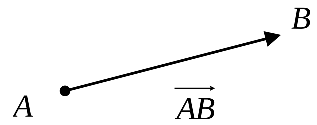
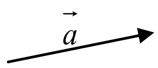
Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

§1. Векторы, основные определения.

Вектор - одно из фундаментальных понятий современной математики, широко используется в различных её областях. Под вектором понимают элемент векторного пространства.
Векторное пространство трактуется как множество объектов, на котором введены операции сложения объектов и умножения объекта на действительное число так, что выполняются 8 аксиом.
С геометрической точки зрения: **вектором** называется направленный отрезок (отрезок, у которого различают начало и конец; упорядоченная пара точек).
Если A – начало, B – конец, то вектор обозначают $\overrightarrow{AB}$ (или $\overline{AB}$).



Часто вектор обозначают одной буквой $\vec{a}$.



Опр. **Длиной** или **модулем** вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначают $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

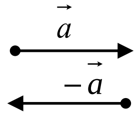
Опр. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется **нуль-вектором** и обозначают $\vec{0}$. $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Будем рассматривать только **свободные** векторы, т.е. те, которые можно переносить в любое место пространства, сохраняя длину и направление.

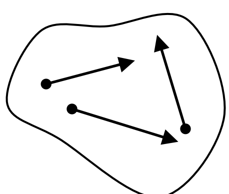
Опр. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной прямой или параллельных прямых, называются **коллинеарными**.

Опр. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**, если они:
1) имеют равные модули;
2) коллинеарны;
3) направлены в одну сторону.

Опр. Вектор $-\vec{a}$ называется **противоположным** вектору $\vec{a}$, если этот вектор имеет модуль, равный модулю вектора $\vec{a}$, коллинеарен с ним, но направлен в противоположную сторону (вектор $\vec{a}$ – не нуль-вектор).



Опр. Векторы называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости.



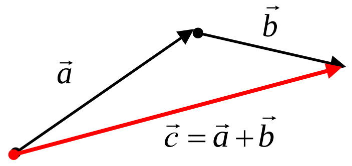
Замечание. В данном курсе математики рассматриваем только *свободные* векторы **(**векторы, которые можно переносить в любое место пространства, сохраняя длину и направление).
В математике и ее приложениях (в механике, физике) кроме свободных векторов рассматривают скользящие и связанные векторы.
Скользящий вектор – это множество одинаково направленных отрезков *одной* прямой, имеющих равные длины (например, сила, приложенная к абсолютно твердому телу).
Связанный вектор – это направленный отрезок (например, вектор скорости частиц жидкости, движущейся с завихрениями, где каждая частица имеет свой вектор скорости).
Для связанных векторов: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ совпадают точки A и C, а также точки B и D.

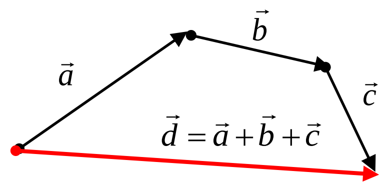
§2. Линейные операции над векторами. Линейное пространство.

1.Сложение векторов.

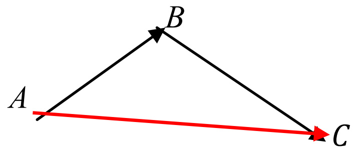
1) Правило треугольника

Опр. **Суммой** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, который соединяет начало 1-го вектора с концом 2-го, при условии, что точка приложения 2-го вектора находится в конце 1-го. Распространяется на любое конечное число векторов.



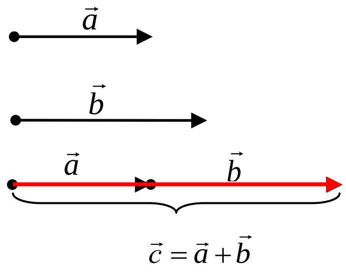


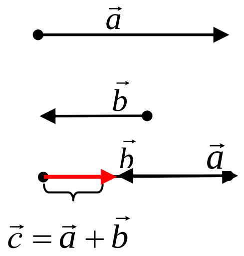
Другая формулировка сложения векторов по правилу треугольника.
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

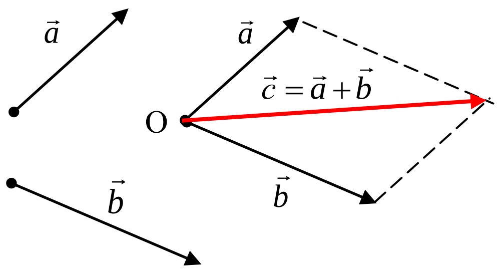
Частный случай. Сложение коллинеарных векторов.





Пример 2.1. . *ABCD* – параллелограмм, т. *O* – точка пересечения диагоналей; точки *E*, *F* – середины параллельных сторон *BC* и *AD*. Найти сумму векторов:
1) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF}$; 2) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OB}$; 3) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FO}$

2) Правило параллелограмма

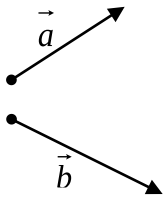


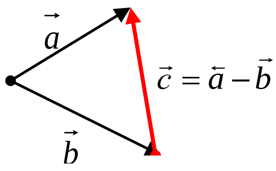
Отложить от т. O векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить на этих векторах как на сторонах параллелограмм. Вектор, служащий диагональю параллелограмма, проведенный из т. O, является суммой $\vec{a} + \vec{b}$.

2. Вычитание векторов.

Опр. **Разностью** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, который будучи сложенным с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Если $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, то $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Из определения вытекает правило построения $\vec{a}-\vec{b}$.

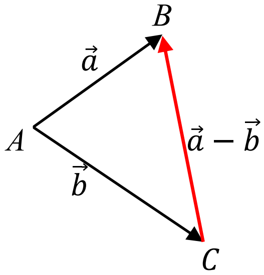




$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ направлен из конца вычитаемого к концу уменьшаемого.

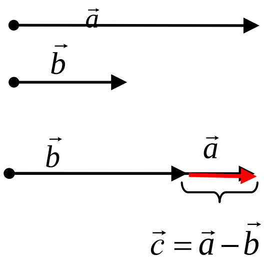
Другая формулировка вычитания векторов

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$

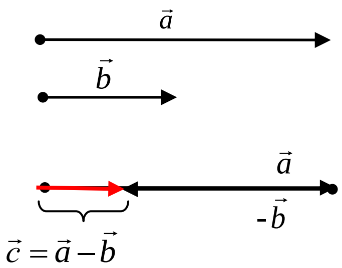


$$\boxed{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}}$$

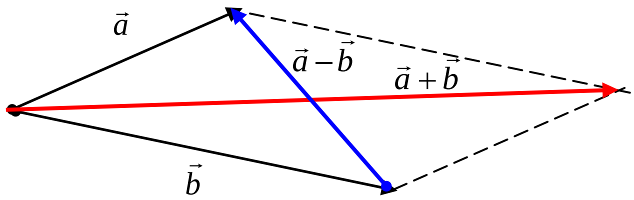
Частный случай.



или



Сложение (правило параллелограмма)
и вычитание:



Пример 2.2. *ABCD* – параллелограмм, точка *O* – точка пересечения диагоналей; точки *M*, *N*, *P*, *Q* – середины сторон *AB*, *BC*, *CD*, *DA*.

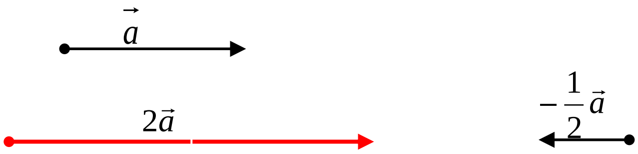
Найти разность векторов:

1) $\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CP}$; 3) $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}$; 4) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{NP}$.

3. Умножение вектора на число.

Опр. **Произведением** вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$:

1) коллинеарный вектору $\vec{a}$;
2) имеющий длину $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
3) тоже направление, что и $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, противоположное направлению $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.



Пусть $\vec{a}_0$ – единичный вектор (орт) вектора $\vec{a}$, т.е. $\vec{a}_0$ коллинеарен $\vec{a}$, одинакового с ним направления, $|\vec{a}_0| = 1$. Тогда $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$ или $\vec{a}_0 = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются **линейными**.
Они обладают **свойствами**:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b}$ 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

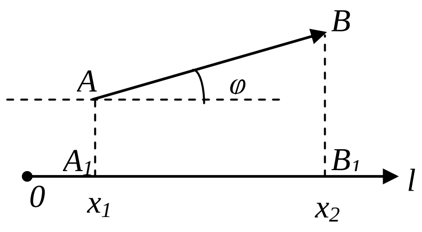
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a}$ 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \forall \vec{a}$

5) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}, \quad \forall \vec{a}, \quad \forall \alpha, \beta \in R$ 6) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a}$

7) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \quad \forall \vec{a}, \quad \forall \alpha, \beta \in R$ 8) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \quad \forall \alpha \in R$

Пример 2.3. Дан параллелограмм *ABCD*, *O* – т. пересечения диагоналей. Найти $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

§3. Проекция вектора на ось.



Пусть даны: *l* – некоторая ось и $\overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор.
A_1 – проекция *A* на ось *l*, x_1 – координата A_1 на *l*;
B_1 – проекция *B* на ось *l*, x_2 – координата B_1 на *l*.

Опр. **Проекцией вектора** $\overrightarrow{AB}$ **на ось** называется разность $x_2 - x_1$

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = x_2 - x_1.$$

Обозначим φ – угол между $\overrightarrow{AB}$ и *l*; $\varphi = (\overrightarrow{AB}, \hat{\ } \ l)$ – наименьший угол, на который надо повернуть единичный вектор $\vec{l}_0$ оси *l* до совпадения с $\overrightarrow{AB}$.

Если φ – острый угол $\Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow \text{пр}_l \overrightarrow{AB} > 0$

Если φ – тупой угол $\Rightarrow x_2 < x_1 \Rightarrow \text{пр}_l \overrightarrow{AB} < 0$

Если $\varphi = 90^o \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow \text{пр}_l \overrightarrow{AB} = 0$

Свойства проекций.

1. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l равна модулю вектора $|\overrightarrow{AB}|$, умноженному на косинус угла φ между $\overrightarrow{AB}$ и осью l. $\quad \text{пр}_l\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, где $\varphi = (\overrightarrow{AB}, \widehat{\ } \ l)$.

2. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

3. При умножении вектора на число проекция на ось также умножается на это число.

$$\lambda \cdot \vec{a} \Rightarrow \text{пр}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\text{пр}_l\vec{a}.$$

4. Проекции двух равных векторов на одну и ту же ось равны.

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \text{пр}_l\vec{a} = \text{пр}_l\vec{b}.$$

§4. Линейная зависимость векторов. Базис. Координаты вектора на плоскости и в пространстве.

1. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.

Рассмотрим систему n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ и n действительных чисел $\lambda_1, . \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Опр. Вектор $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией** векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, . \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(выражение $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$ - *линейная комбинация* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots \vec{a}_n$)

Будем также говорить, что вектор $\vec{b}$ **линейно выражается** через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, . \lambda_2, \dots, \lambda_n$ или линейно **раскладывается по векторам** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с указанными коэффициентами.

Опр. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существуют такие числа $\lambda_1, . \lambda_2, \dots, \lambda_n$, среди которых хотя бы одно *отлично от нуля,* и такие, что линейная комбинация $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$ равна нулевому вектору, т.е.

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

Если система векторов не является линейно зависимой, то она называется **линейно независимой, таким образом,** система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ **линейно независима**, если линейная комбинация $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$,

Геометрический смысл линейно зависимой системы двух векторов:
1. *Два вектора линейно зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.
2.Система, состоящая из *двух неколлинеарных* векторов, *линейно независима*.

Геометрический смысл линейно зависимой системы трех векторов:
1. Система, состоящая из *трех векторов, линейно зависима* тогда и только тогда, когда векторы *компланарны.*
2. Система, состоящая из *трех некомпланарных* векторов, *линейно независима*.

2. Базис на плоскости. Разложение вектора плоскости по векторам базиса.

Опр. Базисом плоскости называется система из **двух неколлинеарных** векторов плоскости, заданных в определенном порядке.

Базис плоскости это система **двух линейно независимых** векторов плоскости.

Пусть $\boldsymbol{\vec{e}_1}, \ \boldsymbol{\vec{e}_2}$ - базис плоскости. Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$называются **базисными векторами.**

Опр. Базис плоскости называется **ортонормированным** или **прямоугольным декартовым**, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.
Ортонормированный базис на плоскости обозначается: $\boldsymbol{\vec{\imath}}, \boldsymbol{\vec{\jmath}}$.
Произвольный базис плоскости называется *аффинным* или *общим декартовым*.

Теорема (о разложении вектора плоскости по векторам базиса).
Если на плоскости дан базис, то *любой вектор плоскости линейно выражается через векторы базиса,* причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – данный базис плоскости; $\vec{a}$ – произвольный вектор плоскости.

3. Координаты вектора плоскости в данном базисе.

Опр. Коэффициенты разложения вектора плоскости по векторам базиса называются **координатами** этого вектора относительно данного базиса.

Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – данный базис плоскости; $\vec{a}$ – произвольный вектор плоскости.
По теореме о разложении вектора плоскости по векторам базиса существуют единственные числа a_1 *и* a_2, такие, что

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

Вектор $\boldsymbol{\vec{a}}$ ***разложен по векторам базиса*** $\boldsymbol{\vec{e}_1}$, $\boldsymbol{\vec{e}_2}$
Коэффициенты a_1 *и* a_2 - **координаты вектора $\boldsymbol{\vec{a}}$ в базисе** $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, число a_1 называется *первой* координатой, a_2 – *второй*.
Записывают: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ или $\vec{a}(a_1, a_2)$ или $\vec{a}\{a_1;\ a_2\}$.

Замечание. Координаты базисных векторов плоскости $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$:

$$\vec{e}_1(1,0);\ \vec{e}_2(0,1), \text{т.к. } \vec{e}_1 = 1\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2;\ \vec{e}_2 = 0\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2$$

4. Базис в пространстве. Разложение вектора пространства по векторам базиса.

Опр. Базисом пространства называется упорядоченная система, состоящая из трех некомпланарных векторов пространства.
Базис пространства это система **трех линейно независимых** векторов пространства.
Замечание. В данном случае речь идет о ***трехмерном*** векторном пространстве.

Пусть $\boldsymbol{\vec{e}_1}$, $\boldsymbol{\vec{e}_2}$, $\boldsymbol{\vec{e}_3}$ **-** базис векторного пространства. Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ называются **базисными векторами**, причем вектор $\vec{e}_1$ называется *первым* базисным вектором, вектор $\vec{e}_2$ - *вторым* базисным вектором, а вектор $\vec{e}_3$ – *третьим* базисным вектором,

Опр. Базис пространства называется **ортонормированным** или **прямоугольным декартовым**, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.
Ортонормированный базис пространства обозначается: $\boldsymbol{\vec{\imath}}$, $\boldsymbol{\vec{\jmath}}$, $\boldsymbol{\vec{k}}$.
Произвольный базис пространства называется *аффинным* или *общим декартовым.*

Теорема (о разложении вектора пространства по векторам базиса).
Пусть в пространстве дан произвольный базис. Тогда *любой вектор пространства линейно выражается через базисные векторы,* причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – данный базис пространства; $\vec{a}$ – произвольный вектор пространства.

Следствие. Система, состоящая из *четырех и более векторов* пространства, является *линейно зависимой.*

5. Координаты вектора пространства в данном базисе.

Опр. Коэффициенты разложения вектора пространства по векторам базиса называются **координатами** этого вектора относительно данного базиса.

Пусть $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ – данный базис пространства; $\vec{a}$ – произвольный вектор пространства.
По теореме о разложении вектора пространства по векторам базиса существуют единственные числа $a_1,\ a_2,\ a_3$ такие, что

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Вектор $\boldsymbol{\vec{a}}$ ***разложен по векторам базиса*** $\boldsymbol{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3}$**.**
Коэффициенты $a_1, a_2,\ a_3$ - **координаты вектора** $\boldsymbol{\vec{a}}$ **в базисе** $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$
(число a_1 - первая координата, $a_2 -$ вторая, $a_3 -$ третья).
Записывают: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ или $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ или $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$.
Замечание. Координаты базисных векторов пространства $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ в самом базисе
$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$: $\vec{e}_1(1, 0, 0)$; $\vec{e}_2(0, 1, 0)$; $\vec{e}_3(0, 0, 1)$.
Нулевой вектор в любом базисе имеет координаты: $\vec{0}(0, 0, 0)$.

6. Координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число.

Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами в заданном базисе сводятся к обычным линейным операциям над числами – координатами векторов.
Пусть в пространстве задан базис $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$.
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в этом базисе координаты:
$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, т.е. $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$; $\vec{b}(b_1, b_2, b)$, т.е. $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$.

Тогда координаты суммы векторов, разности векторов и произведения вектора на число равны:
1. $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3$
При сложении векторов складываются их соответствующие координаты.

2. $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\vec{e}_3$
При вычитании векторов вычитаются их соответствующие координаты.

3. $\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 + \lambda a_3\vec{e}_3$
При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Замечание. Данные утверждения справедливы и для **векторов плоскости.**
Если $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$; $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$, то $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2$; $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2$; $\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2$.

7. Условия коллинеарности и компланарности векторов в координатах.

Теорема. Два вектора на плоскости или в пространстве *коллинеарны* в том и только том случае, когда их *координаты пропорциональны*.
Следствие. Пусть *на плоскости* даны два вектора $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ и $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$.
1.Векторы коллинеарны в том и только том случае, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

2. Если определитель, составленный из координат двух векторов плоскости, отличен от нуля, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независима, т.е. **образует базис плоскости.**

Задание 4.1. Доказать, что векторы $\vec{e}_1 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$ образуют базис плоскости. Найти координаты $\vec{a} = -6\vec{i} + 7\vec{j}$ в этом базисе, т.е. разложить вектор $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.
Ответ: $\vec{a} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$.

Теорема. Пусть в *трехмерном пространстве* даны три вектора

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3;\ \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3;\ \vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3.$$

1. Эти векторы компланарны в том и только том случае, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Следствие. Если определитель, составленный из координат трех векторов пространства, отличен от нуля, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

то система векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независима, т.е. образуют **базис в трехмерном векторном пространстве.**

Задание 4.2. Доказать, что векторы $\vec{e}_1 = 2\vec{i}$; $\vec{e}_2 = \vec{j}$**;** $\vec{e}_3 = 5\vec{k}$ образуют базис в трехмерном векторном пространстве. Найти координаты $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 15\vec{k}$ в этом базисе, т.е. разложить вектор $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Ответ: $\vec{a} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

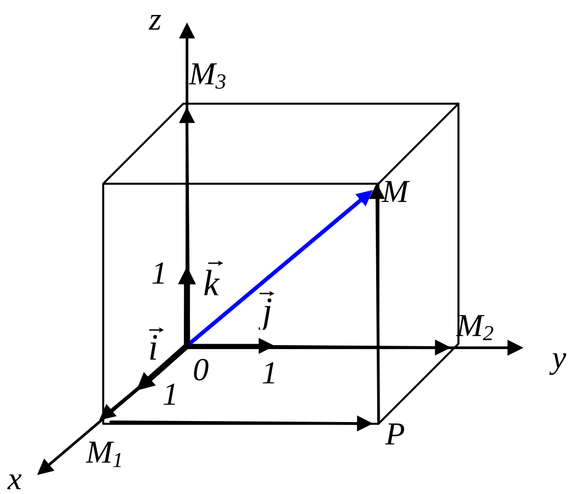
Некоторые выводы

	Плоскость	Пространство
Базис	Система из *двух неколлинеарных* векторов плоскости, заданных в определенном порядке; система *двух линейно независимых* векторов плоскости.	Упорядоченная система из *трех некомпланарных* векторов пр-ва; система *трех линейно независимых* векторов пр-ва.
Разложение вектора по базису. Координаты вектора.	$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,$ – базис плоскости; $\vec{a}$ – произв. вектор плоскости $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ (разложение вектора $\vec{a}$ по векторам базиса, причем единств. образом) a_1, a_2 - *координаты вектора* $\vec{a}$ *в базисе* $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$.	$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ – базис пространства; $\vec{a}$ – произв. вектор пр-ва $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ (разложение в-ра $\vec{a}$ по векторам базиса, причем единств. образом) $a_1, a_2,\ a_3$ - *координаты вектора* $\vec{a}$ *в базисе* $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$.
Условия линейной независимости векторов, заданных координатами	Если определитель, составленный из координат двух векторов плоскости, отличен от нуля, то эта система векторов линейно независима, т.е. *образует базис плоскости.*	Если определитель, составленный из координат трех векторов пространства, отличен от нуля, то эта система векторов линейно независима, т.е. образуют *базис пространства.*
Действия над векторами, заданными координатами	$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2;$ $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2;$ $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\vec{e}_1 + (a_2+b_2)\vec{e}_2;$ $\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1)\vec{e}_1 + (a_2-b_2)\vec{e}_2;$ $\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2.$	$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3;$ $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3;$ $\vec{a}\pm\vec{b} = (a_1\pm b_1)\vec{e}_1 +$ $+(a_2\pm b_2)\vec{e}_2 + (a_3\pm b_3)\vec{e}_3;$ $\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 + \lambda a_3\vec{e}_3.$

§5. Разложение вектора в ортонормированном базисе (прямоугольном декартовом базисе). Длина вектора. Направляющие косинусы.

1. Разложение вектора в ортонормированном (прямоугольном декартовом) базисе.

Введем в пространстве R^3 прямоугольную декартову систему координат - совокупность трех взаимно перпендикулярных осей *Ox, Oy, Oz* с общим началом *O* (пр-во $0xyz$).



Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ –единичные векторы осей *Ox, Oy, Oz.*

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются **ортами**.

Поскольку $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – некомпланарные, то они образуют базис в пространстве, который называют **ортонормированным** или **прямоугольным декартовым базисом.**

Известно, что каждый вектор пространства можно единственным образом разложить по векторам базиса пространства.

Теорема. Любой вектор $\vec{a}$, заданный в пространстве *0xyz*, может быть представлен в виде

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (1)$$

Каждый вектор имеет *единственное представление* в виде (1) в ортонормированном базисе. Такое представление вектора $\vec{a}$ **называется разложением вектора в ортонормированном базисе** или **разложением вектора в прямоугольном декартовом базисе** или **разложением вектора по ортам.**

Коэффициенты a_x, a_y, a_z разложения вектора $\vec{a}$ пространства по векторам ортонормированного базиса называются **прямоугольными декартовыми координатами** вектора $\vec{a}$**.** Записывают также $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ или $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$.

Замечание. *Прямоугольные декартовы координаты* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ являются *его проекциями* на соответствующие оси координат.

Замечание. *Радиус – вектор и координаты точки.*

Опр. Радиус – вектором точки *M* называется вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом *O* системы координат.

Координатами x, y, z точки *M* пространства являются коэффициенты разложения ее радиус - вектора по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$: $\qquad \vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Итак, $M(x, y, z)$ и $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$

2. Операции над векторами, заданными их разложениями по ортам, т.е. заданными своими координатами в ортонормированном базисе.

Пусть даны два вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тогда сумма векторов: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$.

Разность векторов: $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$.

Произведение вектора на число: $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$.

Итак, $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$,

$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$.

Пример 5.1. 1). $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Найти $2\vec{a} - \vec{b}$

2). В ортонормированном базисе: $\vec{a} = (2; -1; 4), \vec{c} = (4; 3; -5), 3\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$. Найти $\vec{b}$

3. Модуль (длина) вектора, заданного координатами в ортонормированном базисе.

Дано: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

По теореме о длине диагонали параллелепипеда

$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM}_1|^2 + |\overrightarrow{OM}_2|^2 + |\overrightarrow{OM}_3|^2$ или $|\vec{a}|^2 = a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$ – **модуль** вектора $\vec{a}$.

4. Расстояние между двумя точками в пространстве.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2)$.

$a_x = \text{пр}_{0x}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1;\quad a_y = \text{пр}_{0y}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1;\ a_z = \text{пр}_{0z}\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1.$

Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ – **разложение** $\overrightarrow{AB}$ **по ортам**, где $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2)$.

Расстояние между точками *A* и *B* равно $|\overrightarrow{AB}|$, значит

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2)$.

Частный случай. Расстояние между точками на плоскости

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$.

Пример 5.2. $A(1;2;-3),\ B(3,4,4)$. Найти $\overrightarrow{AB}$ и $|AB|$.

5. Направляющие косинусы.

Направление вектора в пространстве определяется углами $\alpha, \beta, \gamma,$ которые вектор составляет с осями *Ox, Oy, Oz*. Косинусы этих углов, т.е. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора.

Из 1-г свойства проекций:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Если вектор задан координатами в ортонормированном базисе, т.е. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$,то

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}};\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}}.$$

Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

6. Условие коллинеарности двух векторов.

Пусть векторы $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ коллинеарны.

Тогда $\vec{a} = \lambda\vec{b},$ где λ – число. По свойству 3 проекций:

$$a_x = \lambda b_x;\quad a_y = \lambda b_y;\quad a_z = \lambda b_z. \qquad (*)$$

Обратно, если выполняются равенства (*), то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Равенства (*) означают: $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda.$

Итак, для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их проекции были пропорциональны

$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ – **условие коллинеарности векторов в пространстве**

Частный случай: $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}$ – **условие коллинеарности векторов на плоскости**

Пример 5.3. При каком значении *m* векторы $\vec{a}=(2;-m)$ и $\vec{b}=(5;3)$ коллинеарны.

§6. Скалярное произведение векторов.

1. Определение.

Опр. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b}). \qquad (1)$$

Придадим (1) другой вид (по свойству 1 проекций).

$|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})=\text{пр}_a\vec{b}$ – проекция $\vec{b}$ на ось, определяемую $\vec{a}$.

$|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})=\text{пр}_b\vec{a}$ - проекция $\vec{a}$ на ось, определяемую $\vec{b}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_a\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_b\vec{a}. \qquad (2)$$

2. Свойства скалярного произведения.

1) Переместительное свойство: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2) Сочетательное свойство относительно скалярного множителя $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3) Распределительное свойство: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Пример 6.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}|=10,\ |\vec{b}|=2$, вычислить $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})$.

4) **Условие перпендикулярности векторов**

По определению $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})$. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, или

$\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})=0,$ т.е. $\vec{a}\perp\vec{b}.$ Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы. Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.
Итак, для того, чтобы два ненулевых вектора были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

Пример 6.2. При каком значении α векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ ортогональны, если $|\vec{a}|=3,$ $|\vec{b}|=5?$ Ответ: $\alpha=\pm\dfrac{3}{5}.$

3. <u>Скалярное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.</u>

Даны два вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}.$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ – **скалярное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном (прямоугольном декартовом) базисе.**

Если $\vec{a}\perp\vec{b},$ то $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$ – **условие перпендикулярности векторов, заданных координатами в ортонормированном (прямоугольном декартовом) базисе.**

Пример 6.3. При каком значении c векторы $\vec{a}=(3;2;-c)$ и $\vec{b}=(4;-3;-2)$ взаимно перпендикулярны

4. <u>Угол между векторами в пространстве.</u>

По определению $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})$, значит

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Если векторы заданы координатами в ортонормированном (прямоугольном декартовом) базисе, т. е. $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}\cdot\sqrt{b_x^{\,2}+b_y^{\,2}+b_z^{\,2}}}.$$

Пример 6.4. Даны вершины четырехугольника $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5, -5, 3)$. Вычислить угол φ между его диагоналями. Ответ: $\varphi = 90^o$.

5. <u>Приложение скалярного произведения к механике</u>

Если материальна точка, на которую действует сила $\vec{F}$ совершает перемещение по вектору $\vec{S}$, то работа A равна скалярному произведению $\vec{F}$ и $\vec{S}$.

$$A = \vec{F}\cdot\vec{S} = |\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi.$$

Пример 6.5. Вычислить работу равнодействующей $\vec{F}$ сил $\vec{F}_1 = (3,-4,5)$, $\vec{F}_2 = (2,1,-4)$, $\vec{F}_3 = (-1,6,2)$, приложенных к материальной точке, которая под их воздействием перемещается прямолинейно из т. M_1 (4,2,-3) в т. M_2 (7,4,1).

Решение. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (4,3,3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{S} = (3,2,4)$, $A = \vec{F}\cdot\vec{S} = 4\cdot 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 4 = 30$.

§7. Векторное произведение векторов.

1. <u>Определение.</u>

Опр. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который определяется следующим образом:

1) модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах

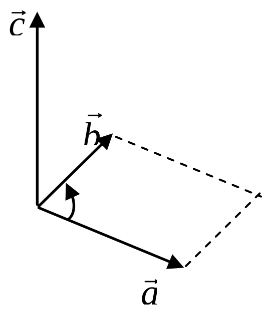
$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b});$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен перемножаемым векторам, т. е. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3) направление вектора $\vec{c}$ таково, что если смотреть с его конца (вдоль вектора), то поворот по кратчайшему пути от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки.

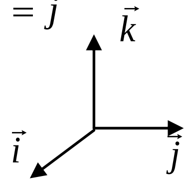
($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют **правую тройку;** т.е. ориентированы как $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$).

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ или $[\vec{a},\vec{b}]$.



Частные случаи:

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$



2. Свойства векторного произведения.

1). При **перестановке сомножителей** векторное произведение **меняет знак**

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

2). $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ − **сочетательное** свойство относительно скалярного множителя, т.е. числовой множитель можно выносить за знак векторного произведения.

3). $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=a\times\vec{c}+b\times\vec{c}$ − **распределительное** свойство.

4). Условие коллинеарности векторов.

Векторное произведение равно нуль-вектору, если хотя бы один из перемножаемых векторов нулевой или синус угла между ними равен нулю, т.е. векторы коллинеарны.

Итак, для того, чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нуль-вектору

$$\underset{\text{коллинеарны}}{\vec{a}\,||\,\vec{b}}\quad\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0.$$

3. Векторное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.

Даны два вектора: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Найти: $\vec{a}\times\vec{b}$.

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$ - **векторное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном (прямоугольном декартовом) базисе.**

Пример 7.1. $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k};\ \vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}.$ Найти: а) $\vec{a}\cdot\vec{b};$ б) $\vec{a}\times\vec{b}.$

Решение. а) $\vec{a}=(3;-2;1),\ \vec{b}=(-1;3;0);\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3(-1)-2\cdot3+1\cdot0=-9.$

б) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=-3\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k}.$

4. Площадь параллелограмма и площадь треугольника.

$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$ −**площадь параллелограмма**, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ −**площадь треугольника**, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Пример 7.2. Найти $S_{\Delta ABC}$, если $A(0;2;1)$, $B(-1;3;4)$, $C(2;5;2)$.

§8. Смешанное произведение векторов.

1. Определение.

Опр. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначается: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

Таким образом: $$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

Геометрически смешанное произведение интерпретируется как число, равное **объему параллелепипеда,** построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ как на ребрах.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ положительно, если данные векторы образуют правую тройку и отрицательно – если левую.

2. Свойства смешанного произведения.

$$\mathbf{1}).\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

(не меняется при циклической перестановке векторов).

$$\mathbf{2}).\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

(не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения).

$$\mathbf{3}).\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$$

(меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов-сомножителей).

$$\mathbf{4}).\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны (в частности, если любые два из перемножаемых векторов коллинеарны).

3. Смешанное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.

Даны три вектора: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$; $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$;

Найти: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$ **- смешанное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном (прямоугольном декартовом) базисе.**

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка; если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая тройка

4. Объем параллелепипеда и объем пирамиды.

$V_{\text{пар.}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ – **объем параллелепипеда**, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ – **объем пирамиды**, построенной из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$