

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин. Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для правильного понимания статистических закономерностей, проявляющихся в природе и технике.

Правила умножения в комбинаторике

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие n_2 способами, третье – n_3 способами и так до k -го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

способами.

Пример 1.

В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить двух дежурных?

Решение

Первым дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку. Т.к. в классе учится 16 мальчиков и 10 девочек, то назначить первого дежурного можно $16+10=26$ способами.

После того, как мы выбрали первого дежурного, второго мы можем выбрать из оставшихся 25 человек, т.е. 25-ю способами.

По теореме умножения двое дежурных могут быть выбраны $26 \cdot 25 = 650$ способами.

Сочетания без повторений.

Сочетаниями из n элементов по m называются неупорядоченные совокупности, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом. Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: **сколькими способами можно выбрать m из n различных предметов?**

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 2.

Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

Решение

Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = 210$$

Размещения без повторений.

Размещения – это упорядоченные совокупности элементов, отличающиеся друг от друга либо составом, либо порядком элементов. Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: **сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n различных предметов?**

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 3.

В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Решение.

В данной задаче мы не просто выбираем фотографии, а размещаем их на определенных страницах газеты, причем каждая страница газеты должна содержать не более одной фотографии. Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

Перестановки без повторений.

Перестановки – это упорядоченные совокупности, отличающиеся друг от друга только порядком элементов. Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: **сколькими способами можно разместить n различных предметов на n различных местах?**

$$P_n = n!$$

Пример 4.

Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова «брак»?

Решение

Генеральной совокупностью являются 4 буквы слова «брак» (б, р, а, к). Число «слов» определяется перестановками этих 4 букв, т. е.

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$