Глава 3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

§ 1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.

Рассмотрели задачу: дана функция, найти ее производную.
Рассмотрим *обратную* задачу: дана функция *f(x)*, найти такую функцию *F(x),* что *F′(x)=f(x),* т.е. по данной производной восстановить саму функцию.

Восстановление функции *F(x)* по известной производной этой функции является *основной задачей интегрального исчисления.*

Опр. Функция *F(x),* $x \in X$ называется **первообразной** для функции *f(x)* на промежутке X, если во всех точках этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \qquad (1)$$

Пример. Найти первообразную для $f(x) = x^2$.

$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, т.к. $F'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 9$, $F'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 9\right)' = x^2 = f(x)$, и т.д.

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, $C = const$. Значит, если для функции *f(x)* существует первообразная F(x), то эта первообразная **не единственная**, *F(x)+C* также является первообразной.

Покажем, что функциями вида *F(x)+C* исчерпывается (охватывается) **всё** семейство первообразных для *f(x).*

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на промежутке X, то они отличаются друг от друга постоянным слагаемым,

т.е. $F_2(x) = F_1(x) + C,$ где C – const.

Из теоремы следует: если *F(x)* – некоторая первообразная для функции *f(x)* на *X*, то все первообразные этой функции определяются выражением *F(x)+C*, где *C* – const.

Опр. Совокупность *F(x)+C* всех первообразных функции f(x) (на множестве X) называется **неопределенным интегралом данной функции** $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (2), \qquad \text{где} \quad F'(x) = f(x),$$

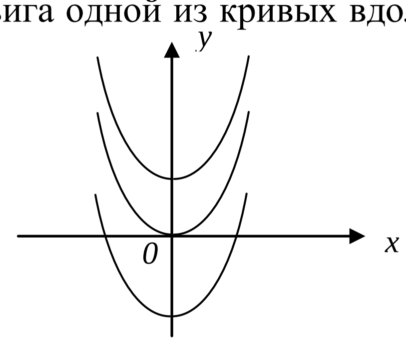
f(x) – подынтегральная функция; *f(x)dx* –подынтегральное выражение;
x – переменная интегрирования; *C* – постоянная интегрирования.

Термин «интеграл» (лат. Integralis – целостный), введен Лейбницем.
«Неопределенный» – т.к. в выражение входит постоянное слагаемое, которое можно выбрать произвольно.

Операция отыскания первообразной данной функции называется **интегрированием.**

Геометрически: Неопределенный интеграл представляет **семейство кривых** *y=F(x)+C*, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых вдоль оси *0y* (параллельный перенос).

Пример. $f(x) = 2x, \quad F(x) = x^2 + C.$



Теорема. Любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция *f(x)* имеет на этом отрезке первообразную.

§2. Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подыитегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической суме неопределенных интегралов от этих функций. Например, для двух функций

$$\int \left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$ где k – const.

§3. Таблица основных интегралов.

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$; $\int dx = x + c$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$
3	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
4	$\int \cos x dx = \sin x + c$
5	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
6	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
7	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c;$ $\int e^x dx = e^x + c$
8	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c;$ $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c;$ $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + c$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm m}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm m}\right\rvert + c$
11	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert\frac{x - a}{x + a}\right\rvert + c$

Данные интегралы называются **табличными**. Некоторые из приведенных формул в таблице не имеют аналога в таблице производных; их справедливость проверяется дифференцированием.

Пример 3.1.1) $\int\left(3x^5-\sqrt{x}+6\right)dx=\int 3x^5dx-\int\sqrt{x}dx+\int 6dx=$

$$=3\cdot\frac{x^6}{6}+C_1-\frac{x^{3/2}}{3/2}+C_2+6x+C_3=\frac{x^6}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+6x+C,\quad \text{где } \mathrm{C}=\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3.$$

2) $\int\left(\sin x+4^x-\frac{3}{x}\right)dx=-\cos x+\frac{4^x}{\ln 4}-3\ln|x|+C.$ 3) $\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C.$

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$ 5) $\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int(2\cdot 3^2)^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{\ln 18}+C.$

Пример 3.2. Найти

1) $\int\left(3x^2-\sqrt[3]{x}+4x-\frac{1}{5^x}\right)dx$ 2) $\int\left(\cos x-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$

3) $\int\frac{dx}{x^3+3}$ 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 5) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

Решение.

1) $\int\left(3x^2-\sqrt[3]{x}+4x-\frac{1}{5x}\right)dx=$

2) $\int\left(\cos x-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx=$

3) $\int\frac{dx}{x^2+3}=$

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=$

5) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=$

Вычисление рассмотренных интегралов основывалось на использовании свойств интегралов и таблице интегралов, т.е. производилось **непосредственное интегрирование.**

Производную функции вычисляют, пользуясь таблицей производных и общими правилами дифференцирования. В интегральном исчислении нет общих приемов нахождения интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие **свести данный интеграл к табличному**

§ 4. Интегрирование методом замены переменной (подстановкой).

Требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

Первый вариант замены переменной

В интеграле $\int f(x)dx$ делают замену переменной по формуле

$$x=\varphi(t). \qquad (1)$$

Причем, $x=\varphi(t)$ – дифференцируемая функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(t)$ и обратную функцию $t=\varphi^{-1}(x)$ (или $x=\varphi(t)$ – непрерывная строго монотонная функция, имеющая непрерывную производную).

$$dx=\varphi'(t)dt.$$

Тогда справедлива формула **замены переменной в неопределенном интеграле**

$$\int f(x)dx=\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Функцию (1) $x=\varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы интеграл, стоящий в правой части (2) был бы **табличным** или ясен путь его нахождения.

Пусть $\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$ найден, а именно $\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt=\Phi(t)+C.$

Далее из (1) найти обратную функцию $t=\varphi^{-1}(x)$ и подставить в $\Phi(t)$.

Итак, $\int f(x)dx=\begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{vmatrix}=\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)t=\Phi(t)+C=\Phi\big(\varphi^{-1}(x)\big)+C.$

Пример 4.1. 1) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\begin{vmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{vmatrix}=\int\frac{t}{1+t^2}2tdt=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$

$=2t-2arctg\,t+C=2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+C.$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\begin{vmatrix} e^x-1=t^2 \\ x=\ln(t^2+1) \end{vmatrix}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{e^x-1}+C.$

Пример 4.2.

Второй вариант замены переменной

На практике часто встречаются интегралы, у которых одна часть подынтегрального выражения представляет собой функцию от $t=\psi(x)$, а другая – дифференциал этой функции $\psi'(x)dx=d\big(\psi(x)\big)$, т.е. интеграл имеет вид

$$\int f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)dx$$

(либо исходный интеграл сводится к такому виду).

Делаем замену переменной (подстановку) по формуле

$$t=\psi(x).$$

Тогда $$\int f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)dx=\int f(t)dt.$$

Применили **введение функции под знак дифференциала**

$$\psi'(x)dx=d\big(\psi(x)\big)=dt.$$

Пример 4.3. 1) $\int\sin^3 x\cos x dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$

$t = \sin x; \quad \cos x dx = d(\sin x); \quad \cos x dx = d\sin x = dt.$

Подстановку $t = \sin x$ можно не записывать, а только подразумевать

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

2) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin x d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$

3) $\int e^{x^2} \cdot x dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$ или

$$\int e^{x^2} \cdot x dx = \left| dx^2 = 2x dx \right| = \frac{1}{2}\int e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

4) $\int \frac{x dx}{x^2+1} = \left| d(x^2+1) = 2x dx \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$

5) $\int (x^3+1)^{1/4} \cdot x^2 \, dx =$

6) $\int (3x^2+7)^4 x \, dx =$

7) $\int \cos^2 x \sin x \, dx =$

Частные случаи замены переменной

1. ***Введение постоянного слагаемого под знак дифференциала***

Для любого постоянного слагаемого a справедливо: $d(x+a) = dx$, значит

$$\int f(x+a)dx = \int f(x+a)d(x+a).$$

Под знак дифференциала, стоящего в интеграле, можно ввести любое постоянное слагаемое.

Пример 4.4.

1) $\int (x+5)^7 dx = \int (x+5)^7 d(x+5) = \frac{(x+5)^8}{8} + C.$

2) $\int \frac{dx}{x-4} = \int \frac{d(x-4)}{x-4} = \ln|x-4| + C.$

3) $\int \cos(x+1)dx =$

4) $\int (x-7)^9 dx =$

2. ***Введение постоянного множителя под знак дифференциала***

При любом постоянном $k \neq 0$ справедливо: $dkx = kdx \Rightarrow dx = \frac{1}{k} dkx.$

Значит, $$\int f(kx)dx = \frac{1}{k}\int f(kx)d(kx).$$

Под знак дифференциала, стоящего в интеграле, можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

Пример 4.5.

1) $\int \sin 7x dx = \frac{1}{7}\int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + C.$

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4} tg 4x + C.$

3) $\int e^{x/3} dx = 3\int e^{x/3} d(\frac{x}{3}) = 3e^{x/3} + C.$

4) $\int \cos\frac{x}{2} dx =$

5) $\int \frac{dx}{9x^2+4} =$

3. Из двух предыдущих случаев получим общую формулу

$$\int f(kx+a)dx = \frac{1}{k}\int f(kx+a)d(kx+a).$$

Пример 4.6. 1) $\int \cos(5x+2)dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x+2)d(5x+2) = \frac{1}{5}\sin(5x+2) + C.$

2) $\int 4^{3-2x} dx = -\frac{1}{2}\int 4^{3-2x} d(3-2x) = -\frac{1}{2}\frac{4^{3-2x}}{\ln 4} + C.$

3) $\int \frac{dx}{3x-7} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-7)}{3x-7} = \frac{1}{3}\ln|3x-7| + C.$

4) $\int (2x-3)^7 dx =$

5) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+1)} =$

6) $\int e^{3-5x} dx =$

7) $\int \sin\left(\frac{x}{5}-3\right)dx =$

4. $\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx = \ln|\psi(x)| + C.$

Если числитель подынтегрального выражения равен дифференциалу знаменателя, то интеграл равен логарифму модуля знаменателя +C.

Пример 4.7. 1) $\int \mathrm{tg}\, x dx = -\ln|\cos x| + C.$ 2) $\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln|\cos x| + C.$

§ 5. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

I. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx$

Выделить полный квадрат в квадратном трехчлене $x^2+bx+c=x^2+2\cdot\frac{b}{2}\cdot x+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$.

Сделать замену переменной: $x+\frac{b}{2}=t;\quad x=t-\frac{b}{2};\quad dx=dt.$

Тогда искомый интеграл сводится к табличным интегралам.

Пример 5.1. $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx=$

$x^2+4x+13=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+13=(x+2)^2+9=t^2+9;\ x+2=t,\quad x=t-2,\quad dx=dt.$

$$=\int\frac{3(t-2)-2}{t^2+9}dt=\int\frac{3t-8}{t^2+9}dt=3\int\frac{t}{t^2+9}dt-8\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2+9)}{t^2+9}-8\int\frac{dt}{t^2+3^2}=\frac{3}{2}\ln(t^2+9)-\frac{8}{3}arctg\frac{t}{3}+C==\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+13)-\frac{8}{3}arctg\frac{x+2}{3}+C.$$

II. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+bx+c}}dx$

Пример 5.2. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=$

$x^2-4x+8=(x^2-4x+4)-4+8=(x-2)^2+4=t^2+4;\ x-2=t,\quad x=t+2,\quad dx=dt.$

$$=\int\frac{3(t+2)-1}{\sqrt{t^2+4}}dt=\int\frac{3t+5}{\sqrt{t^2+4}}dt=3\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}}+5\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=$$

$$=3\int(t^2+4)^{-\frac{1}{2}}tdt+5\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{2}\frac{(t^2+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+5\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C=$$

$$=3\sqrt{x^2-4x+8}+5\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}\right|+C.$$

III. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{c+bx-x^2}}dx$

Пример 5.3. $\int \frac{4x-5}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=$

$3+2x-x^2=-(x^2-2x-3)=-\left((x-1)^2-1-3\right)=4-(x-1)^2=4-t^2;$

$x-1=t,\quad x=t+1,\quad dx=dt.$

$$=\int\frac{4(t+1)-5}{\sqrt{4-t^2}}dt=\int\frac{4t-1}{\sqrt{4-t^2}}dt=4\int\frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}}-\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=$$

$$=-2\int(4-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(4-t^2)-\int\frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}}=-2\frac{(4-t^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\arcsin\frac{t}{2}+C=-4\sqrt{3+2x-x^2}-\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

§ 6. Интегрирование по частям.

Пусть $u=u(x),\quad v=v(x)$ – две непрерывно дифференцируемые на некотором интервале функции (т.е. имеющие непрерывные производные).

Тогда

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (1)$$

формула интегрирования по частям.

Замечание. При нахождении $\int d(uv)$ произвольную постоянную не записываем, т.к. в правой части остался неопределенный интеграл $\int vdu,$ к нему и присоединяем С. С помощью (1) отыскание исходного интеграла $\int udv$ сводится к отысканию $\int vdu,$ который должен быть более простым для нахождения, чем исходный.

В исходном интеграле подынтегральное выражение разбиваем на два множителя: один, который упрощается в результате дифференцирования, обозначаем за *u*, а другой, содержащий *dx,* - за *dv*.

Пример 6.1.

$$\int x^3\ln xdx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^3dx, & v=\frac{x^4}{4},(c=0)\end{array}\right|=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.$$

Типы интегралов, к которым применяется интегрирование по частям

I.

$\int P(x)e^{kx}dx,$ $\int P(x)\sin kxdx,$ $\int P(x)\cos kxdx,$ где *P(x)* – многочлен относительно *x*, *k* – число.	$u=P(x)$	$dv=e^{kx}dx$ $dv=\sin kxdx$ $dv=\cos kxdx$

Примечание. Если *P(x)* – многочлен степени *n*, то формулу (1) применяют *n* раз.

II.

$\int P(x)\ln xdx,\quad \left(\int P(x)\log_a xdx\right)$ $\int P(x)\arcsin xdx,$ $\int P(x)\arccos xdx,$	$u=\ln x$ $u=\arcsin x$ $u=\arccos x$ $u=arctgx$	$dv=P(x)dx$

$\int P(x) arctgx dx,$ $\int P(x) arcctgx dx$	$u = arcctgx$	

III. $\int e^{ax}\cos bx dx$, $\int e^{ax}\sin bx dx$, где a, b – числа.

Находятся двукратным интегрированием по частям.

Замечание. С помощью (1) можно найти также $\int\sqrt{a^2-x^2}dx,$ $\int\sqrt{x^2+m}dx$.

Пример 6.2. $\int arctgx dx =$

Пример 6.3. $\int (x^2+1)e^{-x}dx =$

Пример 6.4.

1) $\int x\cos 5x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos 5x dx & v = \frac{1}{5}\sin 5x \end{matrix} \right| = \frac{1}{5}x\sin 5x - \int \frac{1}{5}\sin 5x dx =$

$= \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$

2) $\int (2x+3)\ln x dx =$

§ 7. Интегрирование рациональных дробей.

I. Рациональные дроби

Опр. Рациональной дробью называется дробь, числителем и знаменателем которой является многочлены

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе, т.е. $n \ge m,$ то дробь называется **неправильной**.

Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, т.е. $n < m,$ то дробь называется **правильной**.

$\frac{2x^5}{x^2+3x+2}$ – неправильная дробь, $\frac{x^2+1}{x^4+x-2}$ – правильная дробь.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$,

где $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – неправильная рациональная дробь, степень $P(x) \geq$ степени $Q(x)$;

$L(x)$ – целая часть (многочлен); $R(x)$ – остаток;

$\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, степень $R(x) <$ степени $Q(x)$.

Пример.

$$\frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2} = x^2 - 2x + \frac{4x+1}{x^2+x+2}.$$

$$\begin{array}{r|l} -\; x^4 - x^3 + 1 & x^2 + x + 2 \\ \underline{x^4 + x^3 + 2x^2} & \overline{x^2 - 2x} - \text{(цел. часть)} \\ -\; -2x^3 - 2x^2 + 1 & \\ \underline{-2x^3 - 2x^2 - 4x} & \\ 4x + 1 \text{ (остаток)} & \end{array}$$

Таким образом, интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей (интегрирование целой части производится по таблице).

Опр. Простейшей дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов

$\dfrac{A}{x-a}$; $\dfrac{A}{(x-a)^k}$; где k – целое, $k \geq 2$;

$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней;

$\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где $k \geq 2$ и $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

II. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби

Пусть $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Знаменатель $Q(x)$ – многочлен степени m.

Тогда уравнение $Q(x)=0$ имеет m корней с учетом их кратности и $Q(x)$ может быть разложен на линейные и квадратичные множители вида $x - a$ и $x^2 + px + q$, где квадратичные не имеют корней.

Пусть для определенности $Q(x) = (x-a)^k \cdot (x-b)^l \cdot (x^2 + px + q)^s$,

причем $k + l + 2s = m$ (a – корень кратности k, b – корень кратности l и комплексно-сопряженные корни кратности s).

Замечание. По основной теореме алгебры всякий многочлен степени m имеет ровно m корней, если каждый кратный корень считать такое число раз, какова его кратность.

Теорема. Правильную рациональную дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)=(x-a)^k\cdot(x-b)^l\cdot(x^2+px+q)^s$ можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-a)^l}+\\&+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{C_sx+D_s}{(x^2+px+q)^s},\end{aligned}\qquad(1)$$

где $A_1,\ldots,A_k,B_1,\ldots,B_l,C_1,\ldots,C_s,D_1,\ldots,D_s$ – некоторые действительные числа.
Число дробей, соответствующих множителю, равно показателю степени множителя.
Примеры 1). Корни знаменателя действительны и различны

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}.$$

2) Корни знаменателя действительные, некоторые кратные

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-2}.$$

3) Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

4) Среди корней знаменателя есть комплексные кратные

$$\frac{x^2+x+13}{(x-1)x^3(x^2+4)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x^3}+\frac{Ex+F}{x^2+4}+\frac{Kx+L}{(x^2+4)^2}.$$

Рассмотрим методы вычисления коэффициентов разложения.

III. Метод неопределенных коэффициентов

Пусть дано разложение **правильной** рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ по формуле (1) на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами. Приведем простейшие дроби к общему знаменателю *Q(x)* и приравняем получившийся в числителе многочлен исходному многохлену *P(x).* Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x* этих многочленов. В итоге получим систему *m* линейных алгебраических уравнений для нахождения *m* неизвестных коэффициентов $A_1,\ldots,A_k,B_1,\ldots,B_l,C_1,\ldots,C_s,D_1,\ldots,D_s$..

Пример 7.1. Найти $\displaystyle\int\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)}dx=$

Решение. $\dfrac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)}=\dfrac{A^{\backslash x^2+4}}{x-1}+\dfrac{Bx+C^{\backslash x-1}}{x^2+4};$

$$x^2+x+13=(A+B)x^2+(-B+C)x+(4A-C);$$

$$
\begin{matrix} x^2: \\ x': \\ x^0: \end{matrix}
\begin{cases} A+B=1, \\ -B+C=1, \\ 4A-C=13, \end{cases}
\begin{cases} A=1-B, \\ C=1+B, \\ 4-4B-1-B=13, \end{cases}
\begin{cases} A=3, \\ C=-1, \\ B=-2. \end{cases}
\quad \frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{3}{x-1}+\frac{-2x-1}{x^2+4}.
$$

$$
=\int\frac{3dx}{x-1}-\int\frac{2xdx}{x^2+4}-\int\frac{dx}{x^2+4}=3\ln|x-1|-\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C.
$$

Пример 7.2. Найти $\int\frac{3x^2-4x+25}{x^3+10x^2+25x}dx$.

IV. Метод частных значений

После приравнивания многочленов, стоящих в числителях, дать переменной x несколько частных значений (столько, сколько неизвестных коэффициентов).

Метод особенно удобен в случае, если знаменатель имеет простые действительные корни.

Пример 7.3. Найти $\int\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx=$

$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2);$

$$
\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2};
$$

$$
4x^2+16x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2);
$$

$$
\begin{matrix} x=0 & -8=-4A & A=2 \\ x=2 & 40=8B & B=5 \\ x=-2 & -24=8C & C=-3 \end{matrix}
$$

$$
=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx=2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.
$$

Пример 7.4. Найти $\int\frac{x+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

V. Правило интегрирования рациональных дробей

1. Если рациональная дробь неправильная, то ее можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби, поделив числитель на знаменатель.
2. Разложить знаменатель правильной рациональной дроби на множители.
3. Разложить правильную дробь на сумму простейших дробей.
4. Найти искомый интеграл как сумму интегралов от целой части (если дробь неправильная) и интегралов от простейших дробей.

Пример 7.5. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int (x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x})dx =$

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \cline{2-2}
x^5-4x^3 & x^2+x+4 \text{ (целая часть)} \\ \cline{1-1}
-\;x^4+4x^3 & \\
x^4-4x^2 & \\ \cline{1-1}
-\;4x^3+4x^2 & \\
4x^3-16x & \\ \cline{1-1}
4x^2+16x-8 \text{ (остаток)} &
\end{array}
$$

$$= \int (x^2+x+4)dx + \underbrace{\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx}_{\text{см. предыдущий пример}} = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

§ 8. Интегрирование тригонометрических выражений.

I. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

$R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$ (т.е. выражение, полученное из $\sin x$ и $\cos x$ и действительных чисел с помощью четырех арифметических действий).

Например:

$\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+2}$; $\frac{1}{\sin x}$; $\sin^3 x\cdot\cos x$ – рациональные функции относ. $\sin x$ и $\cos x$;

$\sin^{7/4} x$ – не является рациональной.

Универсальная тригонометрическая подстановка $t = tg\frac{x}{2}$.

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$ – интеграл от рациональной функции относительно t. Этот интеграл находится методами §7 и §5.

Пример 8.1. $\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=$

В ряде случаев вместо универсальной тригонометрической подстановки удобнее рассматривать частные подстановки.

II. Интегралы вида $\int \sin^n x\cdot\cos^m xdx$

1. Хотя бы одно из чисел ***m* или *n* нечетное положительное число**.

Пусть $m=2k+1-$нечетно.

$\int \sin^n x\cdot\cos^{2k+1} xdx=\int \sin^n x\cdot\cos^{2k} x\cdot\cos xdx=\int \sin^n x\cos^{2k} xd\sin x=$

$=\int \sin^n x(1-\sin^2 x)^k d\sin x=|t=\sin x|=\int t^n(1-t^2)^k dt.$

Отделить от нечетной степени один сомножитель. Оставшуюся четную степень заменить по формуле $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Отделенный сомножитель внести под знак дифференциала.

Пример 8.2. $\int \sin^6 x\cdot\cos^3 xdx=$

Пример 8.3. $\int \cos^4 x\cdot\sin^3 xdx=$

2. *m* и *n* – четные неотрицательные числа.

Используются формулы, понижающие показатели степеней синуса и косинуса.

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Пример 8.4. $\int \cos^4 xdx=$

Пример 8.5. $\int \sin^2 2xdx=\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 4xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

3. *m* и *n* – четные и хотя бы одно из них отрицательное

Сделать замену $tgx = t$ или $\text{ctg}x = t$.

III. Интегралы вида $\int tg^n xdx$; $\int ctg^n xdx$, где *n* – натуральное

а) $n = 1$, $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$; $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$.

б) $n > 1$. Применяются формулы: $tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$; $ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$.

Пример 8.6.

$$\int tg^5 xdx = \int tg^3 x \cdot tg^2 xdx = \int tg^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int tg^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int tg^3 xdx =$$

$$= \int tg^3 xd(tgx) - \int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \frac{tg^4 x}{4} - \int tgxd(tgx) + \int tgxdx =$$

$$= \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

IV. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nxdx$; $\int \sin mx \sin nxdx$; $\int \cos mx \cos nxdx$

Применяются формулы: $\sin mx \cdot \cos nx = \dfrac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)$

$\sin mx \cdot \sin nx = \dfrac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$ $\cos mx \cdot \cos nx = \dfrac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)$

Пример 8.7. $\int \sin 5x \cdot \cos 3xdx = \dfrac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin 2x)dx = \dfrac{1}{2}\int \sin 8xdx + \dfrac{1}{2}\int \sin 2xdx =$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

§ 9. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Во многих случаях интегрирование иррациональной функции удается выполнить, если привести эту функцию с помощью подстановки к рациональной функции.

Этот прием называется **рационализацией** подынтегральной функции.

I. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx = \int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}})dx$

Применим подстановку $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}, \dfrac{m_2}{n_2}, \ldots, \dfrac{m_k}{n_k}$ или s – наименьшее общее кратное (НОК) $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

В результате этой подстановки исходный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции t (корни «извлекаются»).

Пример 9.1. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx =$

II. Интегралы вида $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_3}{n_3}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}})dx$

(дробно-линейная иррациональность)

Применить подстановку $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – наименьшее общее кратное (НОК) $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Частный случай. $\int R(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, (ax+b)^{\frac{m_3}{n_3}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}})dx$

линейная иррациональность

Подстановка $ax+b=t^s$, где s – наименьшее общее кратное (НОК) $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Пример 9.2. $\int \frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{НОК } (2,4)=4 \\ 2\text{x} - 3 = \text{t}^4 \\ x=\frac{t^4+3}{2}; \quad dx = 2t^3dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{t^4+3+t^2}{3t+t^3}2t^3dt = \int \frac{(t^4+3+t^2)2t^3}{t(3+t^2)}dt = 2\int \frac{t^6+t^4+3t^2}{t^2+3}dt =$$

$$\begin{array}{r|l} \underline{} \; t^6+t^4+3t^2 & t^2+3 \\ \cline{2-2} \underline{t^6+3t^4} & t^4-2t^2+9 \text{ (целая часть)} \\ \underline{} \; -2t^4+3t^2 & \\ \underline{-2t^4-6t^2} & \\ \underline{} \; 9t^2 & \\ \underline{9t^2+27} & \\ -27 \text{ (остаток)} & \end{array}$$

$$= 2\int (t^4-2t^2+9+\frac{-27}{t^2+3})dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{4t^3}{3} + 18t - \frac{54}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(2x-3)^{\frac{5}{4}} - \frac{4}{3}(2x-3)^{\frac{3}{4}} + 18(2x-3)^{\frac{1}{4}} - \frac{54}{\sqrt{3}} arctg \frac{(2x-3)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}} + C.$$

III. Интегралы вида

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx; \quad \int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx; \quad \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$$

1. $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx;$ подстановка $x = asint,\ dx = acostdt$ (или $x = a\cos t,\quad dx = -a\sin t\, d$). Интеграл сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t,\ \cos t$.

Пример 9.3.

$$\int\sqrt{9-x^2}dx = \left|\begin{aligned} x &= 3\sin t \\ dx &= 3\cos tdt\end{aligned}\right| = \int\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos tdt = 9\int\cos^2 tdt = \frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\sin(2\arcsin\frac{x}{3}) + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{2}\sin(\arcsin\frac{x}{3})\cos(\arcsin\frac{x}{3}) + C =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{3x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$

2. $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx;$ подстановка $x = atgt,\ dx = \frac{a}{cos^2 t}dt$

3. $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx;$ подстановка $x = \frac{a}{cost},\ dx = \frac{a}{cos^2 t}sintdt$

(или $x = \dfrac{a}{\sin t}, \quad dx = -\dfrac{a}{\sin^2 t}\cos tdt$).

Замечание. Интегрирование биномиальных выражений

Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx,$ где $m,\ n,\ p$ – рациональные числа, a и b – const, - интегралы от дифференциального бинома $x^m(a+bx^n)^p dx$. Выражаются через элементарные функции в следующих случаях:

1. p – целое; подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

2. $\dfrac{m+1}{n}$ – целое; подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \dfrac{k}{s}$.

3. $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое; подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, где s – зн-тель дроби $p = \dfrac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях не выражается через элементарные функции.

Пример 9.4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{m+n}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 - \text{целое} \\ 1+x^{\frac{1}{4}} = t^3 \\ x = (t^3-1)^4 \\ dx = 4(t^3-1)^3 3t^2 dt \end{array} \right| =$

$$=12\int (t^3-1)^{-2} t(t^3-1)^3 t^2 dt = 12\int t^3(t^3-1)dt = 12\int (t^6-t^3)dt = \frac{12}{7}t^7 - \frac{12}{4}t^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$$

§ 10. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

В предыдущих параграфах рассматривались классы элементарных функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции или классы интегрируемых в конечном виде функций. Всякая непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$. Но не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций.

Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции (неберущиеся интегралы). Первообразная этих интегралов есть функция, которая не сводится к комбинации конечного числа элементарных функций.

$\int e^{-x^2}dx -$ интеграл Пуассона

$\int \frac{\sin x}{x}dx -$ интегральный синус

$\int \frac{\cos x}{x}dx -$ интегральный косинус

$\int \frac{dx}{\ln x} -$ интегральный логарифм

$\int \cos x^2 dx,\ \int \sin x^2 dx -$ интегралы Френеля

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} -$ эллиптический интеграл I рода

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx -$ эллиптический интеграл II рода