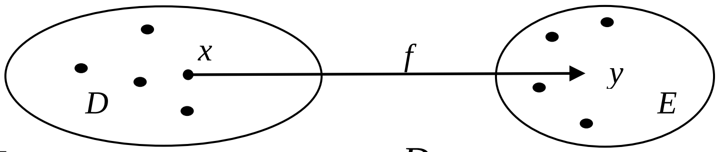
Глава 1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

§ 1. Понятие функции. Способы задания функции. Обратная функция.

I. Определение. Пусть даны два непустых множества D и E.



Опр. Если каждому элементу $x \in D$ по определенному правилу (закону) f ставится в соответствие единственный элемент $y \in E$, то говорят, что на множестве D задана функция $y = f(x)$.

Если D и E – числовые множества, то $y = f(x)$ – **числовая** функция.

Принята следующая терминология:

x – независимая переменная или аргумент; y – зависимая переменная;

D – область определения функции; E – множество значений функции.

При конкретном значении аргумента $x = x_0$ получим **частное значение функции** $y_0 = f(x_0)$ или $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

II. Способы задания функции.

1. *Аналитический. Явное и неявное задание функции*

Функция задается аналитическим выражением, т.е. формулой.

Пример. а) $y = x^3 + 2$; б) $y = \begin{cases} -x, & -5 \le x \le -1; \\ 2 - x^2, & -1 < x \le 5. \end{cases}$

$y = f(x)$ – **явное** задание функции. **Пример.** $y = x^3$.

$F(x, y) = 0$ – **неявное** задание функции.

Примеры. а) $2^y + y + \ln y - x^2 = 0$; б) $3^y - x^2 - 1 = 0$ (здесь можно перейти к явному).

Преимущества: удобно изучать свойства. **Недостатки**: малая наглядность.

2. *Табличный*

В таблице указывается в определенном порядке значения аргумента и соответствующие значения функции.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Пример. Таблицы тригонометрических функций.

Преимущества: Без вычислений находятся соответствующие значения функции.

Недостатки: не можем получить значений y, не указанных в таблице.

3. *Графический*

Функция представляется графиком.

Пример. Графики, полученные с помощью самопишущих приборов, например, ***электро**кардиограмма* (кривая изменения электрических импульсов сердечной мышцы, вычерчиваемая электрокардиографом); *барограммы* (кривые зависимости между давлением и временем в метеорологии).

Преимущества: наглядность.

Недостатки: неточность, неудобен при применении математического аппарата.

4. *Программный.*

Функция задается с помощью указания программы на одном из машинных языков.

III. Обратная функция.

Теорема. Если $y = f(x)$ монотонная функция (возрастает или убывает), то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая, то f^{-1} – возрастающая; если f – убывающая, то и f^{-1} – убывающая.

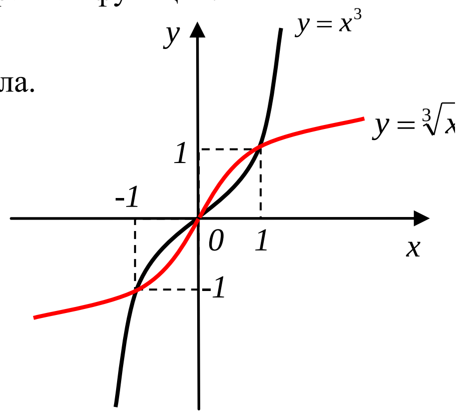
Методика построения графика обратной функции.

1) $y = f(x)$ монотонная на $D(f)$.

2) Решаем $y = f(x)$ относительно x, т.е. находим $x = f^{-1}(y)$ (по существу $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ выражают одну и ту же зависимость, графики совпадают).

3) Переобозначаем переменные, т.е. $y = f^{-1}(x)$ - обратная функция.

4) График $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.



Пример. $y = x^3$ – возрастает на $D=R$;

$x = \sqrt[3]{y}$;

$y = \sqrt[3]{x}$ – обратная функция.

IV. Основные элементарные функции.

Самостоятельно. Графики функций:

1) постоянная $y = c$;

2) степенная $y = x^m$, $m \in R$,

а) $m = 1,3$; $y = x$, $y = x^3$; б) $m = 2,4$; $y = x^2$, $y = x^4$; в) $m = 1/2$; $y = \sqrt{x}$; г) $m = -1$; $y = \dfrac{1}{x}$.

3) показательная $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$. а) $a > 1$, б) $0 < a < 1$;

4) логарифмические: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ $(a > 1, 0 < a < 1)$;

5) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$;

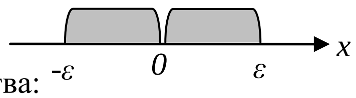
6) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

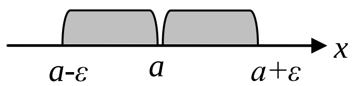
V. Абсолютная величина действительного числа, ее свойства.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

$|x| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ равносильно $-\varepsilon < x < \varepsilon$.

$|x - a| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ равносильно $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.





Свойства:

1) $|x + y| \leq |x| + |y|$; 2) $|x - y| \geq |x| - |y|$; 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; 4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, где $y \neq 0$.

§ 2. Переменная величина. Упорядоченная переменная.

Опр. Переменной называется величина, которая принимает различные численные значения.

Частный случай – постоянная величина, значение которой не меняется.

Переменные величины обозначают: x, y, z, а постоянные: a, b, c.

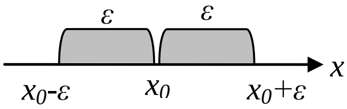
Опр. Совокупность всех числовых значений переменной величины называется **областью изменения** этой переменной.

Опр. Окрестностью данной точки x_0 называется произвольный интервал (a,b), содержащий эту точку внутри себя.

Обычно рассматривается такая окрестность точки, для которой x_0 является серединой.

ε – окрестность точки x_0;

x_0 – **центр** окрестности; ε – **радиус** окрестности.

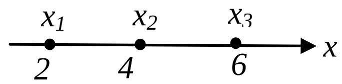
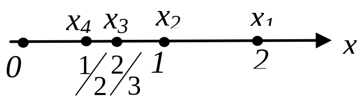
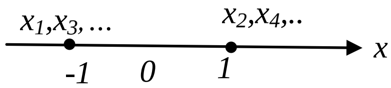
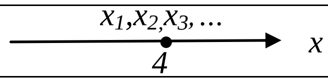


Опр. Переменная x является **упорядоченной переменной** величиной, если известна область изменения этой переменной величины и про каждое из двух любых ее значений можно сказать, какое значение предыдущее, а какое последующее.

Важный частный случай упорядоченной переменной является величина, значение которой образуют числовую последовательность.

Опр. Если каждому натуральному числу 1,2, 3, …, n, … поставить в соответствие некоторое действительное число, то получится **числовая последовательность** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, члены которого занумерованы натуральными числами и расположены в порядке возрастания номеров. Последовательность обозначают $\{x_n\}$ или (x_n), или x_n.

Примеры.

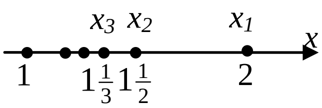
1)	$\{x_n\}=\{2n\}$	$x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=6,\ldots$	
2)	$\{x_n\}=\{2/n\}$	$x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=2/3,\ x_4=1/2,\ldots$	
3)	$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$	$x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=1,\ldots$	
4)	$\{x_n\}=\{4\}$	$x_1=4,\ x_2=4,\ x_3=4,\ x_4=4,\ldots$	

§ 3. Предел упорядоченной переменной величины.

I. Определение предела.

Рассмотрим упорядоченную переменную, значения которой образуют числовую последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

Пример. $\{x_n\}=\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$. $x_1=2;\quad x_2=1\dfrac{1}{2},\quad x_3=1\dfrac{1}{3},\quad x_4=1\dfrac{1}{4},\ldots$



Значения переменной приближаются к 1, сгущаются около 1 (но никогда x_n не примет значение, равное 1).

Опр. Число a называется **пределом переменной** x_n (**пределом числовой последовательности**), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех значений x_n, у которых номер $n>N$, будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

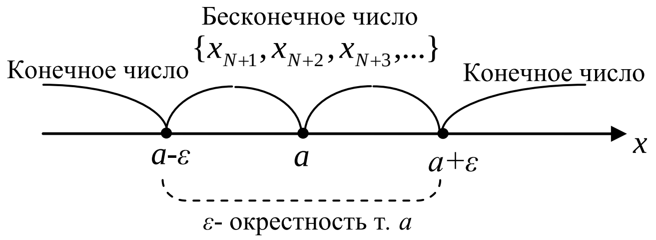
Обозначают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Определение предела на языке символов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N = N(\varepsilon),\ \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon.$$

II. Геометрический смысл предела.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, где $n>N$.



$$\lim_{n\to\infty} x_n = a: \quad \underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_N}_{\text{конечное число}} \notin \varepsilon - \text{окрестности точки } a;$$

$$\underbrace{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots}_{\text{бесконечное число}} \in \varepsilon - \text{окрестности точки } a.$$

Какое бы ε мы не взяли, внутри $\varepsilon -$окрестности точки a существует бесконечно много значений переменной x_n, которые сгущаются около точки a.

III. Следствия из определения предела.

1. Единственность предела.

Теорема. Если переменная имеет предел, то он единственный.

2. Предельный переход в неравенствах.

Теорема. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

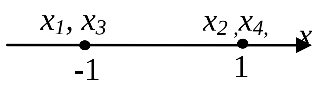
1) Если $x_n \ge y_n$, то $a \ge b$; 2) Если $x_n \le y_n$, то $a \le b$;

3) Если $x_n > y_n$ $(x_n < y_n)$, то $a \ge b$ ($a \le b$).

3. Предел постоянной.

Теорема. Предел постоянной есть сама постоянная: $x_n = c$ ($c = const$), тогда $lim\, c = c$.

Замечание. Перемененная может не иметь предела: $x_n = (-1)^n$.



IV. Ограниченная переменная.

Опр. Переменная x_n называется **ограниченной**, если все ее значения по абсолютной величине не превосходят некоторого положительного числа M, т.е. $|x_n| \le M$ для $\forall n$.

Теорема. Если переменная имеет конечный предел, то она ограниченная.

Замечание. Обратная теорема не верна.

Например, $x_n = (-1)^n$ - ограниченная, т.к. $|x_n| = |(-1)^n| \le 1$, но предела не имеет.

§ 4. Бесконечно малые величины.

I. Определение.

Опр. 1. Переменная величина x_n называется ***бесконечно малой***, если ее предел равен 0,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Опр. 2. Переменная величина x_n называется ***бесконечно малой***, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех значений x_n, у которых номер $n > N$, будет выполняться $|x_n| < \varepsilon$

$x_n -$ бесконечно малая $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ \forall\, n > N$: $|x_n| < \varepsilon$

Бесконечно малые (б. м.) величины обозначают: $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Примеры. а) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$; б) $\alpha_n = \dfrac{10000}{10^n} -$ бесконечно малые;

в) $\alpha_n = 0{,}00000001 -$малая величина, но не является беск-но малой, т.к. постоянная.

Термин «бесконечно малая» не сосем удачный, т.к. величина в процессе изменения становится малой. Единственное число 0 является бесконечно малой.

II. Леммы о бесконечно малых.

Лемма 1. Сумма двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Лемма 2. Разность двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Лемма 3. Произведение двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Замечание 1. Леммы 1-3 справедливы для любого конечного числа величин.

Замечание 2. Характер переменной величины, получаемой в результате деления двух бесконечно малых, заранее не определен.

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \to 0; \qquad \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{2}{3} \to \frac{2}{3}; \qquad \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \to \infty.$$

Лемма 4. Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

Следствие. Произведение бесконечно малой на число (константу) есть величина бесконечно малая.

III. Теорема о связи предела с бесконечно малой величиной.

Теорема. Если переменная имеет конечный предел, то ее можно представить в виде суммы этого предела и бесконечно малой величины.

$$x_n \to a. \text{ то } x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n \to 0.$$

Обратная теорема. Если переменную можно представить в виде суммы числа и бесконечно малой, то это число есть предел переменной.

$$x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n \to 0, \text{ то } \lim x_n = a.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n \to 0.$$

IV. Три эквивалентные (равносильные записи) предела переменной

1) $\lim x_n = a.$ 2) $x_n \to a.$ 3) $x_n = a + \alpha_n,\ \alpha_n \to 0.$

Везде подразумевается, что $n \to \infty.$

§ 5. Бесконечно большие величины. Связь бесконечно больших и бесконечно малых величин.

Опр. Переменная величина x_n называется **бесконечно большой**, если для любого сколь угодно большого положительного числа A найдется такой номер N, что для всех значений переменной x_n, у которых номер $n > N$, будет выполняться неравенство $|x_n| > A$.

Обозначается: $\lim x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$ (при $n \to \infty$).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Leftrightarrow\ \forall A > 0,\ \exists N = N(A), \forall n > N\colon |x_n| > A$$

Замечание. Число N зависит от A.

Примеры. 1) $x_n = n^2$; 2) $x_n = -n^2$; 3) $x_n = (-1)^n \cdot n^2$;

4) $x_n = 10^{10^{10}}$ – колоссальная величина, но постоянна, не стремится к ∞.

Термин «x_n стремится к бесконечности» неточен: x_n никуда не стремится, ни к какому числу, а изменяется так, что перерастает любое положительное число.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых величин.

Теорема 1. Величина обратная бесконечно большой есть величина бесконечно малая.

$$\text{Если } x_n \to \infty, \text{ то } \frac{1}{x_n} \to 0.$$

Теорема 2. Величина, обратная бесконечно малой, есть величина бесконечно большая.

$$\text{Если } x_n \to 0, \text{ то } \frac{1}{x_n} \to \infty.$$

§ 6. Теоремы о пределах (арифметические операции над переменными).

Пусть переменные x_n и y_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Теорема 1. Предел суммы двух переменных равен сумме пределов этих переменных

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 2. Предел разности двух переменных равен разности пределов этих переменных

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Замечание. Теоремы 1 и 2 справедливы для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 3. Предел произведения двух переменных равен произведению пределов этих переменных

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot x_n = c \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Замечание. Теорема 3 распространяется для любого конечного числа сомножителей.

Теорема 4. Предел частного двух переменных равен частному пределов этих переменных, при условии, что предел делителя отличен от нуля

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad \text{где } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

§ 7. Предел функции.

1. Определение предела функции в точке.

Пусть $y=f(x)-$ функция, определенная на некотором промежутке *X*, за исключением, быть может, т. x_0 этого промежутка. Возьмем некоторую последовательность значений переменной *x* (отличных от x_0), имеющих своим пределом x_0.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \in X, \quad x_n \to x_0. \qquad (1)$$

Последовательности (1) отвечает последовательность значений функции

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots \qquad (2)$$

Последовательность $x_n \to x_0$ может быть задана множеством способов.

Опр. 1 (по Гейне). Число *b* называется **пределом функции** *f(x)* в точке x_0, если для любой последовательности вида (1) из *X*, сходящейся в x_0, последовательность (2) соответствующих значений функции сходятся к числу *b*.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

В символах: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b \iff \forall\{x_n\}: \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b.$

Опр. 2 (по Коши). Число *b* называется **пределом функции** $f(x)$ в точке x_0, если для любого, сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех *x*, отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Обозначают: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ или $f(x)\to b$ при $x\to x_0$.

В символах:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x\neq x_0 :|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon.$$

Замечание. При определении предела функции *f(x)* в т. x_0 не требуется, чтобы функция была задана в т. x_0, нужно, чтобы функция была определена в какой-либо окрестности т. x_0.

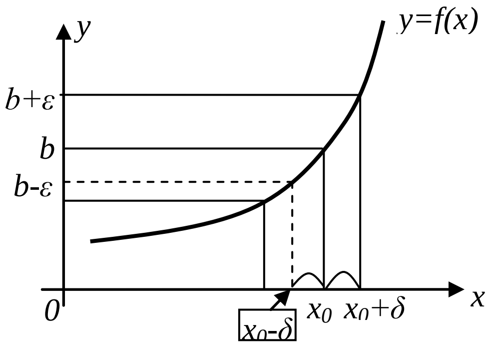
2. Геометрическая интерпретация предела функции в точке.

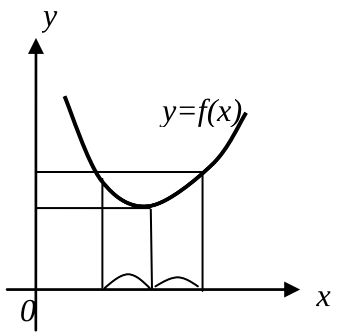
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x\neq x_0 :|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon$$

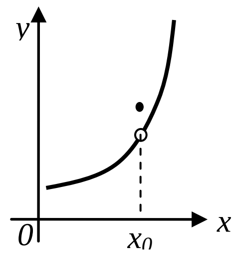
$|x-x_0|<\delta$ равносильно $-\delta<x-x_0<\delta$ или $x_0-\delta<x<\delta+x_0$,

$|f(x)-b|<\varepsilon$ равносильно $-\varepsilon<f(x)-b<\varepsilon$ или $b-\varepsilon<f(x)<\varepsilon+b$.

Для всех $x\neq x_0$ из $\delta-$окрестности т. x_0 соответствующие значения функции *f(x)* попадают в $\varepsilon-$окрестность т. *b*.







3. Односторонние пределы функции

1) Пусть $x \to x_0$ только слева, оставаясь меньше х.

Опр. Число b_1 называется **пределом функции** *f(x)* в т. x_0 **слева** (**левосторонним пределом**), если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \;\Rightarrow\; | f(x) - b_1 | < \varepsilon .$$

Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_1$ или $f(x_0 - 0)$.

2) Пусть теперь $x \to x_0$ справа, т.е. *x* остается больше x_0.

Опр. Число b_2 называется **пределом функции** *f(x)* в т. x_0 **справа** (**правосторонним пределом**), если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \;\Rightarrow\; | f(x) - b_2 | < \varepsilon$.

Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b_2$ или $f(x_0 + 0)$.

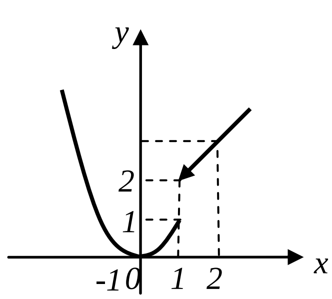
Пределы слева и справа называются **односторонними пределами** функции.

3) Если функция *f(x)* во внутренней т. x_0 имеет предел, то она имеет пределы в т. слева и справа, причем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b.$

Справедливо и обратное: если односторонние пределы функции в т. x_0 существуют и равны, то будет существовать и предел функции в т. x_0, равный им.

Но односторонние пределы могут существовать, но не равняться друг другу.

Пример 7. 1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1, \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$

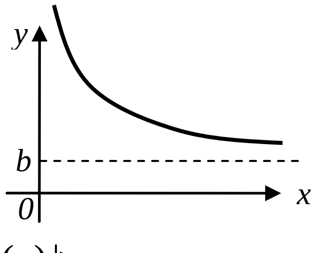


$$\lim_{x \to 1 - 0} f(x) = \lim_{x \to 1 - 0} x^2 = 1;$$

$$\lim_{x \to 1 + 0} f(x) = \lim_{x \to 1 + 0} (x + 1) = 2;$$

$\lim\limits_{x \to 1 - 0} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 1 + 0} \;\Rightarrow$ в точке *x*=1 функция терпит разрыв.

Замечание 1. ***Предел функции при*** $x \to \infty$.



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \forall x > \delta \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \forall x < \delta \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon.$$

Замечание 2. ***Бесконечный предел функции***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \ne x_0 : | x - x_0 | < \delta \Rightarrow | f(x) | > \varepsilon .$$

(Если $+\infty$, то $f(x) > \varepsilon$; если $-\infty$, то $f(x) < -\varepsilon$).

Пример. $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=+\infty.$

4. Распространение теорем о пределах переменной на случай функции.

Все теоремы, доказанные для переменной величины, справедливы и для функций произвольной действительной переменной.

Например: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x).$

§ 8. Различные виды неопределенностей и их раскрытие.

Ранее рассмотрели теоремы о пределах суммы, разности, произведения, частного, где пределы рассмотренных компонент существовали и были конечны. Рассмотрим случаи, когда пределы бесконечны или случай, когда предел делителя равен нулю.

1. Неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)=\dfrac{0}{0}.$

1) Пусть $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ – **рациональная дробь** (отношение двух многочленов).

Выделить множитель $(x-x_0)$ и сократить дробь на него. Такое сокращение возможно, т.к. $x\to x_0$, но $x\ne x_0$, т.е. $x-x_0\ne 0.$

Пример 8.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}=$

2) Пусть $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ – дробь, содержащая **иррациональные** выражения.

«Избавиться» от иррациональности, домножив числитель и знаменатель на соответствующее сопряженное выражение.

Пример 8.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}=$

3) Для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, содержащей тригонометрические выражения, применяют 1-й замечательный предел.

2. Неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$

Для того, чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель разделить на наибольшую степень переменного.

Пример 8.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+12x^2-2}{5x^3+x-10}=$

Пример 8.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{4x^4-2x^2+1}=$

Пример 8.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x-1}{x^4-x+3}=$

Замечание. $P_m(x)=a_m x^m+a_m x^{m-1}+\ldots+a_0$,
$Q_n(x)=a_n x^n+a_n x^{n-1}+\ldots+a_0$,

$$\lim\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\begin{cases}\infty, & m>n,\\ \dfrac{a_m}{a_n}, & m=n,\\ 0, & m<n.\end{cases}$$

3. Неопределенность вида $(\infty-\infty)$

Неопределенность вида $(\infty-\infty)$ преобразуется к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ путем умножения и деления на сопряженную величину или приведения к общему знаменателю.

Пример 8.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$

Пример 8.7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=$

4. Неопределенность вида $(0\cdot\infty)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0;\qquad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty;\qquad \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=0\cdot\infty.$$

Неопределенность вида $(0\cdot\infty)$ сводится к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 8.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+1}=$

§ 9. Признаки существования предела.

I. Первый признак существования предела.

Опр. Переменная x_n (числовая последовательность $\{x_n\}$) называется

- **неубывающей**, если $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$;
- **возрастающей**, если $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$;
- **невозрастающей**, если $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots$;
- **убывающей**, если $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$.

Возрастающие и убывающие переменные называются **монотонными**.

Опр. Переменная x_n называется **ограниченной сверху**, если все ее значения не превосходят некоторого числа *M*, т.е. $\exists M : x_n \le M, \forall n.$

Опр. Переменная называется **ограниченной снизу**, если $\exists m : x_n \ge m, \forall n.$

Теорема. Первый признак существования предела

Если переменная возрастает и ограничена сверху, то она имеет конечный предел.

Если переменная убывает и ограничена снизу, то она имеет конечный предел.

II. Второй признак существования предела переменной

Теорема (о сжатой переменной). Если для переменных x_n, y_n, z_n выполняется неравенство $x_n \le y_n \le z_n$, и при этом $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a,$ $\lim\limits_{x\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{x\to\infty} y_n = a$.

§ 10. Первый и второй замечательные пределы.

I. Первый замечательный предел. Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 - \text{**первый замечательный предел**.}$$

Пример 10.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x} =$

Пример 10.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} =$

II. Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e - \text{**второй замечательный предел**.}$$

Неопределенность вида 1^∞. Положим $\dfrac{1}{x} = \alpha,$ тогда $x = \dfrac{1}{\alpha}$. Если $x \to \infty,$ то $\alpha \to 0.$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e -$ **другая форма второго замечательного предела**.

Логарифмы по основанию *e* называются натуральными и обозначаются $\ln x.$

$e = 2{,}71828183\ldots$

Пример 10.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x =$

Пример 10.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x+2}=$

Пример 10.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^{x}=$

§ 11. Классификация бесконечно малых.

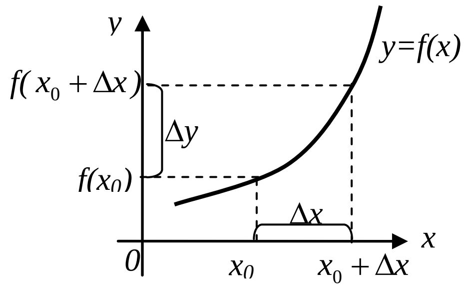
Опр. Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ (или $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$).

Сравним бесконечно малые $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$.

Предел отношения б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$	Название, обозначение	Примеры
$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad A\neq 0$	$\alpha(x),\beta(x)$ – **бесконечно малые одного порядка** $\alpha(x)=O(\beta(x))$	$\alpha(x)=\dfrac{3}{x^4},\ \beta(x)=\dfrac{5}{x^4},\ x\to\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3/x^4}{5/x^4}=\dfrac{3}{5}$
$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$	$\alpha(x),\beta(x)$ – **эквивалентные б. м.** $\alpha(x)\sim\beta(x)$	$\alpha(x)=\sin x,\ \beta(x)=x,\ x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \alpha(x)\sim\beta(x)$
$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$	$\alpha(x)$ – **бесконечно малая более высокого порядка малости, чем б. м.** $\beta(x)$ $\alpha(x)=o(\beta(x))$	$\alpha(x)=\dfrac{1}{x^3},\ \beta(x)=\dfrac{1}{x},\ x\to\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x^3}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ $\alpha(x)=o(\beta(x))$
$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$	$\alpha(x)$ – **бесконечно малая более низкого порядка малости, чем б. м.** $\beta(x)$	$\alpha(x)=\dfrac{1}{x},\ \beta(x)=\dfrac{1}{x^3},\ x\to\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1/x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$

§ 12. Непрерывность функции.

Пусть $y=f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности. Если x_0 получит приращение Δx и примет значение $x_0+\Delta x$, то функция $y=f(x)$ получит приращение Δy.



$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – **приращение функции**,

где $\Delta x=x-x_0$ – приращение аргумента.

Опр. 1. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (1)$$

Преобразуем (1): $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \big) = 0,$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ($\Delta x \to 0, \quad x \to x_0$).

Опр. 2. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности и если предел функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (2)$$

Итак, $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если выполняются 3 условия:

1) *f(x)* определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существует конечный $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Говорить о непрерывности функции можно лишь по отношению к тем точкам, в которых функция определена.

Некоторые свойства функций, непрерывных в точке.

Пусть $y = f(x)$ **непрерывна в точке** x_0**.** Тогда справедливы следующие свойства.

1. **Правило предельного перехода** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x \right).$

   Символ предела и символ непрерывной функции можно переставлять между собой.
   Вывод. Для того чтобы найти предел при $x \to x_0$ непрерывной в точке x_0 функции нужно в выражении функции вместо аргумента х подставить предельное значение x_0.
   Пример. $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 2x + 1) = 16 - 8 + 1 = 9.$

2. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ или $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$,

   где функция *f*(*x*) непрерывна точке x_0.

3. **Сохранение знака** непрерывной с точке x_0 функции для значений функции, близких к $f(x_0)$. Если непрерывная в точке x_0 функция *f*(*x*) имеет в точке x_0 положительное (отрицательное) значение, то она остается положительной (отрицательной) во всех точках некоторой окрестности точки x_0.

4. **Операции над непрерывными функциями**.

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены на промежутке *X* и непрерывны в точке x_0, то в этой точке будут непрерывны функции $\varphi(x) \pm \psi(x),\ \varphi(x) \cdot \psi(x),\ \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ($\psi(x_0) \neq 0$).

Опр. Функция $y = f(x)$ **непрерывна на некотором промежутке**, если она непрерывна **в каждой точке** этого промежутка.

§ 13. Разрывы функции.

Условия непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности

и

2) существует конечный предел $lim_{x \to x_0} f(x)$

и

3) $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$

Опр. Если в точке x_0 для функции *f(x)* не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, то функция в точке x_0 **терпит разрыв**, а точка x_0 называется **точкой разрыва** функции.

Таким образом, если

1) $f(x)$ не определена в точке x_0 и ее окрестности

или

2) не существует конечный предел $lim_{x \to x_0} f(x)$

или

3) $lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

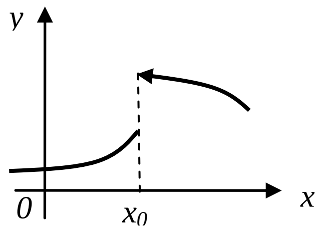
то x_0 − точка разрыва функции

Классификация точек разрыва функции

1. Точки разрыва I-го рода

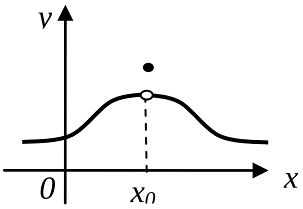
Опр. Если функция *f(x)* в точке x_0 имеет **конечные** пределы **слева** и **справа** и если не все три числа $f(x_0 - 0),\ f(x_0 + 0),\ f(x_0)$ равны между собой, то x_0 называется **точкой разрыва I-го рода**.

1) Если $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то в точке x_0 – **конечный скачок**.



x_0 – точка разрыва I-го рода, конечный скачок.

2) Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ или $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$,



а $f(x_0)$ не определена, то в точке x_0 – **устранимый разрыв**.

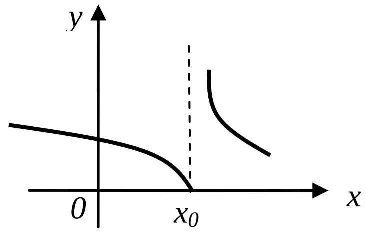
Если положить $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, то

в точке x_0 восстановится непрерывность.

2. Точки разрыва II-го рода

Опр. Если в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ или не существует,

то x_0 – **точка разрыва II-го рода**.



x_0 – точка разрыва II-го рода

Пример13.1. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$

Пример 13.2. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

Пример 13.3. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

§ 14. Сложная функция и ее непрерывность. Непрерывность элементарных функций

Пусть функция *y=y(u)* определена в области *U*, а функция *u=u(x)* – в области *X*, причем все значения функции *u=u(x)* содержатся в области *U*.

Каждому значению *x* соответствует одно определенное значение *u*, которому соответствует одно определенное значение *y*. $\forall x \to$ед. $u \to$ ед. *y*.
В конечном итоге каждому значению *x* соответствует одно определенное значение *y*.
Полученная функция $y=y(u(x))$ является **сложной функцией**, *u* – **промежуточный аргумент**, который является функцией от **независимой переменной** *x*.

Теорема. Если функция *u=u(x)* непрерывна в точке x_0, а функция *y=y(u)* непрерывна в точке $u_0=u(x_0)$, то сложная функция $y=y(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

В общем случае. Сложная функция, составленная из конечного числа непрерывных функций, непрерывна.

Замечание. Под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

Опр. Элементарной функцией называется такая функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа образований сложных функций. **Пример.** $y=\ln(1+\cos^2 x)$.

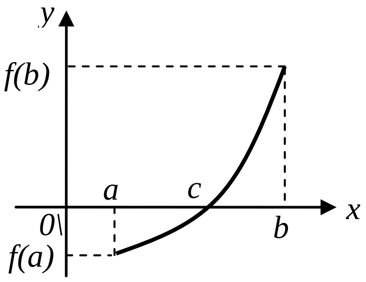
Теорема. Всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.

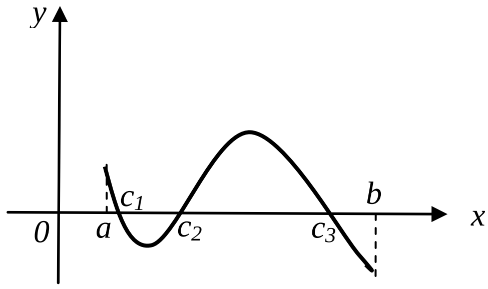
Следствие. Предел элементарной функции при $x \to x_0$, где x_0 принадлежит области определения функции, вычисляется: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$.

§ 15. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 1. ***(Первая теорема Больцано-Коши)***
Пусть *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков. Тогда внутри этого отрезка существует, по крайней мере, одна точка, в которой функция обращается в нуль.

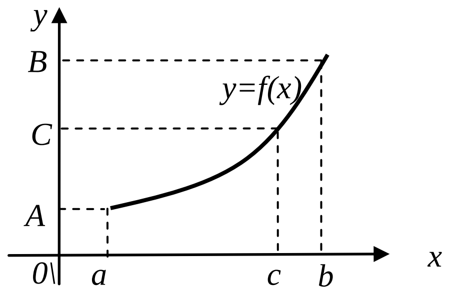
$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{непрерывна на } [a,b]; \\ f(a) < 0, \quad f(b) > 0 \text{ (или наоборот)} \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad \exists\, c \in (a,b):\, f(c) = 0\ .$$





Теорема 2. ***(Вторая теорема Больцано-Коши)***
Функция *f(x)*, непрерывная на некотором промежутке, переходя от одного своего значения к другому, принимает все промежуточные значения.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{непрерывна на } [a,b]; \\ f(a) = A, \quad f(b) = B \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad \forall\, C \in (A,B)\ \exists\ c \in (a,b):\, f(c) = C.$$

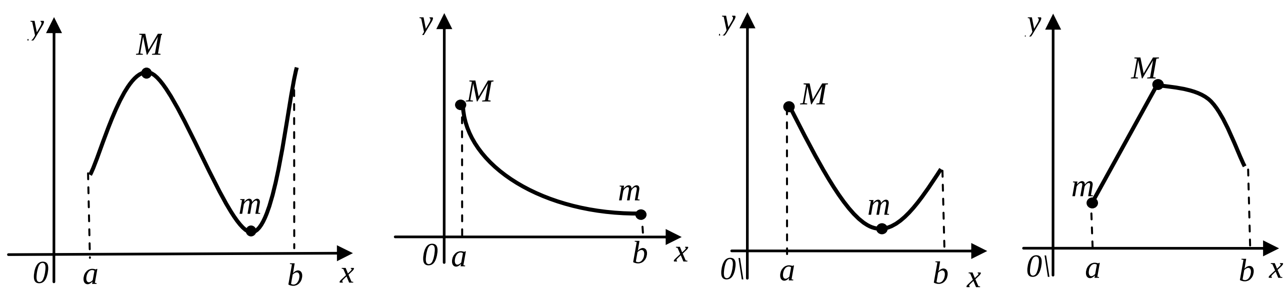


Замечание. *y=f(x)* называется **ограниченной на промежутке** *X*, если

$$\exists M:\ |\, f(x)| \le M, \quad \forall x \in X.$$

Теорема 3. ***(Первая теорема Вейерштрасса)***
Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

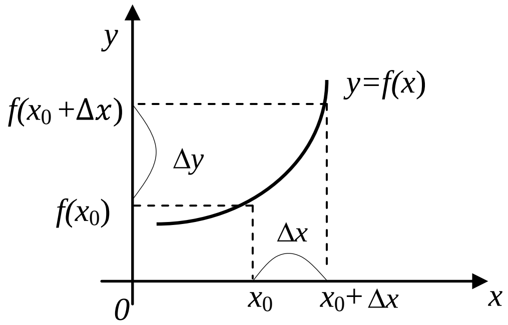
Теорема 4. ***(Вторая теорема Вейерштрасса)***
Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.



ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ.

§16. Определение производной. Необходимое условие существования производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X.



Проделаем 5 операций.

1). Возьмем $x_0 \in X$ и вычислим значение функции $f(x_0)$.

2). Дадим x_0 приращение Δx, получим $x_0 + \Delta x \in X$ и вычислим новое значение функции $f(x_0 + \Delta x)$

3). Найдем приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

4). Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

5). Найдем предел составленного отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Если этот предел существует, то его называют производной данной функции *f(x)* в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$.

Опр. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю. $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$

При конкретном значении x_0 производная (если она существует) есть определенное число; если производная существует для всех $x \in X$, то производная является функцией от *x*.

Функция *f(x)* “порождает”, “производит” функцию $f'(x)$, отсюда название.

Обозначают: y' ; $f'(x)$ – обозначения Лагранжа, $\frac{dy}{dx}$ – обозначение Лейбница.

При конкретном x_0: $y'\big|_{x=x_0}$, $f'(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

Замечание. Если для некоторого *x*: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то для этого *x* существует **бесконечная производная**.

Опр. Если функция $f(x)$ определена в левосторонней (правосторонней) окрестности т. x_0 и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$, то он называется конечной или бесконечной производной слева (справа) функции $f(x)$ в т. x_0 и обозначается

$f'(x_0-0)$ ($f'(x_0+0)$) - **односторонние производные**.

Из свойств пределов получаем: если $f(x)$ определена в окрестности т. x_0, имеет конечную производную $f'(x_0)$, то существуют односторонние производные, причем

$$\boxed{f'(x_0)=f'(x_0-0)=f'(x_0+0)}.$$

Замечание. В дальнейшем под выражением “функция имеет производную” будем понимать существование **конечной производной**.

Опр. Операция нахождения производной от функции называется **дифференцированием** этой функции. Функция $y=f(x)$, имеющая производную в т. x_0, называется **дифференцируемой в этой точке**.

Необходимое условие существования производной (связь между дифференцированием и непрерывностью)

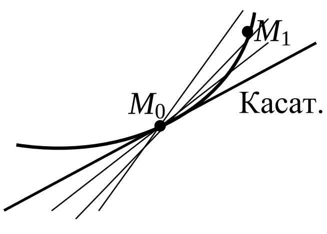
Теорема. Непрерывность дифференцируемой функции. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

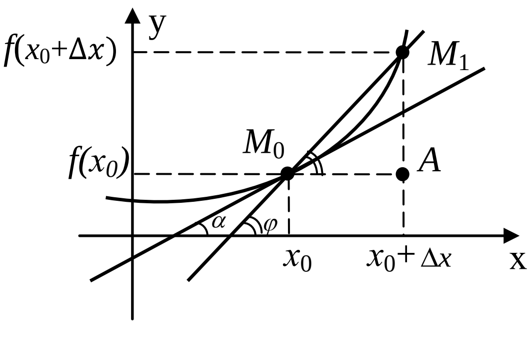
Из этой теоремы следует, что в точках разрыва функция не может иметь производной. Обратная теорема неверна: из того, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 ещё не следует, что в этой точке функция дифференцируема

Пример. **16.1**. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2x-1, & 1<x\le 2 \end{cases}$

§17. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали.

Опр. Касательной к кривой в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M_1 при стремлении точки M_1 по кривой к точке M_0.





Рассмотрим график непрерывной на промежутке X функции $y = f(x)$.

Угол φ – угол, образованный секущей M_0M_1 с осью Оx; $tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Угол α – угол, образованный касательной в точке M_0 с осью Оx (угол наклона); $k_{кас} = tg\alpha$

Устремим $\Delta x \to 0$. Тогда т. $M_1 \to M_0$, $\varphi \to \alpha$, $tg\varphi \to tg\alpha$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$ или

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, $tg\alpha = k_{кас}$, тогда $\boxed{k_{кас} = f'(x_0)}$.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $f(x)$ при данном значении x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в т. $M_0(x_0;\ f(x_0))$.

Найдем уравнение касательной: $y - y_0 = k(x - x_0)$, $k = f'(x_0)$, тогда $\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$ – **уравнение касательной**, где $y_0 = f(x_0)$.

Опр. Нормалью к кривой называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной.

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$ – **уравнение нормали**.

Пример 17.1. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \frac{1}{x}$, в т. $x_0 = -\frac{1}{2}$

§18. Механический смысл производной.

I. Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, где s – путь, пройденный за время t. $v_{сред} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ – средняя скорость. Для нахождения мгновенной скорости в момент времени t_0 устремим $\Delta t \to 0$. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0) = \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t = t_0}$

Итак, $v = \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t = t_0} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$.

Мгновенная скорость неравномерного прямолинейного движения материальной точки в некоторый момент времени t_0 есть производная от пути s по времени t в данной точке t_0.

II. Пусть $v(t)$ – функция, описывающая процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени t. Тогда **мгновенное ускорение** материальной точки в фиксированный момент t_0 есть производная от v по t.

$$a = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t = t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$

III. Пусть $Q(t)$ – функция, описывающая процесс изменения количества теплоты, сообщаемой телу при нагревании его до температуры T. Тогда **теплоемкость тела** равна $C = \left.\dfrac{dQ}{dT}\right|_{T=T_0} = \lim\limits_{\Delta T \to 0} \dfrac{Q(T_0+\Delta T)-Q(T_0)}{\Delta T}$.

IV. Пусть $\Phi(t)$ – функция, описывающая процесс изменения магнитного потока в зависимости от времени t. Тогда **мгновенное значение электродвижущей силы индукции** равно $\varepsilon = \left.\dfrac{d\Phi}{dt}\right|_{t=t_0} = \Phi'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Phi(t_0+\Delta t)-\Phi(t_0)}{\Delta t}$.

V. Пусть $q(t)$ – функция, описывающая процесс изменения заряда в колебательном контуре в зависимости от времени t. Тогда **сила тока в контуре** в момент t_0 равна $I = \left.\dfrac{dq}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{q(t_0+\Delta t)-q(t_0)}{\Delta t}$.

В общем случае: Производная – математическая модель мгновенной скорости_процесса, описываемого функцией $f(x)$.

Пример 18.1. Точка движется прямолинейно по закону $S = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - t,$ где S(м), t(с). Найти скорость через 1 с после начала движения.

§19. Производные основных элементарных функций.

1. $C' = 0$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

   $x' = 1$

   $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

   $\left(e^x\right)' = e^x$
4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

   $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$
5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$
6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$
7. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Докажем, например, производная постоянной равна нулю: $y = c$, c=const; $\boxed{c' = 0}$

1. $x,\ y(x) = c$
2. $x + \Delta x,\ \ y(x + \Delta x) = c$;
3. $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = c - c = 0$;
4. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$;
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. $\boxed{c' = 0}$

§20. Основные правила дифференцирования.

Теорема 1. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой точке дифференцируема их сумма, причем производная суммы равна сумме производных слагаемых. $\boxed{(u + v)' = u' + v'}$

Замечание. Теорема справедливы для любого конечного числа слагаемых.

Пример.20.1. 1) $y = x^5 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{3};\ y' =$
2) $y = x^3 + x + \cos x + lnx;\ y' =$

Теорема 2. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой точке дифференцируема их разность, причем производная разности равна разности производных. $\boxed{(u - v)' = u' - v'}$

Пример.20.2. 1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^7} - 3;\ y' =$
2) $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x};\ y' =$

Замечание. Теорема справедливы для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 3. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой точке дифференцируемо их произведение, причем $\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$.

Пример.20.3

1) $y = x \cdot sinx;\ y' =$

2) $y = x^2 \cdot lnx;\ y' =$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной $\boxed{(c \cdot u)' = c \cdot u'}$:
$(c \cdot u)' = c' \cdot u + c \cdot u' = 0 \cdot u + c \cdot u' = c \cdot u'$.

Пример.20.4. $y = \frac{1}{4}x^4 - 5x + \frac{3}{x^5} + 7;\ y' =$

Замечание. Формула производной произведения распространяется на любое конечное число сомножителей. $(u \cdot v \cdot w)' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$

Пример.20.5. $y=(x^2+1)\cdot(x^2-3)\cdot(3x+5);\ \ y'=$

Теорема 4. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в точке x и $v\neq 0$, то в этой точке дифференцируемо их частное, причем $\boxed{(\frac{u}{v})'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$.

Пример.20.6.

1) $y=\frac{5x^7}{x-3};\ \ y'=$

2) $y=\frac{tg\,x}{\sqrt{x}};\ \ y'=$

§21. Производная сложной функции.

Пусть $y=y(u)$, $u=u(x)$. Тогда $y=y(u(x))$ – сложная функция,

где u – промежуточный аргумент, x – независимая переменная.

Требуется найти производную сложной функции.

Теорема: Если функция $u=u(x)$ имеет в т. х производную $u'_x=u'(x)$, а функция $y=y(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y'_u=y'(u)$, то сложная функция $y=y(u(x))$ в точке x имеет производную, равную

$\boxed{y'_x=y'_u\cdot u'_x}$ (или $y(u(x))'=y'_u(u)\cdot u'(x)$).

Итак: Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

Пример 21.1. Найти производные следующих сложных функций:

1) $y=5(x^4-2x+4)^3;\ y'=$

2) $y=\sqrt{1-x^2};\ y'=$

3) $y=2\sin(3x-5)+cos\frac{x}{2};\ y'=$

4) $y=cos^3 4x;\ y'=$

5) $y=sin^2\frac{x}{5}\cdot ctg3x;\ y'=$

6) y=e^{-2x}+10^{1-sin^3x}; $y'=$

7) $y=arcsin2x+arctg\frac{x}{5};\ \ y'=$

8) $y = arccos\frac{3x-5}{\sqrt{2}}$; $y' =$

9) $y = log_3(x^2-1)$; $y' =$

10) $y = \frac{x-1}{log_2 x}$; $y' =$

11) $y = x \cdot \arccos x - \sqrt[3]{1-x^2}$; $y' =$

12) $y = \ln\cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x$

§22. Таблица основных производных и правила дифференцирования.

Таблица производных.

1. $C' = 0$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

   $x' = 1$

   $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

   $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

   $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования.

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(u-v)' = u' - v'$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
5. $u = u(x),\ y = y(u) \Rightarrow y = y(u(x)):\qquad y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Замечание. Дифференцирование показательно-степенной функции.
Пусть $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$,
Прологарифмируем по основанию е: $\ln y = v(x)\cdot \ln u(x)$

Продифференцируем по *x*: $\frac{1}{y}\cdot y' = v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$

Умножим на $y = u(x)^{v(x)}$: $y' = u(x)^{v(x)}\cdot (v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{u'(x)}{u(x)}) =$

$= u(x)^{v(x)}\cdot v'(x)\cdot \ln u(x) + u(x)^{v(x)-1}\cdot v(x)\cdot u'(x)$

§23. Дифференциал функции.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке *x*. По определению производной $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. По теореме о связи предела с бесконечно малой:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Умножим обе части на Δx:

$\boxed{\Delta y = f'(x)\cdot \Delta x + \alpha\cdot \Delta x}$ (1), где Δx → 0, $f'(x)\cdot \Delta x \to 0$, $\alpha\cdot\Delta x \to 0$.

Сравним эти бесконечно малые:

1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x)$

Если $f'(x) \neq 0$, то $f'(x)\cdot \Delta x$ и Δx – б.м. одного порядка

2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha\cdot\Delta x$ – б.м. более высокого порядка малости, чем Δx. $\alpha\cdot\Delta x = o(\Delta x)$

Итак, приращение функции Δy состоит из 2^х слагаемых: первое $f'(x)\cdot\Delta x$ есть **главная часть приращения функции**, линейная относительно Δx;
а второе слагаемое $\alpha\cdot\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx.

Опр. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке *x* называется произведение производной $f'(x)$ в этой точке на приращение аргумента Δx.

$$\boxed{dy = f'(x)\cdot \Delta x} \qquad (2)$$

Найдем дифференциал функции $y = x$. Т.к. $x' = 1$, то $dx = 1\cdot\Delta x$, то есть

$$\boxed{dx = \Delta x}. \quad (3)$$

Дифференциал *dx* независимого переменного *x* совпадает с приращением Δx.
Формула (2) с учетом (3) примет вид:

$$\boxed{dy = f'(x)\cdot dx} \qquad (4)$$ – **дифференциал функции**.

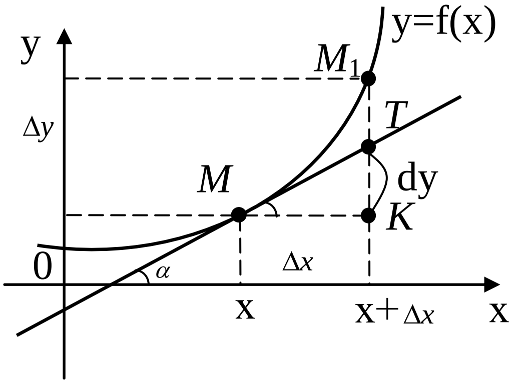
Значит $\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$ – (обозначение Лейбница).

Производную функции можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Пример 23.1. Найти дифференциалы следующих функций:
1) $y = \sqrt{9 - 2x^2}$;

2) $y = tg^3 x + \frac{2}{7} arcsin\frac{1}{x} + \frac{5}{2}$;

Геометрический смысл дифференциала.



К графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x,y)$ проведем касательную.
α – угол наклона касательной к оси Ox.
Дадим x приращение Δx, тогда функция получит приращение Δy. На кривой получим точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$,
КТ – **приращение ординаты касательной**.
$KT = f'(x)\cdot\Delta x = dy$

Дифференциал функции $y = f(x)$ в т. x равен приращению ординаты касательной при переходе из точки с абсциссой x в точку с абсциссой $x+\Delta x$.

Инвариантность формы дифференциала (независимость формы записи дифференциала).

1) Пусть $y = f(x)$, x – независимая переменная
   $dy = f'(x)\cdot dx = y'\cdot dx$ (1)
2) Пусть $y = f(x)$, $x=x(t)$ – функция от t.
   $y = f(x(t))$ – сложная функция, x – промежуточный аргумент.
   $dy = y'_t\cdot dt$; $y'_t = y'_x\cdot x'_t$ (по правилу дифференцирования сложной функции)
   $dy = y'_x\cdot x'_t\cdot dt = y'_x\cdot dx$ (т.к. $x'_t\cdot dt = dx$), итак $dy = y'\cdot dx$ (2)

В формулах (1) и (2) форма записи дифференциала одинакова.
Свойство дифференциала иметь одну и ту же форму записи независимо от того является ли x независимой переменной или функцией другой переменной называют **инвариантностью формы дифференциала**.

§24. Применение дифференциала к приближенным вычислениям значений функции.

Ранее была формула $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$,где $\alpha\to 0$ при Δх →0 и $\alpha\cdot\Delta x = o(\Delta x)$

$f'(x)\cdot\Delta x = dy$, тогда $\boxed{\Delta y = dy + \alpha\cdot\Delta x}$.

Приращение функции отличается от дифференциала функции на б.м. величину более высокого порядка малости, чем Δх.mПоэтому $\boxed{\Delta y\approx dy}$.

Отсюда $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$. $\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x}$

Пример 24.1. Вычислить $\sqrt{16{,}06}$

§25. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором промежутке X. Производная $y' = f'(x)$ является функцией от x. Пусть эта функция также имеет производную.

Опр. Производная от первой производной $f'(x)$ называется **производной второго порядка** или **второй производной** функции $y = f(x)$.

Обозначаются: y'' или $f''(x)$ $\boxed{f''(x) = (f'(x))'}$

Опр. Производная от второй производной называется **производной третьего порядка** или **третьей производной** и обозначается y''' или $f'''(x)$.

В общем случае: **производной *n*-го порядка** функции $y = f(x)$ называется производная от производной (*n*-1)-го порядка и обозначается $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$

$\boxed{f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'}$ или $\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'}$.

Производные порядка выше первого называются **производными высшего порядка**.

Пример.25.1. *y=ln x;* Найти y^{IV} и $y^{(n)}$

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке *X*.

Опр. **Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом** называется дифференциал от дифференциала функции: $d^2y = d(dy)$

Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$:

$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\cdot dx) = (f'(x)\cdot dx)'dx = f''(x)(dx)^2$ $\boxed{d^2y = f''(x)\cdot dx^2}$

Опр. Дифференциалом третьего порядка или **третьим дифференциалом** функции называется дифференциал от её второго дифференциала: $d^3y = d(d^2y)$

Выражение третьего дифференциала: $\boxed{d^3y = f'''(x)\cdot dx^3}$

Опр. Дифференциалом *n*-го порядка или ***n*-ым дифференциалом** функции $y = f(x)$ называется дифференциал от её (*n*-1)-го дифференциала: $d^ny = d(d^{n-1}y)$

Справедлива формула: $\boxed{d^ny = f^{(n)}(x)\cdot dx^n}$.

Тогда производные можно представить:

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}},\quad \boxed{f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}},\quad \boxed{f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}},\quad \ldots,\quad \boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}}$$

Пример 25.2. Найти дифференциалы первого, второго, третьего порядков функции $y = (2x-3)^3$.

§26. Механический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону *S=S(t)*, где *S*-путь, пройденный точкой за *t*. Тогда скорость *v=v(t)* –функция от *t*.

$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$ – среднее ускорение.

Найдем *a* – ускорение в момент времени *t*: $a = \lim\limits_{\Delta t\to 0} a_{cp} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

Поскольку $v = \frac{ds}{dt}$, то $\boxed{a = \frac{d^2S}{dt^2}}$ или $\boxed{a = v'(t) = S''(t)}$

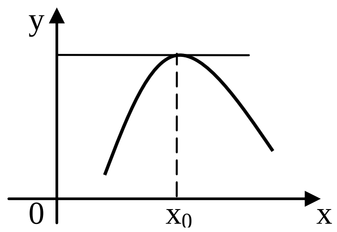
Ускорение прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени.

§27. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ферма. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке X и во внутренней точке x_0 этого промежутка принимает свое наибольшее (или наименьшее) значение. Если в точке x_0 существует конечная производная, то она равна нулю, то есть

$$f'(x_0) = 0$$

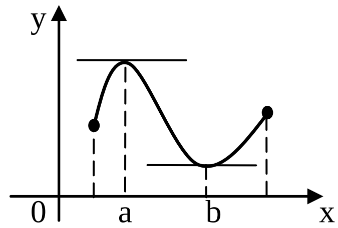
Геометрический смысл теоремы Ферма.



$f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол наклона касательной. $f'(x_0) = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0$, то есть в точке с абсциссой x_0, где функция имеет наибольшее (наименьшее) значение, касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$. Тогда внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка x_0, что $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля.

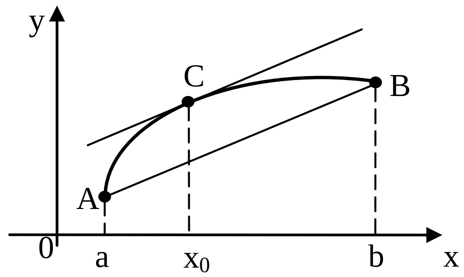


На кривой $y = f(x)$ (для функции, удовлетворяющей теореме Ролля) найдется точка, в которой касательная параллельна оси Ox.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка. Тогда внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка x_0, что будет выполняться равенство

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)}, \text{ где } x_0 \in (a;b).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа.



Если во всех точках дуги AB существует касательная, то на дуге AB найдется хотя бы одна точка C, в которой касательная параллельна хорде.

Замечание. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа (если положить $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(x_0) = 0$).

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы во всех внутренних точках этого отрезка, причем $\varphi'(x) \neq 0, \forall x \in (a;b)$. Тогда внутри отрезка $[a;b]$ найдется такая точка x_0, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$.

$\boxed{\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}}$ – **формула Коши**.

Замечание. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши (если $\varphi(x) = x$).

§28. Правило Лопиталя.

Рассмотрим **новое правило раскрытия неопределенностей** $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причем в этой окрестности $\varphi'(x) \neq 0$. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}}$ (1).

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причем в этой окрестности $\varphi'(x) \neq 0$. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}}$ (2).

Смысл правила Лопиталя: вычисление предела отношения функций в случае неопределенностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ может быть сведено к вычислению предела отношений производных (который бывает проще).

Замечание 1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ (или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$) и $f'(x)$, $\varphi'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 (или теоремы 2), то правило Лопиталя применяют еще раз

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 справедливы и при $x \to \infty$.

Пример 28.1.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{4x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\quad f(x) = \sin 7x$, $\varphi(x) = 4x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 7x \cdot 7}{4} = \frac{7}{4} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4}$$

Другая форма записи (при условии существования $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 7x \cdot 7}{4} = \frac{7}{4}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - x}{x - \sin x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

5) Формулы (1) и (2) справедливы, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$!

Может оказаться, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ существует, а $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$. Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1+0=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+\cos x}{1})=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ - не существует.

§29. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

I. Параметрическое задание функций.

Пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$ – две функции одной независимой переменной $t\in T$. Если $x=x(t)$ – монотонна на *T*, то существует обратная к ней $t=\Phi(x)$. Тогда получим $y=y(\Phi(x))$ – сложную функцию *y* от *x*. В этом случае говорят, что **функция *y* от *x* задана параметрически** и пишут $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t\in T$, *t* – параметр.

Параметрическое задание часто применяют при описании траектории движения точки на плоскости, где координаты *x* и *y* – функции времени *t*. <u>Иногда</u> от параметрического задания функции можно перейти к явному, исключив параметр *t*. <u>Всегда</u> функцию, заданную явно $y=f(x)$ можно задать параметрически:

$$y=f(x)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases},\quad t\in T.$$

II. Параметрическое задание некоторых линий на плоскости.

$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t\in T$. Каждому значению $t\in T$ соответствует определенное значение *x* и определенное значение *y* $\Rightarrow$ соответствует точка *M*(*x*,*y*). Когда *t* пробегает все значения из *T*, точка *M*(*x*,*y*) описывает некоторую линию на плоскости *Oxy*.

Рассмотрим параметрическое задание некоторых линий

1) **Прямая**

$$y=ax+b\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=t\\ y=at+b\end{cases},\quad t\in R$$

2) **Окружность** с центром *O*(0;0) и радиусом *a*.

$$x^2+y^2=a^2\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases},\quad 0\le t<2\pi,$$

параметр *t* – угол между положительным направлением оси *Ox* и $\overrightarrow{OM}$, *M*(*x*,*y*) принадлежит окружности.

3) **Эллипс**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},\quad 0\le t<2\pi$$

4) **Парабола**

$$y^2=2px\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=t\\ y^2=2pt\end{cases},\quad t\in[0;+\infty)$$

III. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Пусть функция *y* от *x* задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in T$.

Пусть функции *x(t), y(t)* – дифференцируемы для любого $t \in T$ и $x'(t) \neq 0$. Пусть для $x = x(t)$ существует обратная функция $t = \Phi(x)$, имеющая производную. Тогда для $y = y(\Phi(x)) = f(x)$ также существует производная. $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t \cdot dt}{x'_t \cdot dt} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Эта формула позволяет находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя выражения непосредственной зависимости *y* от *x*.

Пример 29.1. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, $0 < t < \pi$. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ а) при любом *t*, б) при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

§30. Дифференцирование неявных функций.

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ задает *y* как неявную функцию от *x*. Пусть функция *y* дифференцируема.

Дифференцируя обе части уравнения по *x*, считая что *y* есть функция от *x*, получим новое уравнение, содержащее *x*, *y*, y'. Разрешив его относительно y', найдем производную.

Пример 30.1.

1) $x^2 + y^2 - a^2 = 0$

2) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$

Замечание. Всякую неявную функцию, заданную уравнением, составленным из элементарных функций, можно продифференцировать независимо от того, можно ли эту функцию представить в явном виде или нет.

Производная y' выражается через *x* и *y*, то есть $y' = g(x, y)$.

Для нахождения y' при $x = x_0$ нужно знать и $y_0 = y(x_0)$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

§31. Аналитические признаки возрастания и убывания функции.

Опр. Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** на некотором промежутке X, если из неравенства $x_2 > x_1$, где x_2 и x_1 – любые два значения из X, следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$

Из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, $\forall x_1, x_2 \in X$

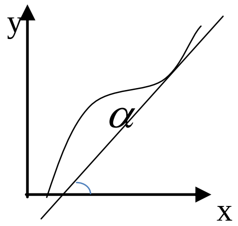
Опр. Функция $y=f(x)$ называется **убывающей** на X, если

из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, $\forall x_1, x_2 \in X$

Только возрастающие и только убывающие функции на промежутке X называются **монотонными**.

Необходимые условия возрастания и убывания функции.

Теорема 1. Если дифференцируемая в интервале (a, b) функция $y=f(x)$ возрастает, то производная $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$.



Геометрический смысл теоремы 1.

Если $f(x)$ – возрастающая функция, то углы наклона α касательных к графику функции острые, а в некоторых точках касательные параллельны оси Ox.

Пример. $y = x^3$ – возрастает, $y' = 3x^2 \geq 0$ (причем, $y' = 0$ в точке $x=0$).

Теорема 2. Если дифференцируемая в интервале (a,b) функция $y=f(x)$ убывает, то ее производная $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a;b)$.

Достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема 3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и в каждой внутренней точке этого отрезка имеет положительную производную, т.е. $f'(x) > 0, \forall x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ возрастает на $[a;b]$.

Теорема 4. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и ее производная $f'(x) < 0, \forall x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ убывает на $[a;b]$.

Замечание. Если $f'(x) = 0, \forall x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ в этом интервале постоянна.

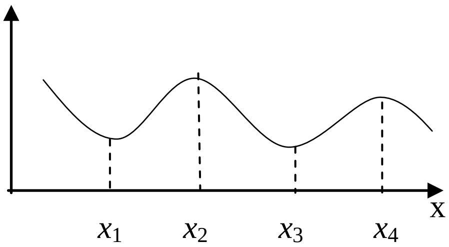
Пример 31.1.Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x(1 + \sqrt{x})$

§32. Экстремумы функции.

Опр. Функция $y=f(x)$ имеет **максимум** (max) в точке x_0, если существует такая δ −окрестность точки x_0, что $\forall x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Функция $y=f(x)$ имеет **минимум** (min) в точке x_0, если существует δ −окрестность точки x_0, такая, что $\forall x \neq x_0 \in \delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Максимумы и минимумы функции называются **экстремумами**.
Это определение локального max и локального min, которых может быть несколько на области определения функции.



В точках x_3 и x_1 - min (локальные),
в точках x_2 и x_4 - max (локальные).

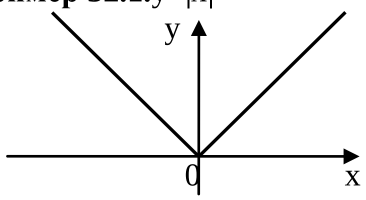
Замечание. Не смешивать с наибольшим и наименьшим значениями функции (с абсолютным max и с абсолютным min).

Необходимое условие существования экстремума.

Теорема. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то производная в этой точке равна нулю, то есть $f'(x_0) = 0$.

Рассмотрели случай, когда функция имеет производную во всех точках некоторого интервала. Но функция может иметь экстремум в точках, в которых функция не дифференцируемая (где нет производной).

Пример 32.1. $y=|x|$



$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $f'(0+0) \neq f'(0-0)$

Значит, в точке $x=0$ функция *недифференцируема*.
Но в точке $x = 0$ функция имеет *минимум*.
Показали, что функция может иметь экстремум в точках, в которых производная не существует.

Дополненный необходимый признак. Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то производная в этой точке обращается в нуль или не существует (точка x_0 принадлежит области определения функции).

Опр. Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются **критическими точками** или **точками, подозрительными на экстремум**.

Точки, в которых производная обращается в нуль, называются **стационарными**.

Сформулированные условия не являются достаточными, то есть из того, что $f'(x_0) = 0$ еще не следует, что в точке x_0 функция имеет экстремум.

Пример 32.2. $y = x^3$

Достаточные условия существования экстремума.

Теорема 1.Первый достаточный признак существования экстремума.

Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) и если производная $f'(x)$ при переходе слева направо через критическую точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум; если же знак $f'(x)$ при переходе через x_0 меняется с минуса на плюс, то в точке x_0 минимум.

Замечание. Если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через критическую точку, то функция в этой точке не имеет экстремума.

Пример 32.3. Исследовать на экстремум функцию

1) $\boldsymbol{y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3;}$ **2)** $\boldsymbol{y = 1 - (x-2)^{\frac{4}{5}}}$

Теорема 2. Второй достаточный признак существования экстремума.

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) \neq 0$, то если $f''(x_0) <0$, то в точке x_0 функция имеет max, а если $f''(x_0) >0$, то в точке x_0 функция имеет min.

Замечание. Если $f''(x_0) =0$, то по этой теореме нельзя судить о наличии экстремума в точке x_0.

Если $f'(x_0)$ не существует, то не существует $f''(x_0)$, второй признак не применим.

Пример 32.4. $y = xe^{-x}$

Пример 32.5. $y = (x - 5)e^x$ **Ответ.** В точке $x = 4 - min$; $y_{min} = y(4) = -e^4$

§33. Наибольшие и наименьшие значения функции на отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда по второй теореме Вейерштрасса на этом отрезке функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Это может произойти либо во внутренних точках (точках экстремума), либо на концах отрезка.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке [a;b].

1) Найти критические точки в интервале (a,b) и вычислить в них значение функции.
2) Вычислить значения функции на концах отрезка, то есть $f(a)$ и $f(b)$.
3) Сравнить найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

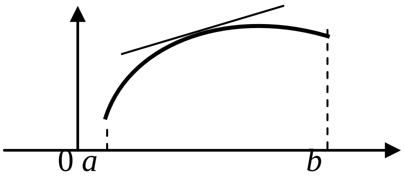
Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b)и в точке $x_0 \in (a,b)$ имеет *единственный экстремум* и он max (min), то в этой точке функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения.

Пример 33.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

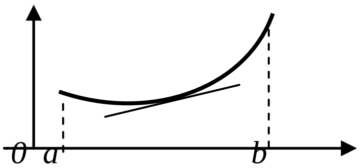
$y = -2x^3 - 9x^2 + 6$ на [-2;1].

§34. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба.

Опр. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **выпуклым** на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

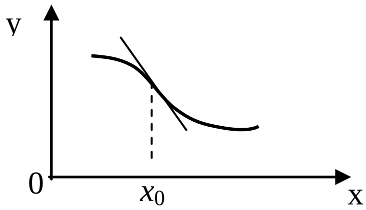


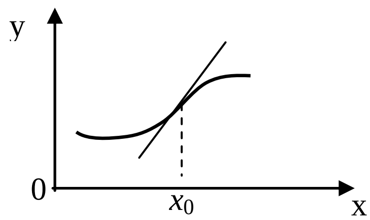
Опр. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **вогнутым** на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.



Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$ и имеет в интервале (a;b), вторую производную $f''(x)$. Если во всех точках интервала $(a;b)$ $f''(x)<0$, то график функции в этом интервале выпуклый, если же $f''(x)>0$ $\forall x \in (a;b)$, то график функции в этом интервале вогнутый.

Опр. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.





Касательная в точке перегиба пересекает кривую.

Необходимый признак существования точки перегиба.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в интервале $(a; b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда, если точка с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ является точкой перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Встречаются случаи, когда вторая производная в точке x_0 не существует, а график функции в точке с абсциссой x_0имеет точку перегиба.

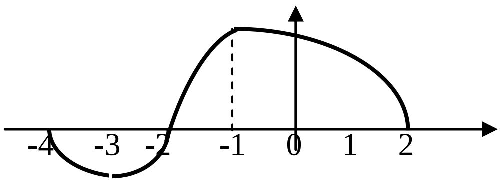
Таким образом, если x_0 – абсцисса точки перегиба, то $f''(x_0) = 0$
или $f''(x_0)$ не существует.

Достаточный признак существования точки перегиба.

Теорема. Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет первую производную $f'(x_0)$, а $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, и при переходе через x_0 вторая производная меняет знак, то точка кривой с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Пример 34.1. Определить экстремумы, интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба кривой Гаусса $y = e^{-x^2}$

Пример 34.2. Функция $y = f(x)$ задана графиком на отрезке [-4;2]



Установить соответствие между заданными условиями и промежутками

1)$y > 0, y' > 0, y'' < 0$ 2) $y < 0, y' < 0, y'' > 0$

3) $y > 0, y' < 0, y'' < 0$ 4) $y < 0, y' > 0, y'' > 0$

Варианты ответов: A)(-2;-1) B)(-4;-3) C)(-1;2) D)(-3;-2) E)(-3;-1)

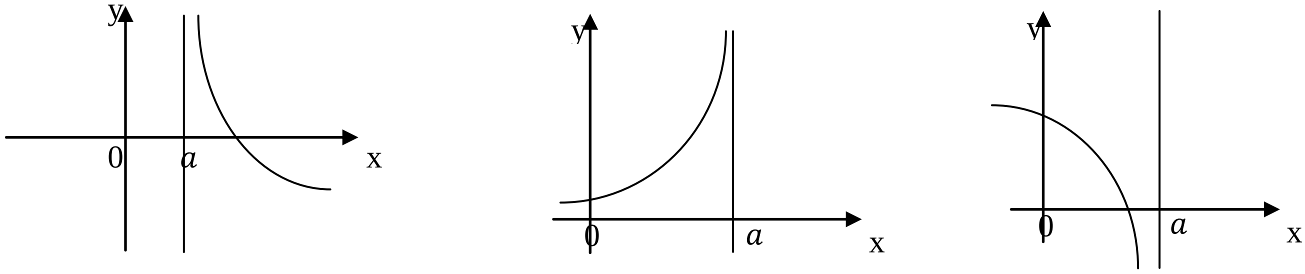
§35. Асимптоты графика функции.

Опр. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки М кривой до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (при удалении точки М в бесконечность).

Различают вертикальные асимптоты ($\parallel 0y$) и наклонные асимптоты ($\nparallel 0y$) и их частный случай – горизонтальные асимптоты ($\parallel 0x$).

I. Вертикальные асимптоты.

Если $\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$, то $x = a$ – вертикальная асимптота.
Аналогично, если $\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, то $x = a$ – вертикальная асимптота.
Обратно. Если прямая $x = a$ –асимптота, то $\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$ *или* $\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$.



Вывод. Значит, для отыскивания вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$ надо найти те значения $x = a$, при приближении к которым функция стремится к бесконечности, то есть терпит **разрыв второго рода.**

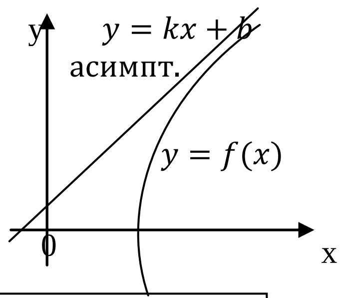
Пример 35.1. $y = \frac{2}{x-5}$

II. Наклонные асимптоты.

Для того чтобы кривая $y = f(x)$ имела асимптоту

$$y = kx + b \qquad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы



$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (2)$ $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) \qquad (3)$	$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (2')$ $b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) \qquad (3')$

При $x \to +\infty$ получается правая наклонная асимптота.
При $x \to -\infty$ получается левая наклонная асимптота.
При совпадении пределов (2) и (2’), (3) и (3’) прямая $y = kx + b$ является двусторонней асимптотой.

Частный случай. Если $k = 0$, *то* $y = b$ –горизонтальная асимптота.
Если $k = 0, b = 0$, *то* $y = 0$ – ось *Ox* является асимптотой.

§36. Общий план исследования функции и построения ее графика.

1. Найти область определения функции, интервалы непрерывности, точки разрыва функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность, на периодичность.
3. Найти точки пересечения функции с осями координат.
4. Определить интервалы функции возрастания и убывания функции.
   Найти экстремумы функции.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
6. Определить асимптоты.
7. Построить график функции.

Пример 36.1.Исследовать функцию $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. *Область определения функции, интервалы непрерывности, точки разрыва функции.*

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0: +\infty)$

Функция непрерывна в точках, принадлежащих области определения.

$x = 0 -$ точка разрыва 2 рода:

$$\lim_{x \to -0} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty; \ \lim_{x \to +0} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty$$

$x = 0 -$ вертикальная асимптота.

2. *Исследование функции на четность и нечетность, на периодичность.*

$$y(-x) = \frac{(-x)^3+4}{(-x)^2} = \frac{-x^3+4}{x^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной; не периодическая.

3. *Точки пересечения функции с осями координат.*

С осью *Ox*: $y = 0 \ \Rightarrow \ x^3 + 4 = 0 \ \Rightarrow x = -\sqrt[3]{4}$

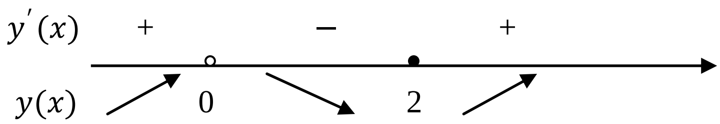
С осью *Oy*: не пересекается, так как $x \neq 0$.

4. *Интервалы возрастания и убывания функции. Экстремумы функции.*

$$y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$y' = 0$: $\frac{x^3-8}{x^3} = 0$; $x^3 - 8 = 0$; $x = 2 -$ критическая точка; $x = 2 \in D(y)$.

y' не существует при $x = 0$; $x = 0$ не принадлежит $D(y)$



$x = 2 -$ точка min; $\quad y_{min} = y(2) = 3$

5. *Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.*

$$y'' = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 - 8) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{24x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4}$$

$y'' = \frac{24}{x^4} > 0$ *при всех* $x \in D(y)$. График функции является вогнутым на всей области определения, т.е. при $x \in (-\infty; 0) \cup (0: +\infty)$

6. *Асимптоты.*

а) Вертикальные асимптоты.

$$x = 0 - \text{вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x \to -0} y(x) = \lim_{x \to +0} y(x) = +\infty$$

б) Наклонные асимптоты $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{4}{x^3}}{1} = 1;\ k = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2} = 0;\ b = 0$$

$y = kx + b;\ y = 1 \cdot x - 0; y = x;$

$$y = x - \text{наклонная асимптота}$$

7. *График функции* $y = \frac{x^3+4}{x^2}$