотонно убывают по абсолютной величине и предел модуля общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю).

Находим член ряда, меньший заданной точности:

$$|a_2| = \left| -\frac{0,4^9}{5 \cdot 6} \right| \approx 0,000005 < 0,001$$

Остаток ряда по модулю не превышает абсолютной величины своего первого члена, то есть $|a_2|$.

Итак,

$$\int_0^{0,4} x^2 \sin^2 x dx \approx \frac{0,01024}{5} \approx 0,0020 \approx 0,002.$$

Ответ: 0,002.

РАЗДЕЛ 11. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

11.1. Контрольная работа № 6 «Теория вероятностей»

Базовый уровень

Задание № 1. Решить задачу (табл. 53).

Таблица 53. Исходные данные

№ варианта	Задача
1	2
1	Вероятность того, что одна газетная экспедиция доставит газеты вовремя, равна 0,95, а для второй эта вероятность равна 0,98. Найти вероятность того, что вовремя доставят газеты: а) только одна экспедиция; б) хотя бы одна экспедиция.

2	Из 12 вопросов студент не знает 3. Найти вероятность того, что в случайно выбранном билете, содержащем 3 вопроса, будет не менее двух известных студенту.
3	Вероятность того, что при измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, при первом измерении равна 0,1, а при втором 0,15. Найти вероятность того, что в результате двух измерений ошибка будет допущена: а) только в одном случае; б) в обоих случаях измерение будет произведено без ошибок.
4	Среди 15 лотерейных билетов 3 выигрышных. Найти вероятность того, что среди наудачу отобранных 3 билетов не менее двух выигрышных.
5	Вероятность того, что первый цех выполнит заказ в срок, равна 0,95, второй цех — 0,8. Найти вероятность того, что: а) только один цех выполнит заказ в срок; б) хотя бы один цех не выполнит заказ в срок.
6	Вероятность того, что при расчете будет допущена ошибка для первого студента, равна 0,01; для второго 0,02. Найти вероятность того, что при расчете: а) оба студента не допустят ошибку; б) не допустит ошибку хотя бы один студент.
7	В студенческой группе 15 человек, среди которых 5 юношей. Найти вероятность того, что среди наудачу отобранных для дежурства 3 человек не менее двух девушек.
8	Отдел технического контроля проверяет партию из 20 изделий. Партия принимается, если среди наудачу отобранных 5 изделий будет не более одной нестандартной. Найти вероятность того, что партия будет принята, если в этой партии 4 нестандартных изделия.
9	Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен на отлично, равна 0,95, для второго экзамена эта вероятность равна 0,85. Найти вероятность того, что студент сдаст на отлично: а) только один экзамен; б) хотя бы один экзамен
10	Вероятность попадания в цель по удаляющейся мишени при первом выстреле равна 0,9, при втором 0,8, при третьем 0,7. Найти вероятность того, что при трех выстрелах будет: а) только одно попадание; б) хотя бы одно попадание.
11	Среди 20 деталей 5 нестандартных. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей есть хотя бы одна нестандартная.
12	Вероятности бесперебойной работы для каждого из двух станков соответственно равны 0,95 и 0,8. Найти вероятность того, что за смену: а) произойдет остановка только одного станка; б) остановится хотя бы один станок.

13	Для практики студентам предоставлено 10 мест в Костромском районе и 5 мест в Красносельском районе. Найти вероятность того, что два определенных студента поедут на практику в один и тот же район.
14	Для практики студентам предоставлено 12 мест в Ярославской области и 8 мест в Ивановской области. Найти вероятность того, что два определенных студента поедут в разные области.
15	Вероятность того, что автобус из Москвы прибудет с опозданием, равна 0,05, из Ярославля — 0,07. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день: а) оба автобуса приедут вовремя; б) опоздает только один автобус.
16	Вероятности войти в сборную команду академии для каждого из трех студентов соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в результате отборочных соревнований в сборную войдет: а) только один студент; б) хотя бы один студент.
17	Собрание из 12 человек, среди которых 8 мужчин, выбирает делегацию из 4 человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдут не менее трех мужчин.
18	Среди 20 деталей 5 нестандартных. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей не более одной нестандартной.
19	На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, среди которых 5 женщин. Найти вероятность того, что в случайно выбранной смене мужчин окажется не менее двух, если в смене занято три человека.
20	На двух станках штампуют детали. Вероятность того, что за смену первый станок допустит брак, равна 0,05, для второго эта вероятность равна 0,04. Найти вероятность того, что за смену допустит брак: а) только один станок; б) хотя бы один станок.

Задание № 2. Решить задачу (табл. 54).

Таблица 54. Исходные данные

№ варианта	Задача
1	2
1	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,81. Найти вероятность того, что из 250 посаженных семян прорастет ровно 200.
2	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,64. Найти вероятность того, что из 225 посаженных семян прорастет ровно 158.
3	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,36. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян прорастет ровно 340.

4	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 400 посаженных семян прорастет ровно 330.
5	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 посаженных семян прорастет ровно 95.
6	Семена пшеницы содержат 0,2% сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 6 семян сорняков.
7	Всхожесть семян пшеницы составляет 90%. Определить наиболее вероятное число всходов из 200 посеянных семян.
8	Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Написать закон распределения вероятностей попаданий в цель при 5 выстрелах. Построить многоугольник распределения вероятностей.
9	Вероятность всхожести пшеницы равна 0,8. Какова вероятность того, что из 5 семян взойдет не менее трех?
10	Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится 4 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) три раза; б) не более двух раз.
11	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,75. Найти вероятность того, что из 200 посаженных семян прорастет ровно 180.
12	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,73. Найти вероятность того, что из 160 посаженных семян прорастет ровно 130.
13	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,45. Найти вероятность того, что из 700 посаженных семян прорастет ровно 500.
14	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 400 посаженных семян прорастет ровно 330.
15	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,75. Найти вероятность того, что из 200 посаженных семян прорастет ровно 190.
16	Семена пшеницы содержат 0,3% сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 5 семян сорняков.
17	Всхожесть семян пшеницы составляет 80%. Определить наиболее вероятное число всходов из 175 посеянных семян.
18	Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Написать закон распределения вероятностей попаданий в цель при 4 выстрелах. Построить многоугольник распределения вероятностей.
19	Вероятность всхожести пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из 5 семян взойдет не менее двух?
20	Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,85. Производится 3 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) два раза; б) не менее одного раза.

Задание № 3. Дана вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз (табл. 55).

Таблица 55. Исходные данные

№ варианта	n	p	k_1	k_2
1	*2*	*3*	*4*	
1	360	0,8	280	300
2	490	0,6	320	350
3	640	0,9	500	540
4	225	0,2	50	60
5	810	0,4	340	400
6	250	0,7	150	180
7	300	0,3	110	130
8	625	0,8	480	500
9	100	0,5	60	80
10	256	0,9	200	220
11	360	0,7	270	310
12	460	0,8	320	400
13	630	0,9	500	600
14	255	0,3	150	180
15	800	0,6	540	700
16	280	0,8	190	250
17	300	0,4	100	150
18	650	0,9	580	650
19	300	0,7	160	200
20	255	0,9	200	230

Задание № 4. Случайная величина X задана рядом распределении (табл. 56). Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Таблица 56. Исходные данные

№ варианта	Закон распределения			
1	2			
1	X	–3	1	2
	p	0,1	0,6	0,3
2	X	1	3	4
	p	0,1	0,5	0,4
3	X	–1	0	3
	p	0,3	0,2	0,5
4	X	–1	2	4
	p	0,2	0,4	0,4

5	X	–3	–1	0
	p	0,3	0,4	0,3
6	X	–2	1	2
	p	0,1	0,4	0,5
7	X	–4	–1	0
	p	0,3	0,4	0,3
8	X	15	13	10
	p	0,1	0,3	0,6
9	X	8	5	3
	p	0,2	0,4	0,4
10	X	–5	–1	3
	p	0,5	0,3	0,2
11	X	–7	–5	–1
	p	0,5	0,3	0,2
12	X	–12	–10	–6
	p	0,5	0,2	0,3
13	X	3	5	8
	p	0,4	0,5	0,1
14	X	1	4	8
	p	0,5	0,3	0,2
15	X	–4	0	5
	p	0,2	0,4	0,4
16	X	–5	–1	3
	p	0,5	0,3	0,2
17	X	–7	–5	–1
	p	0,3	0,5	0,2
18	X	–1	2	4
	p	0,4	0,2	0,4
1	2			
19	X	1	3	4
	p	0,3	0,1	0,6
20	X	–12	–10	–6
	p	0,2	0,1	0,7

Задание № 5. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения (табл. 57).

Найти:

1) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности);

2) математическое ожидание $M(X)$;

3) дисперсию $D(X)$;

4) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Таблица 57. Исходные данные

№ варианта	Функция распределения
1	2
1	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right), \text{ при } 1<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$
2	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ 3x^2+2x, \text{ при } 0<x\le \frac{1}{3},\\ 1, \text{ при } x>\frac{1}{3}.\end{cases}$
3	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 2,\\ \frac{x}{2}-1, \text{ при } 2<x\le 4,\\ 1, \text{ при } x>4.\end{cases}$
4	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ x^3, \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
5	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -1,\\ \frac{1}{4}(x+1)^2, \text{ при } -1<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
6	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{1}{5}\left(x^2+4x\right), \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
7	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -2,\\ \frac{1}{9}(x+2)^2, \text{ при } -2<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
8	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x^2+x}{6}, \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$

9	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x, \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
10	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x^3}{27}, \text{ при } 0<x\le 3,\\ 1, \text{ при } x>3.\end{cases}$
11	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{9}(x-1)^2, \text{ при } 1<x\le 4,\\ 1, \text{ при } x>4.\end{cases}$
12	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 4,\\ x-4, \text{ при } 4<x\le 5,\\ 1, \text{ при } x>5.\end{cases}$
13	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -2,\\ \frac{1}{16}(x+2)^2, \text{ при } -2<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$
14	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x^3}{8}, \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$
15	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{3}(x-1), \text{ при } 1<x\le 4,\\ 1, \text{ при } x>4.\end{cases}$
16	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{1}{3}(x^2+2x), \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
17	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{1}{7}x^2+\frac{6}{7}x, \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$

18	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{1}{27}x^2+\dfrac{2}{9}x, \text{ при } 0<x\le 3,\\ 1, \text{ при } x>3.\end{cases}$
19	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le \dfrac{1}{4},\\ \left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2, \text{ при } \dfrac{1}{4}<x\le \dfrac{5}{4},\\ 1, \text{ при } x>\dfrac{5}{4}.\end{cases}$
20	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \dfrac{1}{25}(x-1)^2, \text{ при } 1<x\le 6,\\ 1, \text{ при } x>6.\end{cases}$

Повышенный уровень:

Задание №6. Текущая цена ценной бумаги представляет собой нормально распределенную случайную величину X со средним 100 усл. ед. и дисперсией 9. Найти вероятность того, что цена актива будет находиться в пределах от 91 до 109 усл. ед.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание № 1. Решить задачу:

Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,9 для первого, 0,8 для второго и 0,7 для третьего. Найти вероятность того, что при аварии:

а) сработает только один сигнализатор;

б) сработает хотя бы один сигнализатор;

в) все три сигнализатора сработают.

Решение

а) Обозначим события:

A — сработает только один сигнализатор,

A_i — i-й сигнализатор сработает, где i = 1, 2, 3.

Тогда $\overline{A_i}$ — i-й сигнализатор не сработает, где i = 1, 2, 3.

По условию $P(A_1)=0{,}9$, $P(A_2)=0{,}8$, $P(A_3)=0{,}7$.

Тогда по формуле вероятности противоположного события

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$$

имеем

$$P\left(\overline{A_1}\right)=0,1,\ P\left(\overline{A_2}\right)=0,2,\ P\left(\overline{A_3}\right)=0,3.$$

Событие A можно представить в виде:

$$A=A_1\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}+\overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3}+\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3.$$

Используя формулы вероятности суммы несовместных событий и вероятности произведения независимых событий

$$P\left(A_1+A_2+\ldots+A_n\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\ldots+P\left(A_n\right),$$

$$P\left(A_1A_2\ldots A_n\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)\ldots P\left(A_n\right),$$

получим вероятность события A:

$$P\left(A\right)=P\left(A_1\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3\right)=$$

$$=P\left(A_1\right)\ P\left(\overline{A_2}\right)\ P\left(\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2\right)P\left(\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(A_3\right)=$$

$$=0,9\cdot 0,2\cdot 0,3+0,1\cdot 0,8\cdot 0,3+0,1\cdot 0,2\cdot 0,7=0,092.$$

$$P\left(A\right)=0,092.$$

б) Пусть событие B — сработает хотя бы один сигнализатор.

Рассмотрим событие $\overline{B}$ — все три сигнализатора не сработают , которое является противоположным к событию B:

$$\overline{B}=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}.$$

Используя формулы вероятности противоположного события и вероятности произведения независимых событий, получим вероятность события B:

$$P\left(B\right)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)=$$

$$=1-0,1\cdot 0,2\cdot 0,3=0,994.$$

в) Пусть событие C — все три сигнализатора срабатывают, т.е.

$$C=A_1A_2A_3.$$

По формуле вероятности произведения независимых событий:

$$P\left(C\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)P\left(A_3\right)=0,9\cdot 0,8\cdot 0,7=0,504.$$

Задание №2. Решить задачу:

Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

Решение

Обозначим событие: A — деталь высшего сорта.

По условию:
$n = 26$,
$p = 0{,}4$,
$q = 1 – p = 1 – 0{,}4 = 0{,}6$,
$k = 13$.

Найдем вероятность $P_{26}(13)$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Вычислим x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{13 - 26 \cdot 0{,}4}{\sqrt{26 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} \approx \frac{2{,}6}{2{,}498} \approx 1{,}04.$$

По таблице приложения 3 найдем $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(1{,}04) \approx 0{,}2323.$$

Тогда искомая вероятность

$$P_{26}(13) \approx \frac{1}{2{,}498} \cdot 0{,}2323 \approx 0{,}093.$$

Ответ: 0,093.

Задание № 3.

Дана вероятность $p = 0{,}8$ появления события A в каждом из 100 независимых испытаний. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится не менее 75 раз и не более 90 раз.

Решение

По условию: $n = 100$,
$p = 0{,}8$,
$q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$,
$k_1 = 75$,
$k_2 = 90$.

Найдем вероятность $P_{100}(75,\ 90)$.

Так как n большое, воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,5 .$$

Тогда

$$P_{100}(75,\ 90) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) \approx \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

Найдем $\Phi(1,25)$, $\Phi(2,5)$ по таблице значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (приложение 4):

$$\Phi(1,25) \approx 0,3944 ,$$

$$\Phi(2,5) \approx 0,4938 .$$

Тогда искомая вероятность

$$P_{100}(75,\ 90) \approx 0,4938 + 0,3944 \approx 0,8882 .$$

Ответ: 0,8882.

Задание № 4. Случайная величина X задана рядом распределения (табл. 58):

Таблица 58. Ряд распределения с. в. X

X	–1	6	13	20	27
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение

1. Математическое ожидание дискретной с. в. X найдем по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Получим:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -1 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 + 13 \cdot 0,4 + 20 \cdot 0,2 + 27 \cdot 0,1 = 12,3 .$$

2. Дисперсию с. в. X найдем по формуле

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 .$$

Составим ряд распределения с. в. X^2. Для этого возможные значения с. в. X возведем в квадрат, а соответствующие вероятности оставим такими же (табл. 59).

Таблица 59. Ряд распределения с.в. X^2

X^2	1	36	169	400	729
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Найдем математическое ожидание с.в. X^2:

$$M\left(X^2\right)=1\cdot 0,2+36\cdot 0,1+169\cdot 0,4+400\cdot 0,2+729\cdot 0,1=224,3.$$

Тогда

$$D\left(X\right)=224,3-\left(12,3\right)^2=224,3-151,29=73,01.$$

3. Вычислим среднее квадратическое отклонение с.в. X:

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}=\sqrt{73,01}\approx 8,5.$$

Ответ: $M(X)=12,3$, $D(X)=73,01$, $\sigma\left(X\right)=\sqrt{73,01}\approx 8,5$.

Задание № 5. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x^3 & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$

Найти:

1) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности);

2) математическое ожидание $M(X)$;

3) дисперсию $D(X)$;

4) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение

1. Дифференциальную функцию распределения $f(x)$ непрерывной с. в. X найдем по формуле

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right).$$

Получим:

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 3x^2 & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

2. Математическое ожидание непрерывной с. в. X найдем по формуле:

$$M\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx.$$

Так как функция $f(x)$ при $x<0$ и при $x>1$ равна нулю, то имеем

$$M(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^1=\frac{3}{4}.$$

3. Дисперсию $D(X)$ определим по формуле:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Найдем математическое ожидание $M\left(X^2\right)$ по формуле:

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Так как функция $f(x)$ при $x<0$ и при $x>1$ равна нулю, то имеем

$$M\left(X^2\right)=\int_0^1 x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx=\left.\frac{3x^5}{5}\right|_0^1=\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$D(X)=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}.$$

4. Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$ (рис. 21, 22).

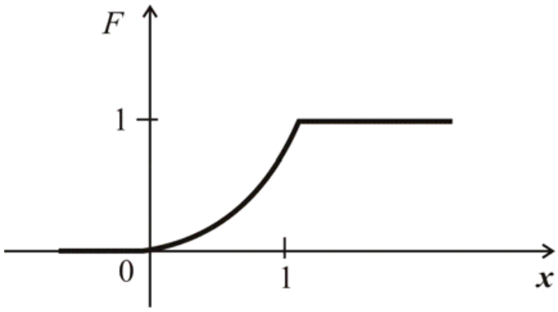

Рис. 21. График функции $y=F(x)$

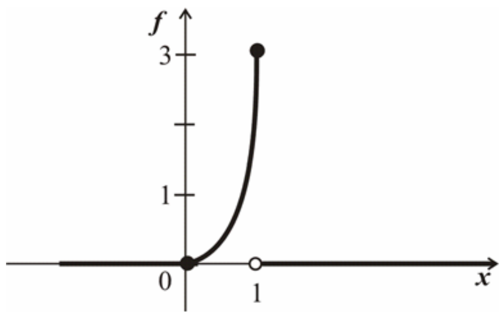

Рис. 22. График функции $y=f(x)$

ЗАДАНИЯ К НЕКОТОРЫМ ТЕМАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Конспект № 1. Матрицы, их виды. Действия над матрицами

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / ред. Л.Н. Журбенко, Ю.М. Данилов. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 10, 17-19.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Что называется матрицей?
2. Виды матриц?
3. Как выполняется сложение матриц?
4. Как выполняется умножение матрицы на число?
5. Как выполняется умножение матриц?
6. В каком случае можно выполнять умножение матриц?
7. Обладает ли умножение матриц переместительным свойством?
8. Вычислите сумму элементов первого столбца матрицы

$$C = 2A - 3B\text{, если } A = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 123 \\ 11 & 34 & -56 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 4 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Найдите матрицу $C = A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 123 \\ 11 & 34 & -56 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдите алгебраические дополнения элементов a_{21}, a_{33}.

Конспект № 2. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов

Самостоятельно изучите материал по источникам:

Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / ред. Л.Н. Журбенко, Ю.М. Данилов. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 21-40.

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — С. 277-304.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Какие линейные операции выполняются над векторами?
2. Изобразите два произвольных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, найдите векторы

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b};\ \overline{d} = \overline{a} - \overline{b};\ 2\overline{a};\ -\frac{1}{2}\overline{b}.$$

3. Как выполняются линейные операции над векторами в координатной форме?

4. Даны векторы $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 7\overline{k}$ и $\overline{b} = 6\overline{i} - 8\overline{j} + \overline{k}$. Найдите координаты вектора $\overline{c} = 5\overline{a} - 2\overline{b}$.

5. Что называют скалярным произведением двух векторов?

6. Какими свойствами обладает скалярное произведение?

7. Что называют скалярным квадратом вектора?

8. Как находится скалярное произведение векторов через их координаты?

9. Каково условие перпендикулярности двух векторов?

10. Как с помощью скалярного произведения найти угол между векторами?

11. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если длина вектора $\overline{a}$ равна 5, длина вектора $\overline{b}$ равна 4, а угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 60°.

12. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если

$$A(3;-6;4),\ B(-4;0;3),\ C(5;-1;4).$$

13. Найдите косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если

$$\overline{a} = (5;-2;8),\ \overline{b} = (4;1;-1).$$

14. Найдите значение λ, при котором векторы $\overline{a} = (5;-2;\lambda)$ и $\overline{b} = (4;\lambda;-3)$ перпендикулярны.

Конспект № 3. Полярная система координат на плоскости

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — С. 44-46.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи.

1. Что называют полярной системой координат на плоскости?
2. Что называют прямоугольными координатами точки на плоскости?
3. Как связаны полярные и прямоугольные координаты точки?
4. Каким уравнением задается линия в полярной системе координат?
5. Построить точку $M\left(1;\dfrac{3\pi}{4}\right)$ в полярной системе координат.
6. Дана точка $A\left(3;\dfrac{5\pi}{4}\right)$ в полярной системе координат. Найти ее координаты в прямоугольной декартовой системе координат.
7. Дана точка $B\left(-\sqrt{3};1\right)$ в прямоугольной декартовой системе координат. Найти ее координаты в полярной системе координат.
8. Построить кривую $r = 1 + \cos\varphi$ в полярной системе координат. Найти в справочнике название этой кривой.

Конспект № 4. Поверхности в пространстве

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 76-83.

Составьте таблицу 60.

Таблица 60. Поверхности в пространстве

Название поверхности	Уравнение	Изображение
1. Эллиптический цилиндр		
2. Параболический цилиндр		
3. Гиперболический цилиндр		
4. Эллипсоид		
5. Сфера		
6. Однополостный гиперболоид		
7. Двухполостный гиперболоид		
8. Эллиптический параболоид		
9. Гиперболический параболоид		
10. Конус второго порядка		

Выполните задания:

1. Расположите уравнения поверхностей в следующем порядке: цилиндр, сфера, гиперболоид.

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

2) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$

3) $x^2 + z^2 = 4$

2. Расположите уравнения поверхностей в следующем порядке: параболоид, цилиндр, конус.

1) $y + x^2 + 1 = 0$

2) $x^2 + y + z^2 = 0$

3) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

Конспект № 5. Основные элементарные функции, их свойства и графики

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] . Ч. 1 : Тридцать шесть лекций / Д.Т. Письменный. — 4-е изд., 6-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2011. — С. 104-106.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Что называют функцией одной переменной?

2. Что называется областью определения функции одной переменной?

3. Что называется множеством значений функции одной переменной?

4. Какая функция называется четной? Приведите пример четной функции. Какова особенность графика четной функции?

5. Какая функция называется нечетной? Приведите пример нечетной функции. Какова особенность графика нечетной функции?

6. Какая функция называется периодической? Приведите пример периодической функции. Какова особенность графика периодической функции?

7. Какой период называют основным?

8. Какая функция называется ограниченной? Приведите пример ограниченной функции.

9. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$;

2) $y = \dfrac{\lg(x+5)}{x}$.

10. Найдите множество значений функции:

1) $y = 3\sin x - 2$;

2) $y = x^2 - 6x + 5$.

11. Исследуйте на четность (нечетность) функции:

1) $y = x^4 \sin 7x$;

2) $y = \lg\cos x + x^2$.

12. Укажите основной период функции:

1) $y = 2\sin 6x$;

2) $y = \cos\dfrac{x}{2}$;

3) $y = -2tg3x + 1$;

4) $y = ctg(4x - 2)$.

13. Какие функции относятся к основным элементарным?

14. Заполните таблицу 61.

Таблица 61. Основные элементарные функции

Обозначение функции	Область определения $D(y)$	Область значений $E(y)$	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
Степенная функция						
$y = x^n$ $n \in \mathrm{N}$, n — четное						
$y = x^n$ $n \in \mathrm{N}$, n — нечетное						
$y = x^{-n}$ $n \in \mathrm{N}$, n — четное						
$y = x^{-n}$ $n \in \mathrm{N}$, n — нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$ n — нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$ n — четное						
Показательная функция						
$y = a^x$ $0 < a < 1$						
$y = a^x$ $a > 1$						
Логарифмическая функция						
$y = \log_a x$ $0 < \mathrm{a} < 1$						
$y = \log_a x$ $\mathrm{a} > 1$						
Тригонометрические функции						
$y = \sin x$						
$y = \cos x$						
$y = \mathrm{tg} x$						
$y = \mathrm{ctg} x$						
Обратные тригонометрические функции						
$y = \arcsin x$						
$y = \arccos x$						
$y = \mathrm{arctg} x$						
$y = \mathrm{arcctg} x$						

Конспект № 6. Вывод некоторых формул дифференцирования

Самостоятельно изучите материал по источникам:

Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / ред. Л.Н. Журбенко, Ю.М. Данилов. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 131-161.

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — С. 110–122.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Выведите формулу производной суммы двух функций.
2. Выведите формулу производной произведения двух функций.
3. Выведите формулу производной функции $y = \cos x$.
4. Выведите формулу производной функции $y = \operatorname{tg} x$.
5. Выведите формулу производной функции $y = \operatorname{arctg} x$.
6. Найдите производную функции:

1) $y = \ln^3 x + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$;

2) $y = 3^{\cos^2 x} + \operatorname{arctg} 5x$,

3) $y = e^{\operatorname{ctg} x} \arcsin\sqrt{x}$.

Конспект № 7. Несобственные интегралы

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 216–219.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какие интегралы называются несобственными?
2. Как вычисляются несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования?
3. Как вычисляются несобственные интегралы от неограниченных функций?
4. В каком случае несобственный интеграл называется расходящимся? сходящимся?
5. Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$; 4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$; 5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$; 6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Конспект № 8. Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 222-227.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Как вычислить площадь плоской фигуры в декартовых координатах?

2. Как вычислить площадь криволинейной трапеции при параметрическом задании кривой?

3. Как вычислить площадь криволинейного сектора в полярных координатах?

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $xy = 4,\ \ x = 1,\ \ x = 4,\ \ y = 0$;

2) $y = x^2,\ \ y = 2 - x^2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат: $r = a\left(1 + \sin 2\varphi\right)$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Конспект № 9. Применение определенного интеграла для вычисления объемов тел вращения и длины дуги кривой

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 222–227.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Как вычислить объем тела вращения с помощью определенного интеграла?

2. Как вычислить длину дуги в прямоугольной системе координат?

3. Как вычислить длину дуги кривой, заданной в параметрической форме?

4. Как вычислить длину дуги кривой в полярных координатах?

5. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{6}{x}$, прямыми $y = 1,\ \ y = 6$ и осью Oy. Сделать рисунок.

6. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Сделать рисунок.

7. Вычислить длину дуги кривой: $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$, если $0 \le x \le 12$.

Конспект № 10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 167-172.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Сформулируйте определение нормали к поверхности и напишите уравнения нормали.

2. Сформулируйте определение касательной плоскости к поверхности и напишите уравнение касательной плоскости.

3. Составьте уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M(1; 2; -1)$ к поверхности, заданной уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0.$$

4. Составьте уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M(2; 1; 4)$ к поверхности, заданной уравнением $z = 2x^2 - 4y^2$.

Конспект № 11. Физические приложения двойного интеграла

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 285-288, 300-302.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. По каким формулам находятся масса, координаты центра тяжести, моменты инерции относительно координатных осей плоской пластинки D, плотность которой $\rho = \rho(x, y)$?

2. Определить координаты центра тяжести квадратной пластинки D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, если плотность $\rho(x, y) = x + y$.

3. Найти момент инерции однородной пластины с $\rho_0 = 2$, ограниченной параболой $y = 9 - x^2$ и осью Ox, относительно оси Oy.

Конспект № 12. Физические приложения криволинейных интегралов

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 312-314.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Как можно определить работу при перемещении единицы массы по дуге *AB* в поле, образованном силой $\vec{F}=(P,Q)$?

2. Поле образовано силой $\vec{F}=(P,Q)$, где $P=x-y$, $Q=x$. Вычислить работу при перемещении единицы массы по контуру квадрата со сторонами $x=\pm 2$, $y=\pm 2$.

3. Поле образовано силой $\vec{F}=(P,Q)$, где $P=y$, $Q=y-x$. Вычислить работу при перемещении единицы массы по прямой *AB*, где $A(-3;0)$, $B(0;3)$.

Конспект № 13. Комплексные числа, действия над ними

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — С. 522-524.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Как записывается комплексное число в алгебраической форме?

2. Что называют мнимой и действительной частью комплексного числа?

3. Какие числа называют чисто мнимыми?

4. Какое число называется сопряженным к данному комплексному числу?

5. Как выполняется сложение (вычитание) комплексных чисел в алгебраической форме?

6. Как выполняется умножение комплексных чисел в алгебраической форме?

7. Как выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме?

8. Выполнить действия:

1) $(1+2i)(2+i)$;

2) $\dfrac{2+3i}{1+4i}$;

3) $z_1\overline{z_2}$, если $z_1=1-\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{3}+i$;

4) i^3, i^4, i^5, i^{25}, i^{15}.

5) $\dfrac{\overline{z_1}^{\,2}}{z_2}$, если $z_1=3+2i$, $z_2=2+2i$;

6) $(1-i)^2(5+8i)$;

7) $\dfrac{1}{1+3i}+\dfrac{1}{4-i}$.

Конспект № 14. Уравнения Бернулли

Самостоятельно изучите материал, используя информационно-справочные и поисковые системы:

Математика Exponenta.ru http://www.exponenta.ru Компания Softline. Образовательный математический сайт. Материалы для студентов: задачи с решениями, справочник по математике, электронные консультации.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какой вид имеют уравнения Бернулли?
2. Каков способ их решения?
3. Решите уравнения:

1) $y'+\dfrac{2}{x}y=x^2y^2$;

2) $y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{y}$.

Конспект № 15. Приближенные методы решения алгебраических уравнений

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — С. 196-200.

Лапчик, М.П. Численные методы : учебное пособие для вузов / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер. — 3-е изд., стер. — М. : Академия, 2007. — С. 68-100.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. В чем заключается метод половинного деления отрезка?
2. В чем заключается метод простой итерации?
3. В чем заключается метод хорд?
4. В чем заключается метод касательных?
5. Дано уравнение $f(x)=x^4-x-10=0$. Составив таблицу знаков $f(x)$ при $x=0$, 1, 2, ..., определить границы положительного корня и вычислить его с точностью до 0,01 по способу хорд и по способу касательных.
6. По способу итераций найти вещественные корни уравнения

$$x^3+60x-80=0.$$

Конспект № 16. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 380–382.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какой вид имеет ряд Маклорена?
2. Какой вид имеет ряд Тейлора?
3. Запишите разложение в ряд Маклорена следующих функций:

1) $y = e^x$;

2) $y = \sin x$;

3) $y = \cos x$;

4) $y = (1+x)^m$;

5) $y = \ln(1+x)$;

6) $y = arctgx$.

4. С помощью выписанных формул разложите в ряд Маклорена функции:

1) $y = \ln(1+x^2)$;

2) $y = e^{3x}$.

5. Как с помощью рядов можно вычислить приближенное значение функции?
6. Вычислите $e^{0,1}$ с точностью до 0,001.
7. Как с помощью рядов можно вычислить приближенное значение определенного интеграла?
8. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Конспект № 17. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 420.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. По какой формуле можно найти вероятность события A, которое может произойти лишь вместе с одним из событий H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу событий?
2. Приведите примеры событий, вероятность которых вычисляется по формуле полной вероятности.

3. Какие вероятности вычисляются по формуле Байеса?

4. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров. Во второй урне 6 белых и 4 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Найдите вероятность того, что этот шар окажется белым.

5. На конвейер поступают детали, производимые тремя станками, при этом первый станок производит 50% всех деталей, второй — 30%, а третий — 20%. Если на конвейер попадает деталь с первого станка, то вероятность того, что она будет исправна, равна 0,98, второй станок выпускает детали с надежностью 0,95, а третий — с надежностью 0,8. Определите вероятность того, что если с конвейера сошел негодный узел, то деталь к нему изготовлена на первом станке.

Конспект № 18. Виды законов распределения случайных величин

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 432–437.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какой вид имеет плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, распределённой равномерно?

2. Как находится математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X, распределённой равномерно?

3. Какой вид имеет плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, имеющей показательное распределение?

4. Как находится математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X, имеющей показательное распределение?

5. В каком случае дискретная случайная величина распределена по биномиальному закону? Привести пример.

6. Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону?

7. В каком случае дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона? Привести пример.

8. Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона?

9. Геометрическое распределение дискретной случайной величины (привести пример). Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, имеющей геометрическое распределение?

10. График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, распределённой равномерно в интервале $(-1;3)$, имеет вид (рис. 23).

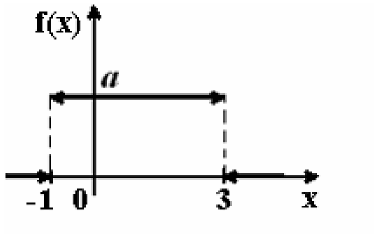

Рис. 23. График функции $y = f(x)$

Найдите значение a.

11. Все значения равномерно распределенной непрерывной случайной величины X принадлежат интервалу (2; 8). Определить:

а) вероятность попадания случайной величины X в интервал (3; 5);

б) математическое ожидание случайной величины X;

в) дисперсию случайной величины X.

Конспект № 19. Вариационные ряды

Самостоятельно изучите материал по источнику:

Математика [Текст] : учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др. ; под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М. : ИНФРА-М, 2013. — С. 445, 446, 448–453.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Что называют генеральной совокупностью?
2. Что называют выборочной совокупностью?
3. Что называют объемом выборки?
4. Что называют объемом генеральной совокупности?
5. Что называют дискретным вариационным рядом?
6. Что называют полигоном частот? Что называют полигоном относительных частот?
7. Что называют кумулятой частот? Что называют кумулятой относительных частот?
8. Что называют эмпирической функцией распределения?
9. Как вычисляется размах вариации, выборочная средняя, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение, мода, медиана.
10. Данные об оценках студентов на экзамене по математике выбрали случайным образом из ведомостей студентов второго курса и получили следующий ряд оценок: 5, 4, 3, 4, 5, 3, 4, 3, 2, 4, 3, 4, 4, 2, 5, 3, 4, 3, 4, 5,4, 3, 5, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 3, 4, 2, 4, 4, 5, 5, 3, 4, 5, 4, 3, 5, 4, 5, 4.

1) Построить полигон частот, полигон относительных частот;

2) Построить кумуляту частот, кумуляту относительных частот;

3) Найти размах вариации, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, моду, медиану.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основная литература

1. Марусич, А.И. Математика [Текст] : учебник для с.-х. вузов / А.И. Марусич. — Караваево : Костромская ГСХА, 2014. — 218 с.
2. Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л.Н. Журбенко, Ю.М. Данилов, ред. — М. : ИНФРА-М, 2013. — 496 с. — (Высшее образование: Бакалавриат).
3. Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — 607 с. — (Бакалавр. Базовый курс).

Дополнительная литература

1. Привалов, И.И. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник для вузов / И.И. Привалов. — 35-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2005. — 304 с. : ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 8-е изд., стереотип. – Москва : Высшая школа, 2002. – 479 с.
3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., доп. – Москва : Высшая школа, 2003. – 405 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. [Текст] . Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – 6-е изд. – М : Айрис-пресс, 2011. – 288 с.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. [Текст] : тридцать пять лекций. Ч. 2. – 5-е изд. – Москва : Айрис-Пресс, 2008. – 256 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Правила и формулы дифференцирования

Функция простого аргумента	*Сложная функция*
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(\mathrm{tg}x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\mathrm{tg}u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\mathrm{ctg}u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arctg}x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\mathrm{arctg}u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arcctg}x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\mathrm{arcctg}u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
Основные правила дифференцирования	
$C' = 0$	$\left(u+v\right)' = u' + v'$
$\left(Cu\right)' = Cu'$	$\left(u-v\right)' = u' - v'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Приложение 2

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$

2. $\int du = u + C$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u du = e^u + C$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u du = \sin u + C$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

10.1. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C$

12.1. $\int \frac{du}{1 + u^2} = \mathrm{arctg}\, u + C$

13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$

Дополнительные формулы

1. $\int tg\, u du = -\ln|\cos u| + C$

2. $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C$

3. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg} \frac{u}{2}\right| + C$

4. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C$

Приложение 3

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 4

Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Окончание приложения 4

1	2	3	4	5	6	7	8
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,49999997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961	∞	0,5
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		