Интегрирование функции нескольких переменных

Двойной интеграл

Обобщением определенного интеграла на случай функций двух переменных является так называемый двойной интеграл.

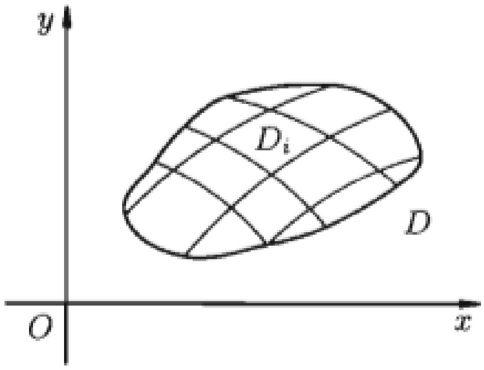

Рис. 214

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x;y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» D_i $(i = \overline{1,n})$, площади которых обозначим через ΔS_i, а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) — через d_i (см. рис. 214).

В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i;y_i)$, умножим значение $f(x_i;y_i)$ функции в этой точке на ΔS_i и составим сумму всех таких произведений:

$$f(x_1;y_1)\Delta S_1 + f(x_2;y_2)\Delta S_2 + \cdots + f(x_n;y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i. \tag{53.1}$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x;y)$ в области D.

Рассмотрим предел интегральной суммы (53.1), когда n стремится к бесконечности таким образом, что $\max d_i \to 0$. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется ***двойным интегралом*** от функции $f(x;y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ $\Big($или $\iint\limits_D f(x;y)\,dS\Big)$.

Таким образом, ***двойной интеграл*** определяется равенством

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot \Delta S_i. \tag{53.2}$$

В этом случае функция $f(x;y)$ называется ***интегрируемой в области*** D; D — ***область интегрирования***; x и y — ***переменные интегрирования***; $dx\,dy$ (или dS) — ***элемент площади***.

> **Теорема 53.1 (достаточное условие интегрируемости функции).** Если функция $z = f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области.

Замечания.

1. Далее будем рассматривать только функции, непрерывные в области интегрирования, хотя двойной интеграл может существовать не только для непрерывных функций.

2. Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой в области D функции предел интегральных сумм существует и не зависит от способа разбиения области. Таким образом, мы можем разбивать область D на площадки прямыми, параллельными координатным осям (см. рис. 215). При этом $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, равенство (53.2) можно записать в виде

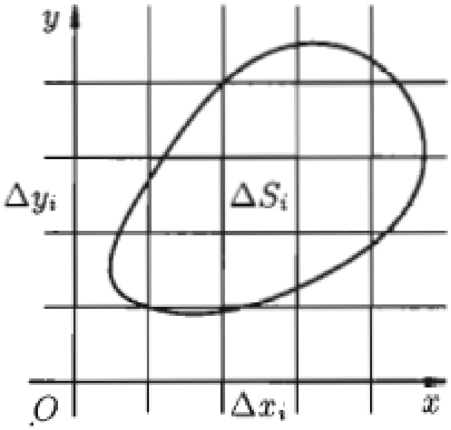

Рис. 215

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i.$$

Геометрический смысл двойного интеграла – изучить самостоятольно.

Основные свойства двойного интеграла:

Можно заметить, что процесс построения интеграла в области D дословно повторяет уже знакомую нам процедуру определения интеграла функции одной переменной на отрезке (см. п. 35). Аналогичны и свойства этих интегралов и их доказательства. Поэтому перечислим основные свойства двойного интеграла, считая подынтегральные функции интегрируемыми.

1. $\displaystyle\iint_D c\cdot f(x;y)\,dx\,dy = c\cdot \iint_D f(x;y)\,dx\,dy$, c — const.

2. $\displaystyle\iint_D (f_1(x;y) \pm f_2(x;y))\,dx\,dy = \iint_D f_1(x;y)\,dx\,dy \pm \iint_D f_2(x;y)\,dx\,dy.$

3. Если область D разбить линией на две области D_1 и D_2 такие, что $D_1 \bigcup D_2 = D$, а пересечение D_1 и D_2 состоит лишь из линии, их разделяющей (см. рис. 217), то

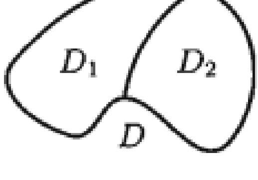

Рис. 217

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x;y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x;y)\,dx\,dy.$$

4. Если в области D имеет место неравенство $f(x;y) \geqslant 0$, то и $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy \geqslant 0$. Если в области D функции $f(x;y)$ и $\varphi(x;y)$ удовлетворяют неравенству $f(x;y) \geqslant \varphi(x;y)$, то и

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_D \varphi(x;y)\,dx\,dy.$$

5. $\iint\limits_D dS = S$, так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i = S$.

7. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то в этой области существует такая точка $(x_0;y_0)$, что $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = f(x_0;y_0)\cdot S$. Величину

$$f(x_0;y_0) = \frac{1}{S}\cdot\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$$

называют *средним значением функции $f(x;y)$ в области D.*

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

Положим сначала, что область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и таковы, что $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ для всех $x \in [a;b]$ (см. рис. 218). Такая область называется *правильной в направлении оси Oy*: любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Построим сечение цилиндрического тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox: $x = \text{const}$, где $x \in [a;b]$.

В сечении получим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную линиями $z = f(x;y)$, где $x = \text{const}$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ (см. рис. 219).

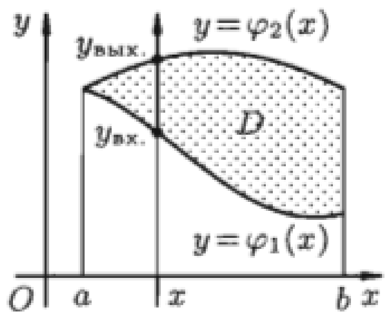

Рис. 218

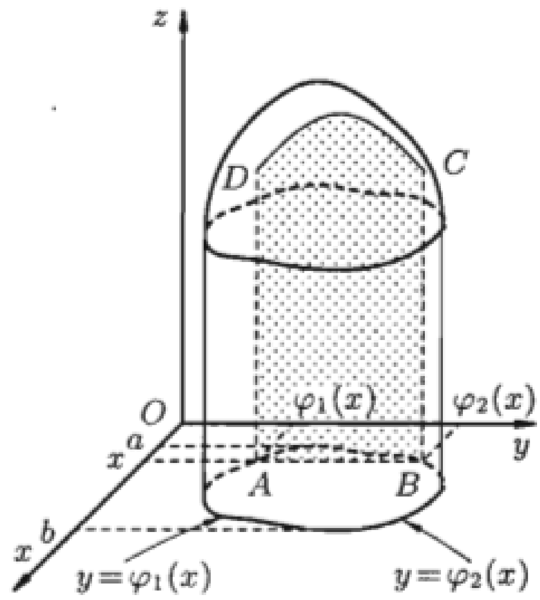

Рис. 219

Площадь $S(x)$ этой трапеции находим с помощью определенного интеграла

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy.$$

Теперь, согласно методу параллельных сечений, искомый объем цилиндрического тела может быть найден так:

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx.$$

С другой стороны, в п. 53.2 было доказано, что объем цилиндрического тела определяется как двойной интеграл от функции $f(x;y) \geqslant 0$ по области D. Следовательно,

$$V = \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx.$$

Это равенство обычно записывается в виде

$$\boxed{\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \cdot \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy.} \qquad (53.7)$$

Формула (53.7) представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы (53.7) называют *двукратным* (или *повторным*) *интегралом* от функции $f(x;y)$ по области D. При этом $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy$ называется *внутренним* интегралом.

Для вычисления двукратного интеграла сначала берем внутренний интеграл, считая x постоянным, затем берем внешний интеграл, т. е. результат первого интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b.

Если же область D ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$, кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для всех $y \in [c;d]$, т. е. область D — *правильная в направлении оси* Ox, то, рассекая тело плоскостью $y = \text{const}$, аналогично получим:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \cdot \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)\,dx.} \tag{53.8}$$

Здесь, при вычислении внутреннего интеграла, считаем y постоянным.

Пример 53.1. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

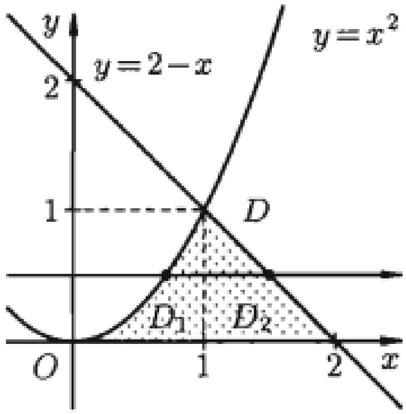

Рис. 220

○ Решение: На рисунке 220 изображена область интегрирования D. Она правильная в направлении оси Ox. Для вычисления данного двойного интеграла воспользуемся формулой (53.8):

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2} + 2yx\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} = \int\limits_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 4y - 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^{\frac{3}{2}}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{(y-2)^3}{6} + \frac{7\cdot y^2}{2\cdot 2} - 2\cdot\frac{y^3}{3} - 2\cdot 2\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20} = 1{,}45.$$

Отметим, что для вычисления данного двойного интеграла можно воспользоваться формулой (53.7). Но для этого область D следует разбить на две области: D_1 и D_2. Получаем:

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} (x+2y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} (x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} (x+2y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} (x+2y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \cdot (xy+y^2)\Big|_0^{x^2} + \int\limits_1^2 dx \cdot (xy+y^2)\Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^3+x^4)\,dx + \int\limits_1^2 (2x - x^2 + (2-x)^2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-2)^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{20} + 3 - 2 = 1{,}45.$$

Ответ, разумеется, один и тот же. ●

Приложения двойного интеграла.

Объем тела

Как уже показано (п. 53.2), объем цилиндрического тела находится по формуле

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy,}$$

где $z = f(x;y)$ — уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

Площадь плоской фигуры

Если положить в формуле (53.4) $f(x;y) = 1$, то цилиндрическое тело «превратится» в прямой цилиндр с высотой $H = 1$. Объем такого цилиндра, как известно, численно равен площади S основания D. Получаем формулу для вычисления площади S области D:

$$\boxed{S = \iint\limits_D dx\,dy,}$$