1. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (или **рациональной дробью**) называется функция, равная отношению двух многочленов

$$\boxed{\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n},} \tag{9.13}$$

где $a_0,a_1,\ldots,a_m,b_0,b_1,\ldots,b_n$ – постоянные коэффициенты.

Дробь называется **правильной**, если степень ее числителя меньше степени ее знаменателя, то есть $m<n$; если $m\geq n$ дробь называется **неправильной**.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого надо разделить числитель на знаменатель по правилу деления многочленов «столбиком».

Например,

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-3x-7 & x^2+2x+4 \\ \cline{2-2} -\ (x^3+2x^2+4x) & x-3 \\ \cline{1-1} -3x^2-7x-7 & \\ -\ (-3x^2-6x-12) & \\ \cline{1-1} -x+5 & \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^3-x^2-3x-7}{x^2+2x+4}=x-3+\frac{-x+5}{x^2+2x+4}$$

Поскольку интегрирование многочлена не составляет никаких трудностей, то задача интегрирования произвольной рациональной дроби сводится к задаче интегрирования правильной рациональной дроби.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Простейшие рациональные дроби это дроби вида:

$\dfrac{A}{x-a}$ – *простейшая дробь первого типа*;

$\dfrac{A}{(x-a)^k}$ – *простейшая дробь второго типа*;

$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ – *простейшая дробь третьего типа*;

$\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ – *простейшая дробь четвертого типа*;

где $D=p^2-4q<0$; $k\in N$, $k\geq 2$; A,M,N,a,p,q – действительные числа.

Теорема 9.3. Любую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей.

Например, правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l\ldots(x^2+px+q)^m$, можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m},$$

где A_i, B_i, M_i, N_i – числа $(i=1, 2,\ldots)$.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\frac{7x^2-21x+8}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$;

2) $\frac{2x^2+3}{x^3(x-4)(x^2+2x+7)}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-4}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+7}$;

3) $\frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+x+2)}=\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+2}$.

где A, B, C, D, M, N – неопределенные (пока!) числа, которые нужно найти (их называют неопределенными коэффициентами). Для их нахождения применяют или *метод сравнения коэффициентов,* или *метод отдельных значений коэффициентов* (табл. 9.2).

Алгоритм методов

Таблица 9.2

Метод сравнения коэффициентов	Метод отдельных значений коэффициентов
1. Приведем к общему знаменателю слагаемые правой части разложения; получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами	
2. Приравняем числители $P(x)\equiv S(x)$, так как знаменатели равны	
3. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получим систему, из которой найдем искомые коэффициенты	3. Придадим x конкретные значения («удобные» значения – действительные корни многочлена $Q(x)$) столько раз, сколько неопределенных коэффициентов

<u>Пример 9.10.</u> Разложить дробь на простейшие $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$.

<u>Решение</u>. По теореме 9.3 разложим дробь на простейшие: $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$.

Найдем коэффициенты методом отдельных значений коэффициентов:

1) $\dfrac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+1}=\dfrac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)};$

2) $3x-4=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2);$

3) пусть $x=0,$ тогда $-4=-2A,$ то есть $A=2;$

пусть $x=-1,$ тогда $-7=3C,$ то есть $C=-\dfrac{7}{3};$

пусть $x=2,$ тогда $2=6B,$ то есть $B=\dfrac{1}{3}.$

Следовательно, $\dfrac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\frac{1}{3}}{x-2}+\dfrac{-\frac{7}{3}}{x+1}.$

Интегрирование простейших рациональных дробей

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C;.$

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C;.$

3. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right|=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{c} x+\dfrac{p}{2}=t \\ x=t-\dfrac{p}{2} \\ dx=dt \\ q-\dfrac{p^2}{4}=a^2 \end{array}\right|=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C=\left|t=x+\frac{p}{2}\right|=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

Алгоритм вычисления интегралов $\displaystyle\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$

1. Выделить целую часть (если дробь неправильная).
2. Разложить правильную дробь на сумму простейших дробей (*все, что в знаменателе можно разложить на множители – раскладываем на множители*).
3. Проинтегрировать целую часть (если она есть) и простейшие дроби.

Пример 9.11. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$.

Решение. 1. Выделим целую часть данной неправильной дроби

$$\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5} = x+7+\frac{37x-35}{x^2-6x+5}.$$

2. Разложим дробь на сумму простейших дробей, при этом знаменатель разложим на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения, то есть $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$.

$$\frac{37x-35}{x^2-6x+5} = \frac{37x-35}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)} =$$

$$= \frac{Ax-5A+Bx-B}{(x-1)(x-5)} = \frac{(A+B)x-5A-B}{(x-1)(x-5)}.$$

Найдем A и B методом сравнения коэффициентов:

$37x-35=(A+B)x-5A-B,$

$$\begin{cases} A+B=37, \\ -5A-B=-35. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-0{,}5, \\ B=37{,}5. \end{cases}$$

Значит, разложение имеет вид:

$$\frac{37x-35}{x^2-6x+5} = \frac{-0{,}5}{x-1}+\frac{37{,}5}{x-5}.$$

3. Интегрируем целую часть и простейшие дроби:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx = \int\left(x+7+\frac{-0{,}5}{x-1}+\frac{37{,}5}{x-5}\right)dx = \frac{x^2}{2}+7x-0{,}5\ln|x-1|+37{,}5\ln|x-5|+C.$$