<u>Раздел</u>**: Теория вероятностей и математическая статистика**

Теория вероятностей. Случайные события.

Опытом, или *испытанием*, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление. Возможный результат опыта называют *событием*. Например, опытом является подбрасывание монеты, а событиями "герб", "цифра на верхней ее стороне" (когда монета упадет). Опытами являются стрельба по мишени, извлечение шара из ящика и т.п. События будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, ...

Событие называется *достоверным* в данном опыте, если оно обязательно произойдет в этом опыте. Например, если в ящике находятся только голубые шары, то событие "из ящика извлечен голубой шар" является достоверным (в ящике нет шаров другого цвета).

Событие называется *невозможным* в данном опыте, если оно не может произойти в этом опыте. Так, если в ящике находятся только красные шары, то событие "из ящика извечен голубой шар" является невозможным (таких шаров в ящике нет).

Событие называется *случайным* в данном опыте, если оно может произойти, а может и не произойти в этом опыте. Например, если в ящике находятся n голубых и m красных шаров, одинаковы по размеру и весу, то событие "из урны извлечен голубой шар" является случайным (оно может произойти, а может и не произойти, поскольку в урне имеются не только голубые, но и красные шары). Случайными событиями являются "герб" и "цифра на верхней стороне монеты при ее подбрасывании", "попадание и промах при стрельбе по мишени", "выигрыш по билету лотереи" и т.п.

Два события называются *совместными* в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого в этом опыте. Так, при подбрасывании двух симметричных монет, события A - "герб на верхней стороне первой монеты" и B - "цифра на верхней стороне второй монеты" являются совместными.

Два события называются *несовместными*, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании. Например, несовместными являются попадание и промах при одном выстреле.

Несколько событий называются *несовместными*, если они попарно-несовместны.

Два события называются *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Так, противоположными являются события "герб" и "цифра" при одном подбрасывании симметричной монеты. Если одно из противоположных событий обозначено буквой A, то другое обозначают $\overline{A}$. Например, если A - "попадание", то $\overline{A}$ - "промах" при одном выстреле по мишени.

Множество событий A_1, A_2, ..., A_n называют *полной группой событий*, если они попарно-несовместны; появление одного и только одного из них является достоверным событием. Поясним понятие полной группы событий на следующем примере. Рассмотрим события, появляющиеся при подбрасывании игрального кубика (т.е. кубика, на гранях которого записаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 или изображены знаки, соответствующие этим цифрам). Когда кубик упадет, то верхней гранью окажется грань с одной из этих цифр. Событие: "верхней гранью оказалась грань с цифрой k" обозначим через A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 образуют полную группу: они попарно-несовместны; появление одного и только одного из них является достоверным событием (когда кубик упадет, то только одна из граней окажется верхней, на ней написана только одна из цифр от 1 до 6).

События считают *равновозможными*, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие. Например, при подбрасывании монеты событие A (появление цифры) и событие B (появление герба) равновозможны, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не влияет на то, какая сторона монеты (герб или цифра) окажется верхней. При подбрасывании игрального кубика события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ являются равновозможными, поскольку предполагается, что кубик изготовлен из однородного материала, имеет правильную форму и наличие цифр (или очков) на гранях не влияет на то, какая из шести граней окажется верхней.

Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта, называется *элементарным исходом* (*элементарным событием*, или *шансом*). Например, события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 - элементарные исходы при подбрасывании кубика.

Элементарные исходы, при которых данное событие наступает, называются *благоприятствующими* этому событию, или *благоприятными шансами*. Так, при подбрасывании игрального кубика элементарные исходы A_2, A_4, A_6 являются благоприятствующими событию "выпало четное число очков".

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных исходов опыта, в котором может появиться это событие. Вероятность события A обозначают через $P(A)$ (здесь P - первая буква французского слова probabilité - вероятность). В соответствии с определением

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1.2.1)$$

где m - число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; n - число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий.

Это определение вероятности называют классическим. Оно возникло на начальном этапе развития теории вероятностей.

Вероятность события имеет следующие свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице. Обозначим достоверное событие буквой U. Для достоверного события $m = n$, поэтому

$$P(U)=1. \qquad (1.2.2)$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю. Обозначим невозможное событие буквой V. Для невозможного события $m = 0$, поэтому

$$P(V)=0. \qquad (1.2.3)$$

3. Вероятность случайного события выражается положительным числом, меньшим единицы. Поскольку для случайного события A выполняются неравенства $0 < m < n$, или $0<\frac{m}{n}<1$, то

$$0< P(A)<1. \qquad (1.2.4)$$

4. Вероятность любого события B удовлетворяет неравенствам

$$0 \le P(B) \le 1. \qquad (1.2.5)$$

Это следует из соотношений (1.2.2) - (1.2.4).

Пример 1. В урне 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется голубым?

Решение. Событие "извлеченный шар оказался голубым" обозначим буквой A. Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 6 благоприятствуют событию A. В соответствии с формулой (1.2.1) получаем

$$P(A)=\frac{6}{10}=0{,}6.$$

Пример 2. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение. Обозначим через A событие "число на взятой карточке кратно 5". В данном испытании имеется 30 равновозможных элементарных исходов, из которых событию A благоприятствуют 6 исходов (числа 5, 10, 15, 20, 25, 30). Следовательно,

$$P(A) = \frac{6}{30} = 0{,}2\,.$$

Действия над событиями

Суммой, или *объединением*, двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Сумма двух событий A и B обозначается через $A+B$ или $A \cup B$. Аналогично определяется и обозначается сумма n событий - событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Сумму n событий $A_1, A_2, ..., A_n$ обозначают так:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k \text{ , или } A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k\,.$$

Произведением, или *пересечением*, двух событий называется событие, состоящее в одновременном их появлении. Произведение двух событий A и B обозначается через AB или $A \cap B$. Аналогично определяется и обозначается произведение в случае большего числа событий. Произведение n событий $A_1, A_2, ..., A_n$ обозначают:

$$A_1\ A_2\ ...\ A_n \text{ или } A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n\,.$$

Два события называются *независимыми*, если наступление одного из них не изменяет вероятности наступления другого.

Теорема сложения вероятностей двух событий

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)\,. \qquad (1.8.1)$$

Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1.8.2)$$

Замечание 1. Формула (1.8.2) получается из формулы (1.8.1), когда A и B - несовместные события; в этом случае AB - невозможное событие и $P(AB)=0$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (1.8.5)$$

Вероятность события B при условии, что произошло событие A, называется *условной вероятностью* события B и обозначается так: $P(B/A)$, или $P_A(B)$.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB)=P(A)P(B/A),\ \ P(AB)=P(B)P(A/B). \qquad (1.8.8)$$

Событие B не зависит от события A, если

$$P(B/A)=P(B), \qquad (1.8.9)$$

т.е. вероятность события B не зависит от того, произошло ли событие A.

В этом случае и событие A не зависит от события B, т.е. свойство независимости событий является взаимным.

Отметим, что если A и B не зависимы, то независимы $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (1.8.10)$$

Пример 2. В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шарик?

Решение. Извлечение цветного шарика означает появление либо голубого, либо зеленого шарика. Вероятность извлечения голубого шарика (событие A): $P(A) = 15/40 = 3/8$. Вероятность извлечения зеленого шарика (событие B): $P(B) = 5/40 = 1/8$. Так как события A и B несовместны, то по формуле (1.8.2) получаем

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Замечание. Тот же результат получается и непосредственно по формуле $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$, где C - "появление цветного шара"; этому событию благоприятствует 20 элементарных исходов.

Пример 5. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго - 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен?

Решение. Введем обозначения: события A - "попадание первого спортсмена", B - "попадание второго спортсмена", C - "попадание хотя бы одного из спортсменов". Очевидно, $A + B = C$, причем события A и B совместны. В соответствии с формулой (1.8.1) получаем

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

или

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

поскольку A и B - независимые события, а для них верна формула (1.8.10). Подставив данные значения $P(A) = 0{,}85$, $P(B) = 0{,}8$ в формулу для $P(C)$, найдем искомую вероятность

$$P(C) = (0{,}85 + 0{,}8) - 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}97.$$

Пример 8. В урне находится 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность того, что все 3 шара голубые.

Решение. Введем обозначения: A_1 - "первый шар голубой", A_2 - "второй шар голубой", A_3 - "третий шар голубой", A - "все 3 шара голубые", тогда $A = A_1 A_2 A_3$. Воспользуемся формулой (1.8.11), которая при $n = 3$ принимает вид

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2).$$

(см. формулу (1.8.12) в других обозначениях).

Поскольку

$$P(A_1)=\frac{6}{14},\ P(A_2/A_1)=\frac{5}{13},\ P(A_3/A_1A_2)=\frac{4}{12},$$

то

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}=\frac{5}{91}\approx 0{,}055\ .$$

Замечание. Эту вероятность можно найти и непосредственным подсчетом по формуле (1.2.1).

Поскольку в данном случае

$$n=C_{14}^3=\frac{14!}{3!\cdot 11!},\ m=C_6^3=\frac{6!}{3!\cdot 3!},\ P(A)=\frac{C_6^3}{C_{14}^3},$$

то

$$P(A)=\frac{6!}{3!\cdot 3!}:\frac{14!}{3!\cdot 11!}=\frac{6!\cdot 3!\cdot 11!}{14!\cdot 3!\cdot 3!}=\frac{6!\cdot 11!}{14!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{12\cdot 13\cdot 14}=\frac{5}{91}.$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Рассмотрим n попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, для которых известны вероятности $P(H_i)\neq 0$ $(i=1,\ 2,\ ...,\ n)$ и событие $A\subset H_1+H_2+...+H_n$, причем известны условные вероятности $P(A/H_i)$. Вероятность события A определяется формулой

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)\ . \qquad (1.9.1)$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*. События $H_1, H_2, ..., H_n$ иногда называют *гипотезами*.

Пример 1. На фабрике изготовляющей болты, первая машина производит 30%, вторая - 25%, третья - 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно выбранный болт - дефектный, а через H_1, H_2, H_3 - события, состоящие в том, что этот болт произведен соответственно первой, второй и третьей машинами. Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=0{,}30,\ P(H_2)=0{,}25,\ P(H_3)=0{,}45;$$

$$P(A/H_1)=0{,}02,\ P(A/H_2)=0{,}01,\ P(P/H_3)=0{,}03.$$

По формуле (1.9.1) при $n = 3$ получаем

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)\ P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}022.$$

Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ - попарно-несовместные события, вероятности которых $P(H_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, ..., n$), и событие $A \subset H_1 + H_2 + ... + H_n$, для которого известны условные вероятности $P(A/H_i)$ ($i = 1, 2, ..., n$). Произведен опыт, в результате которого появилось событие A. Условные вероятности событий $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события A определяются формулами

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \quad (k = 1, 2, ..., n), \qquad (1.10.1)$$

или

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)} \quad , \qquad (1.10.2)$$

где

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i) \text{ - формула полной вероятности.}$$

Формулы (1.10.1) называют *формулами Бейеса.*

Замечание. Вероятности $P(H_k)$ ($k = 1, 2, ..., n$) событий $H_1, H_2, ..., H_n$ до опыта называются *априорными вероятностями* (от латинского *a priori*, что означает "*сперва*", т.е. в данном случае до того, как был произведен опыт). Вероятности $P(H_k/A)$ ($k = 1, 2, ..., n$) тех же событий называются *апостериорными* (от латинского слова *a posteriori*, что означает "*после*", т.е. в данном случае после опыта).

Пример 1. В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на двух автоматах: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные - вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго - 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие является бракованным, а через H_1, H_2 - события, состоящие в том, что это изделие изготовлено соответственно первым и вторым автоматом.

Из условия следует, что

$$P(H_1)=0{,}4, \quad P(H_2)=1-P(H_1)=1-0{,}4=0{,}6;$$

$$P(A/H_1)=0{,}03, \quad P(A/H_2)=0{,}02 .$$

Искомую вероятность найдем по формуле (1.10.2), предварительно определив $P(A)$ согласно формуле (1.9.1), которая в данном случае принимает вид

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2) .$$

Подставляя сюда соответствующие значения, получаем

$$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}03+0{,}6\cdot 0{,}02=0{,}024 .$$

В соответствии с формулой (1.10.2) находим

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}03}{0{,}024}=0{,}5 .$$