<u>Раздел</u>: Интегральное исчисление функции одной переменной

Неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого x из интервала $(a;b)$ выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Пример. Функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x)=x^2$, так как $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{3x^2}{3}=x^2=f(x)$.

Теорема. Любая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Определение. Бесконечное множество первообразных, вида $F(x)+C$, где C - константа, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

$f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой множество кривых, каждая из которых получается путем параллельного переноса одной из них вдоль оси OY.

Операция нахождения неопределенного интеграла функции $f(x)$ называется *интегрированием.*

Свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$.
3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной: $\int dF(x)=F(x)+C, C-const$.
4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int a\,f(x)dx=a\int f(x)dx, a-const$.
5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме интегралов от слагаемых: $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.
6. **Инвариантность формул интегрирования:** результат интегрирования не изменится если переменную интегрирования заменить дифференцируемой функцией этой переменной, то есть, если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u)dx=F(u)+C$, где $u=u(x)$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C, C - const$.
2. $\int du = u + C, C - const$.
3. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1, C - const$.
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, C - const$.
5. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1, C - const$.
6. $\int e^{u} du = e^{u} + C, C - const$.
7. $\int \sin u du = -\cos u + C, C - const$.
8. $\int \cos u du = \sin u + C, C - const$.
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C, C - const$.
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C, C - const$.
11. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C,\ a \neq 0, C - const$.
12. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C,\ a \neq 0, C - const$.
13. $\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C, C - const$.
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C,\ a \neq 0, C - const$.
15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C, C - const$.
16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C,\ a \neq 0, C - const$.
17. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C,\ a \neq 0, C - const$.

Пример:

$$\int \frac{x^3 + x^2 e^x - 3}{x^2}\, dx = \int \left(x + e^x - \frac{3}{x^2} \right) dx =$$

$$= \int x\, dx + \int e^x dx - 3\int \frac{dx}{x^2} = \frac{x^2}{2} + e^x + \frac{3}{x} + c.$$

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или подынтегрального выражения) и применения свойств неопределенного интеграла сводится к одному или нескольким табличным называется *непосредственным интегрированием*.

При сведении данного интеграла к табличному, используют следующие преобразования дифференциала (операция «поднесение под знак дифференциала»):

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)\,d(kx+b) = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$$

Примеры

$$\int \frac{dx}{x-4} = \int \frac{d(x-4)}{x-4} = \ln|x-4|+C$$

$$\int (2x+3)^{17}dx = \int (2x+3)^{17}\cdot\frac{1}{2}d(2x+3) = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{17}d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{18}}{18}+C = \frac{(2x+3)^{18}}{36}+C$$

Метод подстановки в неопределенном интеграле

Метод замены переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки) описывается следующей формулой: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$, где $x=\varphi(t)$ - функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

Пример. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{x-3}dx$

Решение. $\int x\sqrt{x-3}dx = \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}=t,\\ x=t^2+3, dx=d\left(t^2+3\right)=\left(t^2+3\right)'dt=2tdt\end{array}\right]=$

$$=\int\left(t^2+3\right)t\cdot 2tdt = 2\int\left(t^4+3t^2\right)dt = 2\cdot\frac{t^5}{5}+2\cdot 3\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C.$$

Теперь вернемся к старой переменной:

$$\int x\sqrt{x-3}dx = \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+(x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Справедлива следующая формула

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} t=\varphi(x),\\ \mathrm{d}t=\varphi'(x)\mathrm{d}x\end{array}\right\} = \int f(t)\mathrm{d}t.$$

Примеры:

1) $$\int \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{d}x = \frac{\sin x\, \mathrm{d}x}{\cos x} = \left\{\begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right\} =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

2) $\int e^{x^5} x^4 dx$.

$$\int e^{x^5} x^4 dx = \begin{bmatrix} u = x^5, \\ du = 5x^4 dx, \\ x^4 dx = \frac{1}{5} du \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{x^5} + C.$$

Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда $d(uv) = udv + vdu$. Интегрируя обе части данного равенства, получим:

$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, то есть $uv = \int udv + \int vdu$.

Из данного равенства следует, что

$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$ **- формула интегрирования по частям.**

Приведем некоторые часто встречающиеся типы интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям:

I Для вычисления интегралов вида $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $k \in R$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, следует положить $u = P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям.

II Для вычисления интегралов вида $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arc}\,tgxdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arc}\,ctgxdx$ за u следует принять функцию, являющуюся множителем при многочлене $P_n(x)$, $dv = P_n(x)dx$ и применить формулу интегрирования по частям.

III Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$, $a, b \in R$, $\int \cos(\ln x)dx$, $\int \sin(\ln x)dx$ вычисляются двукратным интегрированием по частям.

Примеры. Вычислить интегралы

1) $\int xe^{3x}dx$; 2) $\int x^2 \ln x dx$.

Решение. 1) Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена $P_1(x)=x$ и экспоненты e^{3x} (интеграл типа I), значит за u принимаем $P_1(x)=x$:

$$\int xe^{3x}dx = \begin{bmatrix} u=x & du=x'dx=dx \\ dv=e^{3x}dx & v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot x - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot x - \frac{1}{9}e^{3x}+c.$$

2) Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена $P_2(x)=x^2$ и логарифма $\ln x$ (интеграл типа II), значит за u принимаем $\ln x$:

$$\int x^2 \ln x dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=(\ln x)'\,dx=\frac{dx}{x} \\ dv=x^2dx & v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$