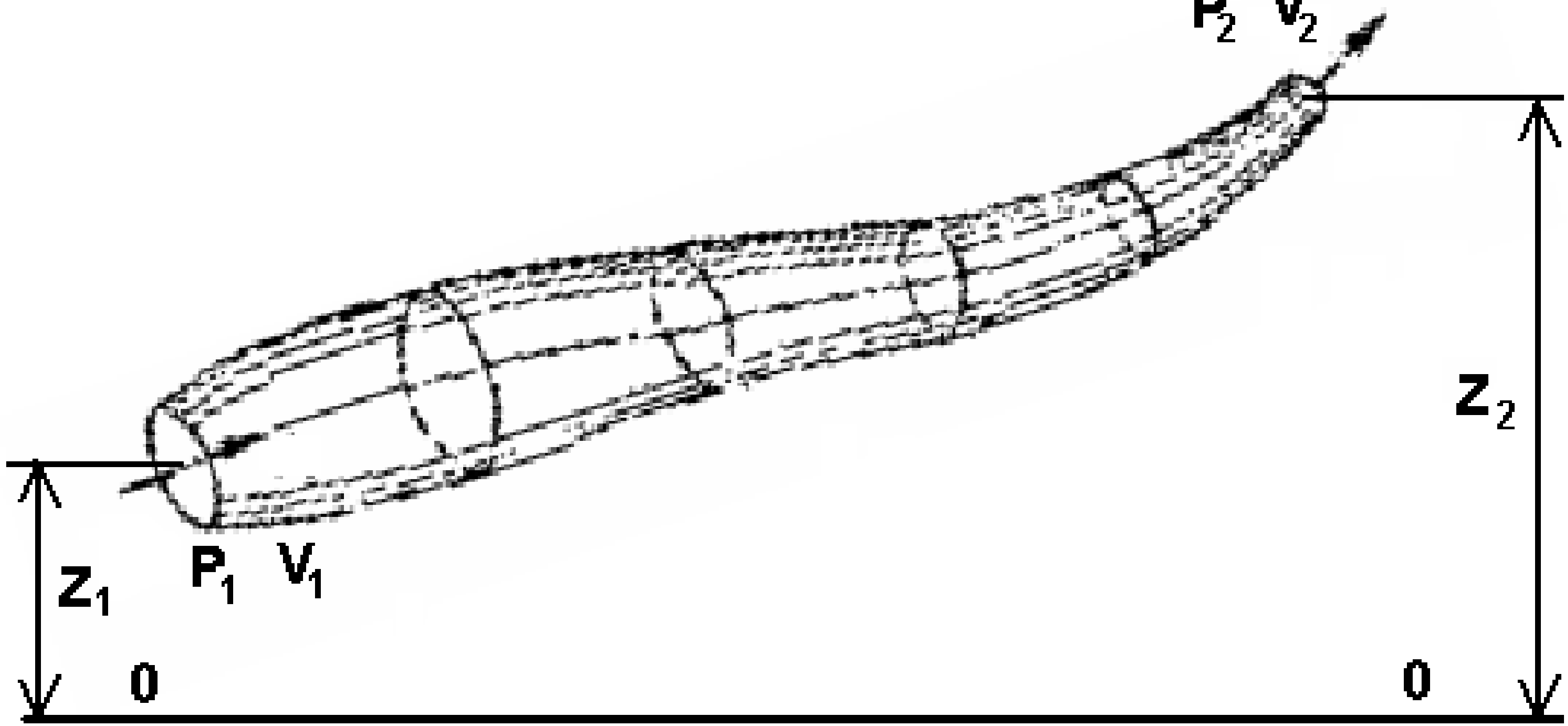
Гидравлика

Лекция 5

Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости.

Выделим в установившемся потоке идеальной жидкости элементарную струйку



Z – расстояние по вертикали от центра сечения до плоскости сравнения **0 – 0**

Плоскость сравнения – любая горизонтальная плоскость, относительно которой измеряем.

Дифференциальное уравнение движения идеальной жидкости:

$$\frac{1}{\rho}dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz$$

Конкретизируем его для элементарной струйки идеальной жидкости при следующих ограничениях:

1. Движение установившееся. Следовательно:

$$V = f_1(x, y, z), \qquad \frac{dv}{dt} = 0, \qquad F_{ИН} = 0$$

Из массовых сил действует только сила тяжести

$$G = mg$$

2. Направим ось Z вертикально вверх.

$$Z = \frac{G}{m} = -g \qquad Y = 0 \qquad X = 0$$

Дифференциальное уравнение движения идеальной жидкости примет вид:

$$\frac{1}{\rho}dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + gdz = 0$$

Разделим обе части на **g** и перегруппируем:

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0$$

Введем выражение в левой части под общий знак дифференциала:

$$d\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}\right) = 0 \Rightarrow \qquad z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = const$$

Это выражение называют трехчленом Бернулли.

Вдоль элементарной струйки трехчлен Бернулли не изменяется по величине.

Записав уравнение для сечений 1-1 и 2-2, получим основное уравнение гидродинамики или уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости:

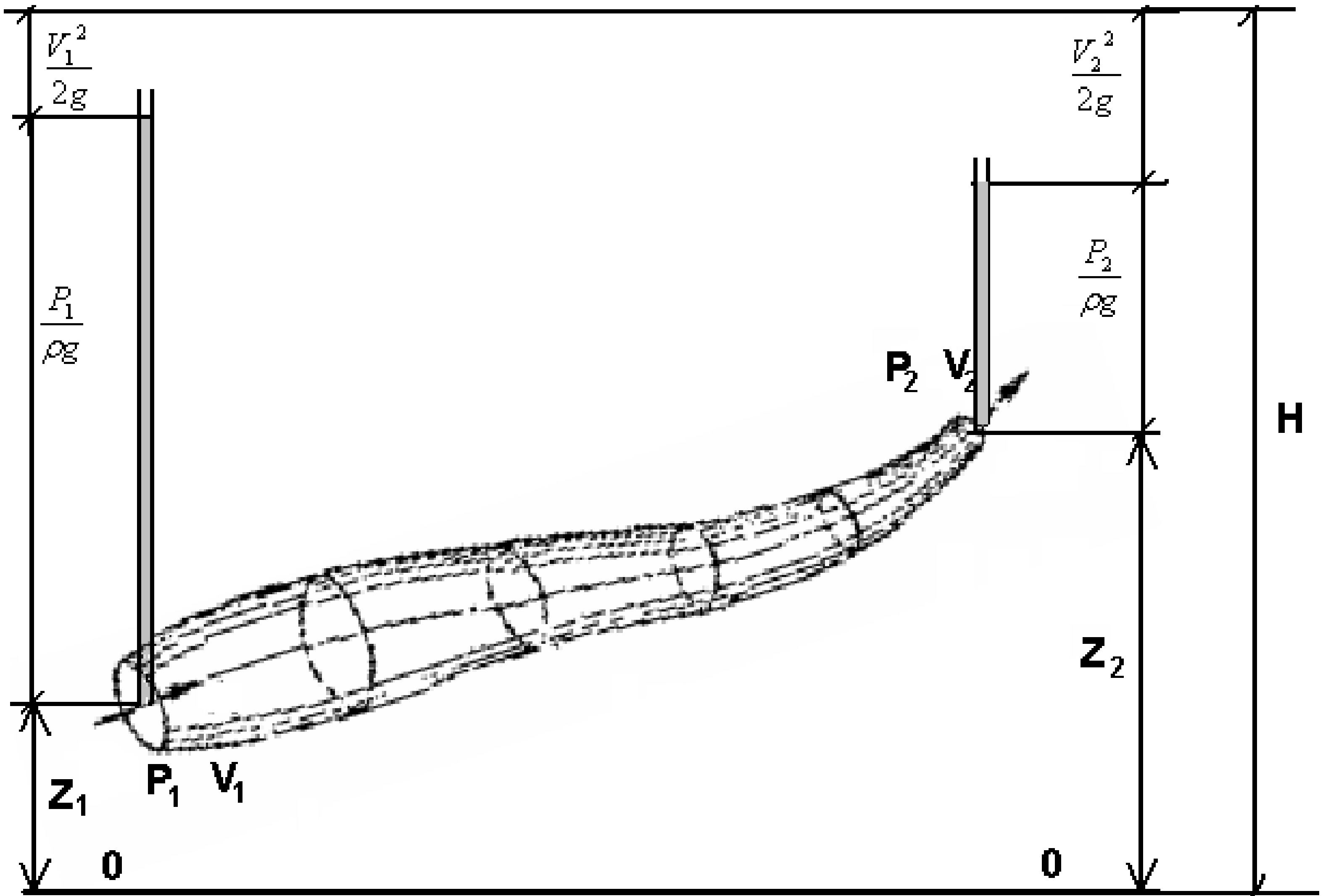
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Энергетический смысл уравнения Бернулли

Частица идеальной жидкости массой **m** движется по оси элементарной струйки.

Кинетическая энергия: $E_{КИН} = \frac{mv^2}{2}$

Потенциальная энергия положения: $E_{ПП} = mgz$



За счет давления частичка жидкости способна подняться вверх на некоторую высоту, поэтому обладает еще и потенциальной энергией давления:

$$E_{\Pi p} = mg\frac{p}{\rho g}$$

Полная энергия частицы:

$$E = E_{ПП} + E_{Пр} + E_{КИН} = mgz + mg\frac{p}{\rho g} + m\frac{v^2}{2}$$

В идеальной жидкости потери на трение отсутствуют и полная энергия не меняется.

В соответствии с законом сохранения механической энергии получим:

$$E = const = E_1 = E_2$$

$$mgz_1 + mg\frac{p_1}{\rho g} + m\frac{v_1^{\ 2}}{2} = mgz_2 + mg\frac{p_2}{\rho g} + m\frac{v_2^{\ 2}}{2}$$

Разделив обе части на вес частицы, получим ***энергию, приходящуюся на единицу веса, или удельную энергию:***

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^{\ 2}}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^{\ 2}}{2g}$$

Каждый из членов уравнения Бернулли представляет ***удельную энергию***: ***положения***, ***давления***, ***кинетическую***, а уравнение выражает закон сохранения энергии применительно к движущейся жидкости.

Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости

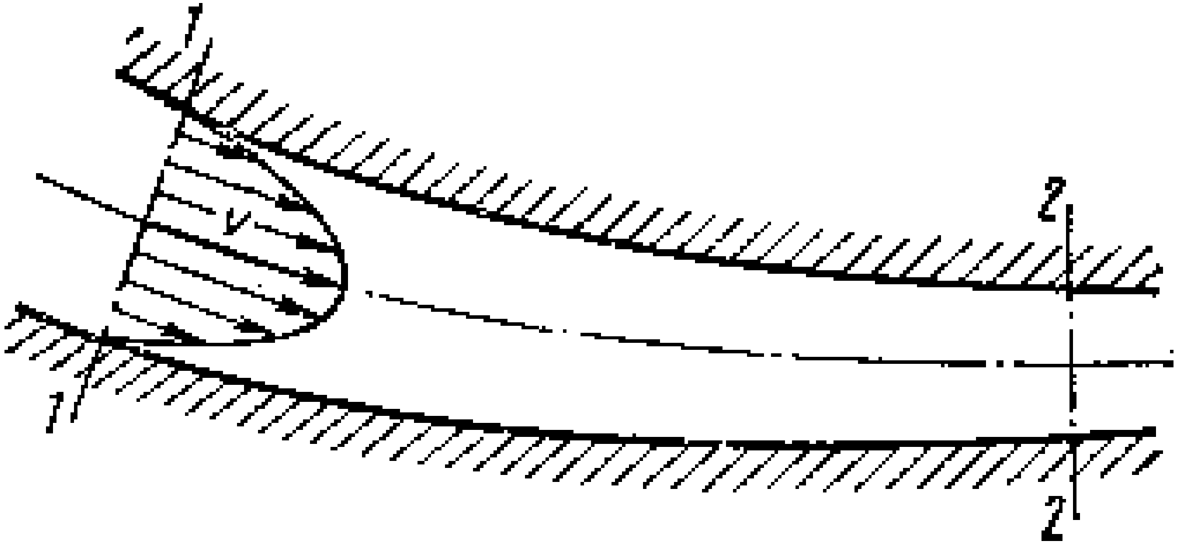
В реальной, вязкой жидкости энергия на перемещение тратится на трение. Это учитывается дополнительным членом в правой части уравнения:

$$E_1 = E_2 + E_П \rightarrow \qquad z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^{\;2}}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^{\;2}}{2g} + h_n$$

h_n – потеря удельной энергии при движении жидкости из сечения 1-1 в сечение 2-2.

Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости

При переходе от элементарной струйки идеальной жидкости к потоку реальной (вязкой), имеющему конечные размеры и ограниченному стенками необходимо учесть неравномерность распределения скоростей по сечению, а также потери энергии.



Для потока расчеты мы ведем по средней скорости, но кинетическая энергия, рассчитанная по средней скорости, отличается от действительной, учитывающей реальное распределение скоростей. Это учитывается введением в уравнение коэффициента α, называемого коэффициентом Кориолиса.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^{\,2}}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^{\,2}}{2g} + \sum h_n$$

Понятие о напоре

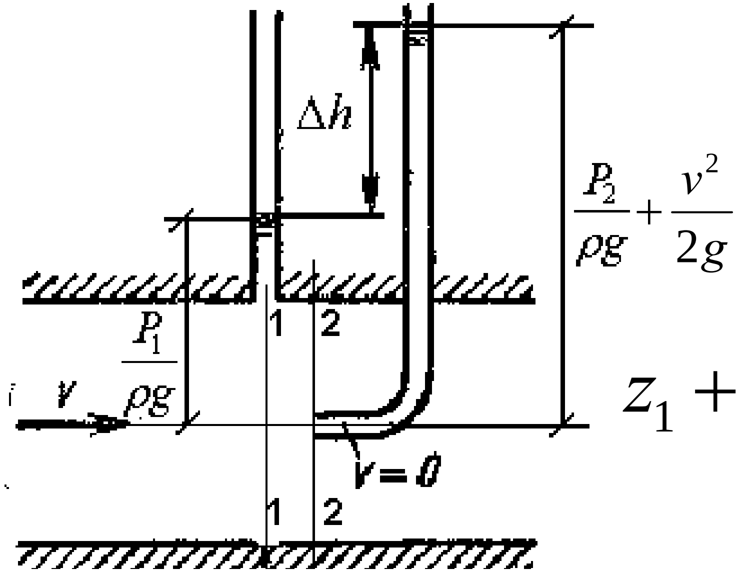
Под напором в гидравлике понимается ***полная удельная энергия*** движущейся жидкости.

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha \cdot v^2}{2g}$$

Первые два члена характеризуют удельную потенциальную энергию. Их называют ***потенциальным напором.***

Последний член характеризует удельную кинетичес-кую энергию. Его называют ***скоростным напором.***

Скоростная трубка или трубка Пито



Запишем уравнение Бернулли для сечений струйки 1–1 и 2–2:

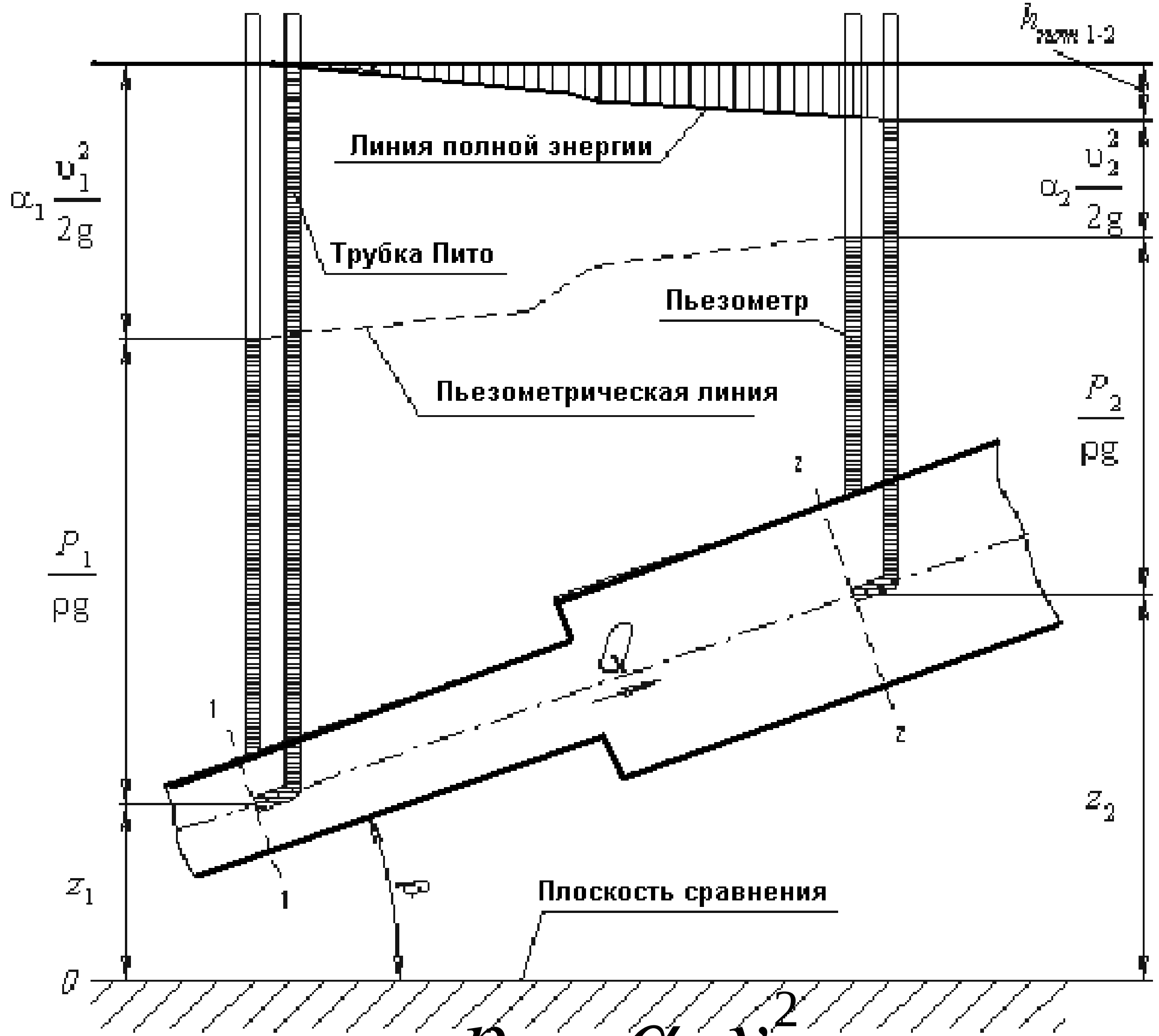
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum h_n$$

Для данного случая: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \qquad \sum h_П = 0$

$$Z_1 = Z_2, \qquad \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} - \frac{p_1}{\rho g} = \Delta h,$$

$$p_1 = p_2, \qquad v = \sqrt{2g\Delta h}$$

Геометрическая интерпретация уравнения



При установившемся движении жидкости сумма четырех высот (***высоты положения***, ***пьезометрической высоты***, ***высоты, соответствующей скоростному напору*** и ***высоты, соответствующей потерям напора***) остается неизменной вдоль потока.

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha \cdot v^2}{2g} + h_{пот} = const$$

Линию, соединяющая уровни жидкости в пьезометрах, называют ***пьезометрической*** или ***линией удельной потенциальной энергии***.

Уклон данной линии называют ***пьезометрическим уклоном***

$$I = \frac{\Delta h_n}{l}$$

Δh_n - изменение удельной потенциальной энергии на длине участка.

Линию, соединяющая уровни жидкости в трубках Пито, называют ***напорной*** или ***линией полной удельной энергии***.

Уклон данной линии называют ***гидравлическим уклоном.***

$$i = \frac{\Delta h_{nom}}{l}$$

Δh_{nom} - изменение полной удельной энергии на длине участка.