ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра высшей математики

М А Т Е М А Т И К А

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ОРГАНИЗАЦИИ
КОНТАКТНОЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для студентов 1-го и 2-го курсов
направления подготовки 08.03.01 Строительство,
направленность «Промышленное и гражданское строительство»
очной формы обучения

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2021

УДК 512(076)
ББК 22.1
М 34

Составители: сотрудники кафедры высшей математики Костромской ГСХА канд. филос. наук, доцент кафедры *Л.Б. Рыбина*, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой *Л.Ю. Головина*.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, д-р экон. наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Костромской ГСХА *В.И. Цуриков*, д-р пед. наук, доцент, профессор кафедры физики и автоматики Костромской ГСХА *И.А. Мамаева*

Рекомендовано методической комиссией архитектурно-строительного факультета в качестве учебно-методического пособия по организации контактной и самостоятельной работы для студентов 1-го и 2-го курсов направления подготовки 08.03.01 Строительство, направленность «Промышленное и гражданское строительство» очной формы обучения

М **Математика :** учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы / сост. Л.Б. Рыбина, Л.Ю. Головина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2021. — 146 с. ; 20 см. – 50 экз. – Текст непосредственный.

Издание содержит задания для контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями, вопросы и задания для самостоятельного изучения учебного материала, список рекомендуемой литературы.

Учебно-методическое пособие предназначено для организации контактной и самостоятельной работы для студентов 1-го и 2-го курсов направления подготовки 08.03.01 Строительство, направленность «Промышленное и гражданское строительство» очной формы обучения.

УДК 512(076)
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы предназначено для студентов 1-го и 2-го курсов направления подготовки 08.03.01 Строительство, направленность «Промышленное и гражданское строительство» очной формы обучения.

Издание содержит задания для контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями, вопросы и задания для самостоятельного изучения учебного материала, список рекомендуемой литературы.

Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) являются одной из основных форм текущего контроля самостоятельной работы студентов. ИДЗ содержат комплект заданий, выполняя которые, студенты должны продемонстрировать умение решать типовые задачи и проводить типовые расчеты. Сроки выполнения ИДЗ указываются в рейтинг-плане. Оценка за ИДЗ является существенной компонентой оценки самостоятельной работы студента в течение семестра.

Цель ИДЗ — помочь студентам закрепить и отработать материал, изученный на лекциях и практических занятиях. Для достижения этой цели задания подобраны таким образом, чтобы они охватывали все основные типы задач.

Общие требования к выполнению ИДЗ

Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) должно выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяет преподаватель.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие. Решение задач следует излагать подробно. Все записи, чертежи должны быть аккуратными, четкими и разборчивыми.

На каждой странице тетради необходимо оставить поля шириной 3-5 см для замечаний рецензента. Страницы нумеруются.

Выполненная работа сдается преподавателю в указанный им срок. Рекомендуется внимательно разобрать решения типовых задач, которые приводятся в данном пособии.

Не зачтенная работа возвращается студенту для исправления ошибок. Все исправления ошибок делаются в конце работы. Исправления в тексте прорецензированной работы не допускаются. Работу с выполненными исправлениями следует сдать преподавателю для повторного рецензирования.

1-Й СЕМЕСТР

1. ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Индивидуальное домашнее задание №1 «Элементы линейной и векторной алгебры»

Базовый уровень

Задание 1. Даны матрицы A, B, C (табл. 1).

Найдите матрицу $D = 3BA + CB$.

Таблица 1. Исходные данные

Номер варианта	Матрица A	Матрица B	Матрица C
1	2	3	4
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

Номер варианта	Матрица A	Матрица B	Матрица C
1	2	3	4
8	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 9 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Номер варианта	Матрица A	Матрица B	Матрица C
1	2	3	4
18	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

Задание 2. Решить систему линейных уравнений (табл. 2):

1) по правилу Крамера, при этом два определителя вычислить по правилу треугольников, один — разложением по элементам любой строки, один — разложением по элементам любого столбца;

2) матричным методом, при этом сделать проверку правильности нахождения обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

Таблица 2. Исходные данные

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -9 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
5	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3, \\ 3x_1-x_2+x_3=12 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 7x_1-5x_2=24, \\ 4x_1+11x_3=39, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=33 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2+2x_3=11, \\ 4x_1+x_2+4x_3=19 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-37, \\ 3x_1+x_2+x_3=3, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=76 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=23, \\ -4x_1-x_2+3x_3=-10 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 7x_1-5x_2=-6, \\ 4x_1+11x_3=8, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=16 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 2x_1-x_2+2x_3=2, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-9, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=-8 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=-9, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=12 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 7x_1-5x_2=-1, \\ 4x_1+11x_3=52, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=29 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=11, \\ 2x_1-x_2+2x_3=8, \\ 4x_1+x_2+4x_3=22 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-19, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=36 \end{cases}$

Задание 3. Даны координаты вершин пирамиды A, B, C, D (табл. 3). Найти:

1) координаты векторов $\bar{a}=\overline{AB}$, $\bar{b}=\overline{AC}$, $\bar{c}=\overline{AD}$, записать их разложение по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$;

2) модуль вектора $\bar{d}=3\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ и его направляющие косинусы;

3) косинус угла BAC;

3) площадь грани ABC;

4) объем пирамиды $ABCD$.

Таблица 3. Исходные данные

Номер варианта	Координаты точек			
	A	B	C	D
1	2	3	4	5
1	$(3;-1;2)$	$(4;-1;-1)$	$(2;0;2)$	$(1;2;4)$
2	$(2;-1;2)$	$(3;-1;-1)$	$(1;0;2)$	$(0;2;4)$
3	$(3;0;2)$	$(4;0;-1)$	$(2;1;2)$	$(1;3;4)$
4	$(2;-1;3)$	$(3;-1;0)$	$(1;0;3)$	$(0;2;5)$
5	$(3;1;2)$	$(4;1;-1)$	$(2;2;2)$	$(1;4;4)$
6	$(2;1;2)$	$(3;1;-1)$	$(1;2;2)$	$(0;4;4)$
7	$(1;1;2)$	$(2;1;-1)$	$(0;2;2)$	$(-1;4;4)$
8	$(0;1;2)$	$(1;1;-1)$	$(-1;2;2)$	$(-2;4;4)$
9	$(0;2;2)$	$(1;2;-1)$	$(-1;3;2)$	$(-2;5;4)$
10	$(0;2;1)$	$(1;2;-2)$	$(-1;3;1)$	$(-2;5;3)$
11	$(2;1;0)$	$(5;3;1)$	$(0;1;2)$	$(4;3;1)$
12	$(1;1;0)$	$(2;3;1)$	$(1;-1;2)$	$(3;2;1)$
13	$(1;1;0)$	$(3;4;5)$	$(2;3;1)$	$(4;5;1)$
14	$(2;-1;0)$	$(-1;3;4)$	$(1;1;1)$	$(0;3;5)$
15	$(3;-1;2)$	$(7;9;1)$	$(5;1;2)$	$(1;2;0)$
16	$(2;4;-3)$	$(3;5;-4)$	$(4;5;-1)$	$(3;4;0)$
17	$(1;3;-1)$	$(2;0;7)$	$(-2;0;7)$	$(5;5;2)$
18	$(1;-1;1)$	$(4;1;2)$	$(2;0;1)$	$(5;2;8)$
19	$(1;4;-2)$	$(-2;5;0)$	$(3;4;0)$	$(2;5;-1)$

Номер варианта	Координаты точек			
	A	B	C	D
20	$(2;-1;1)$	$(4;-4;1)$	$(1;0;1)$	$(3;4;6)$

Повышенный уровень

Задание 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса (табл. 4).

Таблица 4. Исходные данные

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 2x_1-10x_2-3x_3-x_4=33, \\ 3x_2+5x_3-7x_4=-4, \\ 8x_1-x_3+9x_4=23, \\ 5x_1+2x_2-6x_3=3 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x_1-3x_2-5x_3-7x_4=-55, \\ 9x_1-2x_2-6x_3=0, \\ -8x_3+x_4=-18, \\ -3x_1+2x_2-5x_3-x_4=-27 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1-5x_2-3x_3+2x_4=-28, \\ 4x_1+x_2+x_3-7x_4=21, \\ -2x_2-3x_3+x_4=-14, \\ 3x_1+5x_2-4x_4=35 \end{cases}$	4	$\begin{cases} -x_1-3x_2+5x_3+2x_4=22, \\ 5x_1+3x_2-2x_3-4x_4=-33, \\ 2x_1-7x_2=12, \\ 8x_2+4x_3-x_4=-17 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3+x_4=-10, \\ 7x_1-3x_3-2x_4=-8, \\ 9x_1+7x_2-5x_3=25, \\ -4x_3+7x_4=-1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 8x_1+x_2+3x_3=-17, \\ 5x_1-3x_2-x_3+2x_4=-13, \\ 9x_1-6x_2+5x_3-x_4=-36, \\ x_1-3x_2+2x_3+4x_4=-6 \end{cases}$
7	$\begin{cases} -x_1+5x_2-2x_3+8x_4=9, \\ 3x_1-x_2+9x_3=-17, \\ 5x_1-3x_2-2x_3+x_4=14, \\ 2x_2+9x_3=-26 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4=18, \\ 4x_1+2x_2+5x_3+7x_4=24, \\ 3x_1+2x_2+8x_3+5x_4=13, \\ 2x_1+8x_2+7x_3+3x_4=6 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 5x_1+2x_2-7x_3+3x_4=59, \\ x_1-3x_2-x_3+4x_4=20, \\ -7x_1-x_2+x_3-5x_4=-38, \\ 2x_1-9x_2-2x_3-6x_4=-53. \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ x_2+3x_3+x_4=15, \\ 4x_1+x_3+x_4=11, \\ x_1+x_2+5x_4=23 \end{cases}$

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
11	$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 = 79, \\ 7x_1 - x_2 + 5x_3 = 67, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 29, \\ 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 33 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -10 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 41, \\ 9x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 14x_4 = 93, \\ -x_2 + 5x_3 = 11, \\ x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -19 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 18, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 13, \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 18, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 24, \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 13, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 18, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 24, \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 13, \\ 8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 16 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 11, \\ 5x_2 + x_3 + x_4 = 23 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = -11 \end{cases}$

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу $D = 3BA + CB$.

Решение

Найдем произведение BA:

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot4+3\cdot2+(-2)\cdot3 & 1\cdot1+3\cdot(-3)+(-2)\cdot1 & 1\cdot(-2)+3\cdot0+(-2)\cdot2\\ (-1)\cdot4+0\cdot2+1\cdot3 & (-1)\cdot1+0\cdot(-3)+1\cdot1 & (-1)\cdot(-2)+0\cdot0+1\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -10 & -6\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Найдем произведение $3BA$:

$$3BA=3\cdot\begin{pmatrix}4 & -10 & -6\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -30 & -18\\ -3 & 0 & 12\end{pmatrix}.$$

Найдем произведение CB:

$$CB=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot1+1\cdot(-1) & 4\cdot3+1\cdot0 & 4\cdot(-2)+1\cdot1\\ 2\cdot1+(-3)\cdot(-1) & 2\cdot3+(-3)\cdot0 & 2\cdot(-2)+(-3)\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 12 & -7\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix}.$$

Найдем значение выражения $3BA+CB$:

$$3BA+CB=\begin{pmatrix}12 & -30 & -18\\ -3 & 0 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 12 & -7\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12+3 & -30+12 & -18+(-7)\\ -3+5 & 0+6 & 12+(-7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -18 & -25\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}15 & -18 & -25\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

Задание 2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

1) по правилу Крамера, при этом два определителя вычислить по правилу треугольников, один — разложением по элементам любой строки, один — разложением по элементам любого столбца;

2) матричным методом, при этом сделать проверку правильности нахождения обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

Решение

1. Решим систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Составим определитель системы из коэффициентов при неизвестных и вычислим его по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 3 + 5\cdot(-1)\cdot 4 - 4\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 1 =$$

$$= 1 + 12 - 20 - 12 - 10 + 2 = -27.$$

Составим определитель Δ_1, заменив в определителе системы Δ первый столбец столбцом свободных членов, и вычислим его по правилу треугольников:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 10 + 8\cdot 4\cdot(-1) - 10\cdot 1\cdot 4 - 8\cdot 2\cdot 1 - 16\cdot 2\cdot(-1) =$$

$$= 16 + 40 - 32 - 40 - 16 + 32 = 0.$$

Составим определитель Δ_2, заменив в определителе системы Δ второй столбец столбцом свободных членов, и вычислим его, разложив по третьей строке:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 16 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 10\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(16\cdot 2 - 8\cdot 4) - 10\cdot(1\cdot 2 - 4\cdot 5) + (1\cdot 8 - 5\cdot 16) =$$

$$= 0 + 180 - 72 = 108\,.$$

Составим определитель Δ_3, заменив в определителе системы Δ третий столбец столбцом свободных членов, и вычислим его, получив нули в первом столбце и разложив по нему:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} =$$

умножим элементы первой строки на (-5) и прибавим к соответствующим элементам второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-3) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 0 & -9 & -72 \\ 0 & -7 & -38 \end{vmatrix} =$$

полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & -72 \\ -7 & -38 \end{vmatrix} = -9 \cdot (-38) - (-72) \cdot (-7) = 342 - 504 = -162\,.$$

Вычислим x_1, x_2 и x_3 по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-27} = 0\,,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{108}{-27} = -4\,,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-162}{-27} = 6\,.$$

Итак, $(0, -4, 6)$ — решение системы.

Ответ: $(0, -4, 6)$.

2. Решим систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ матричным методом.

Рассмотрим матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица системы, состоящая из коэффициентов при неизвестных,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$ — матрица-столбец неизвестных,

$$B=\begin{pmatrix}16\\8\\10\end{pmatrix}$$ — матрица-столбец свободных членов.

Тогда данная система в матричной форме примет вид:

$$AX=B.$$

Матрица X находится по формуле

$$X=A^{-1}B,$$

где A^{-1} — матрица, обратная к матрице A.

Найдем обратную матрицу A^{-1}. Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&4\\5&1&2\\3&-1&1\end{vmatrix}=-27$$ (вычисление в пункте 1).

Так как $\Delta=-27\neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=1\cdot1-2\cdot(-1)=3,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&2\\3&1\end{vmatrix}=-(5\cdot1-2\cdot3)=1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&1\\3&-1\end{vmatrix}=5\cdot(-1)-1\cdot3=-8,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&4\\-1&1\end{vmatrix}=-(2\cdot1-4\cdot(-1))=-6,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&4\\3&1\end{vmatrix}=1\cdot1-4\cdot3=-11,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}=-(1\cdot(-1)-2\cdot3)=7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&4\\1&2\end{vmatrix}=2\cdot2-4\cdot1=0,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-(1\cdot 2-4\cdot 5)=18,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 5=-9.$$

Составляем матрицу $\widetilde{A}$ из алгебраических уравнений:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -8\\ -6 & -11 & 7\\ 0 & 18 & -9\end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу $\widetilde{A}$, получаем матрицу $\overline{A}$:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 1 & -11 & 18\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу A^{-1} находим по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\overline{A}.$$

Получаем:

$$A^{-1}=\frac{1}{-27}\cdot\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 1 & -11 & 18\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0\\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3}\\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Проверка

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0\\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3}\\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 1 & -11 & 18\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 1+4\cdot(-8) & 1\cdot(-6)+2\cdot(-11)+4\cdot 7 & 1\cdot 0+2\cdot 18+4\cdot(-9) \\ 5\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot(-8) & 5\cdot(-6)+1\cdot(-11)+2\cdot 7 & 5\cdot 0+1\cdot 18+2\cdot(-9) \\ 3\cdot 3+(-1)\cdot 1+1\cdot(-8) & 3\cdot(-6)+(-1)\cdot(-11)+1\cdot 7 & 3\cdot 0+(-1)\cdot 18+1\cdot(-9) \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили единичную матрицу. Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена правильно.

Найдем матрицу X:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} 3\cdot 16+(-6)\cdot 8+0\cdot 10 \\ 1\cdot 16+(-11)\cdot 8+18\cdot 10 \\ (-8)\cdot 16+7\cdot 8+(-9)\cdot 10 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 108 \\ -162 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Итак, $(0,-4,6)$ — решение системы.

Ответ: $(0,-4,6)$.

3. Решим систему $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=16, \\ 5x_1+x_2+2x_3=8, \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$ методом Гаусса.

Умножим первое уравнение на (-5) и прибавим ко второму уравнению; умножим первое уравнение на (-3) и прибавим к третьему. Получим:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=16, \\ \quad -9x_2-18x_3=-72, \\ \quad -7x_2-11x_3=-38. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $\left(-\frac{1}{9}\right)$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ x_2 + 2x_3 = 8, \\ -7x_2 - 11x_3 = -38. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 7 и прибавим к третьему. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_3 = 18. \end{cases}$$

Умножим третье уравнение на $\frac{1}{3}$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_3 = 6. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Получили систему ступенчатого вида. Начиная с третьего уравнения, обратным ходом находим неизвестные:

$$x_3 = 6,$$
$$x_2 = 8 - 2x_3 = 8 - 2 \cdot 6 = 8 - 12 = -4,$$
$$x_1 = 16 - 2x_2 - 4x_3 = 16 - 2 \cdot (-4) - 4 \cdot 6 = 16 + 8 - 24 = 0.$$

Итак, (0, –4, 6) — решение системы.

Ответ: (0, –4, 6).

Задание 3. Даны координаты вершин пирамиды $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 4)$.

Найти:

1) координаты векторов $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$, $\overline{c} = \overline{AD}$, записать их разложение по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$;

2) модуль вектора $\overline{d} = 3\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$ и его направляющие косинусы;

3) косинус угла BAC;

4) площадь грани ABC;

5) объем пирамиды $ABCD$.

Решение

1. Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$, зная координаты его начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$, надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты его начала:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тогда

$$\overline{a} = \overline{AB} = (4-3; -1+1; -1-2) = (1; 0; -3),$$

$$\overline{b} = \overline{AC} = (2-3; 0+1; 2-2) = (-1; 1; 0),$$

$$\overline{c} = \overline{AD} = (1-3; 2+1; 4-2) = (-2; 3; 2).$$

Если вектор $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ задан своими координатами, то его можно записать в виде разложения по координатному базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ следующим образом:

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}.$$

Тогда разложение векторов $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$, $\overline{c} = \overline{AD}$ по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ имеет вид:

$$\overline{a} = \overline{i} + 3\overline{k},$$

$$\overline{b} = -\overline{i} + \overline{j},$$

$$\overline{c} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}.$$

2. Найдем координаты вектора $\overline{d} = 3\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$.

При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов — складываются одноименные координаты. Получим

$$3\overline{a} = (3 \cdot 1;\ 3 \cdot 0;\ 3 \cdot (-3)) = (3;\ 0;\ -9).$$

Тогда

$$\overline{d} = 3\overline{a} - \overline{b} + \overline{c} = (3; 0; -9) - (-1; 1; 0) + (-2; 3; 2) =$$

$$= (3 + 1 - 2; 0 - 1 + 3; -9 - 0 + 2) = (2; 2; -7).$$

Модуль вектора $\overline{d} = (d_x; d_y; d_z)$ находится по формуле

$$|\overline{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}.$$

Таким образом, $|\overline{d}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$.

Направляющие косинусы вектора $\overline{d}$ — это косинусы углов, которые образует этот вектор с положительными направлениями координатных осей O_x, O_y и O_z. Они вычисляются по формулам

$$\cos\,\alpha = \frac{d_x}{\left|\overline{d}\right|},\ \cos\,\beta = \frac{d_y}{\left|\overline{d}\right|},\ \cos\,\gamma = \frac{d_z}{\left|\overline{d}\right|}.$$

Тогда $\cos\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{58}}$, $\cos\,\beta = \frac{2}{\sqrt{58}}$, $\cos\,\gamma = -\frac{7}{\sqrt{58}}$.

3. Косинус угла BAC найдем как косинус угла между векторами $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AC}$ по формуле

$$\cos\,\angle BAC = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|},$$

где $\overline{a} \cdot \overline{b}$ — скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|$ — произведение длин векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Скалярное произведение векторов $\overline{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ и $\overline{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ находится по формуле

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Тогда

$$\cos\,\angle BAC = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Получим

$$\cos\,\angle BAC = \frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2}\,\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{10}\,\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{20}} = -\frac{\sqrt{20}}{20}.$$

4. Площадь треугольника ABC вычислим по формуле

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|,$$

где $\overline{a} \times \overline{b}$ — векторное произведение векторов $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AC}$.

Векторное произведение векторов $\overline{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ и $\overline{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ находится по формуле

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Найдем векторное произведение векторов $\overline{a} = \overline{AB} = (1; 0; -3)$ и $\overline{b} = \overline{AC} = (-1; 1; 0)$:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \overline{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}.$$

Тогда

$$\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{19}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{19}}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

5. Объем пирамиды $ABCD$ находится по формуле

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|,$$

где $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ — смешанное произведение векторов $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$ и $\overline{c} = \overline{AD}$.

Смешанное произведение векторов $\overline{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$, $\overline{b} = (b_x;\, b_y;\, b_z)$ и $\overline{c} = (c_x; c_y; c_z)$ находится по формуле

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Найдем смешанное произведение векторов $\overline{a} = \overline{AB} = (1; 0; -3)$, $\overline{b} = \overline{AC} = (-1; 1; 0)$ и $\overline{c} = \overline{AD} = (-2; 3; 2)$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5.$$

Тогда

$$V_{ABCD} = \frac{5}{6} \text{ (куб. ед.).}$$

Повышенный уровень

Задание 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Убедитесь, что система имеет единственное решение, вычислив главный определитель системы, а затем решите ее методом Гаусса.

Решение

Вычислим главный определитель системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножаем первую строку последовательно на (-2), (-3) и снова на (-2) и складываем со второй, третьей и четвертой строками. Затем полученный определитель раскладываем по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & 8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -8 & 1 \\ -4 & -10 & 8 \\ -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (-10) \cdot 5 + (-8) \cdot 8 \cdot (-7) + (-4) \cdot (-4) \cdot 1 - 1 \cdot (-10) \cdot (-7) -$$

$$- 8 \cdot (-4) \cdot 0 - (-8) \cdot (-4) \cdot 5 = 448 + 16 - 70 - 160 = 234 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное решение, которое найдем с помощью метода Гаусса.

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Умножаем первую строку последовательно на (-2), (-3) и снова на (-2) и складываем со второй, третьей и четвертой строками, исключая переменную x_1 из всех строк, начиная со второй:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Поменяем местами второй и четвертый столбцы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -10 & -4 & -14 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & -20 \end{array}\right).$$

Умножаем вторую строку последовательно на (-8) и на (-5) и складываем с третьей и четвертой строками, исключая переменную x_4 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 54 & -4 & -62 \\ 0 & 0 & 36 & -7 & -50 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на $\frac{1}{54}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{27} & -\frac{31}{27} \\ 0 & 0 & 36 & -7 & -50 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на (-36) и прибавим к четвертой строке, исключая из нее переменную x_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{27} & -\frac{31}{27} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{26}{3} \end{array}\right).$$

Умножим четвертую строку на $-\frac{3}{13}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{27} & -\frac{31}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Получили матрицу ступенчатого вида. Ей соответствует система ступенчатого вида:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + 3x_3 + 2x_2 = 6, \\ x_4 - 8x_3 \qquad\qquad = 6, \\ x_3 - \dfrac{2}{27}x_2 = -\dfrac{31}{27}, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Используя обратный ход метода Гаусса, находим неизвестные:

$$x_2 = 2,$$

$$x_3 = -\frac{31}{27} + \frac{2}{27} \cdot 2 = -1,$$

$$x_4 = 6 + 8 \cdot (-1) = -2,$$

$$x_1 = 6 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 6 - 4 + 3 - 4 = 1.$$

Итак, решение системы (1, 2, –1, –2).

Ответ: (1, 2, –1, –2).

1.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №1 «Линейные операции над векторами и их свойства»

Ответьте на вопросы:

1. Какие линейные операции выполняются над векторами?
2. Какими свойствами они обладают?

3 Как выполняются линейные операции над векторами в координатной форме?

Решите задачи:

№1. Изобразите два произвольных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, найдите векторы $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$; $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$; $2\bar{a}$; $-\frac{1}{2}\bar{b}$.

№2. Даны векторы $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k}$ и $\bar{b} = 6\bar{i} - 8\bar{j} + \bar{k}$. Найдите координаты вектора $\bar{c} = 5\bar{a} - 2\bar{b}$.

Учебно-исследовательская работа № 1 «Применение линейной и векторной алгебры для решения профессионально направленных задач»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение линейной и векторной алгебры в профессиональной деятельности.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Контрольная работа №1 «Аналитическая геометрия на плоскости»

Базовый уровень

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC (табл. 5). Найти:

1) длину стороны AB;
2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол A;
4) уравнение высоты CD и ее длину;
5) длину медианы AE;
6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;
7) точку пересечения медиан;
8) уравнение прямой, проходящей через точку A, параллельно высоте CD.

Таблица 5. Исходные данные

Номер варианта	A	B	C
1	$(-3;-2)$	$(0;10)$	$(6;2)$
2	$(1;1)$	$(4;13)$	$(10;5)$
3	$(0;3)$	$(3;15)$	$(9;7)$
4	$(-2;0)$	$(1;12)$	$(7;4)$
5	$(2;-1)$	$(5;11)$	$(11;3)$
6	$(3;-3)$	$(6;9)$	$(12;1)$
7	$(-1;2)$	$(2;14)$	$(8;6)$
8	$(5;-4)$	$(8;8)$	$(14;0)$
9	$(-4;5)$	$(-1;17)$	$(5;9)$
10	$(4;4)$	$(7;16)$	$(13;8)$
11	$(-4;2)$	$(4;-4)$	$(6;5)$
12	$(-2;1)$	$(6;-5)$	$(8;4)$
13	$(-3;-3)$	$(5;-9)$	$(7;0)$
14	$(2;2)$	$(10;-4)$	$(12;5)$
15	$(4;-1)$	$(12;-7)$	$(14;2)$
16	$(-6;-2)$	$(2;-8)$	$(4;1)$
17	$(1;2)$	$(13;-7)$	$(11;7)$
18	$(-7;-1)$	$(-5;-10)$	$(3;4)$
19	$(-5;0)$	$(7;9)$	$(5;-5)$
20	$(-7;2)$	$(5;11)$	$(3;-3)$

Задание 2. Дано уравнение эллипса (табл. 6). Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Таблица 6. Исходные данные

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$4x^2 + y^2 = 16$	11	$64x^2 + y^2 = 64$
2	$9x^2 + 4y^2 = 36$	12	$9x^2 + 16y^2 = 144$
3	$4x^2 + y^2 = 36$	13	$25x^2 + 16y^2 = 400$
4	$9x^2 + y^2 = 9$	14	$16x^2 + 25y^2 = 400$
5	$x^2 + 9y^2 = 9$	15	$x^2 + 16y^2 = 16$
6	$x^2 + 4y^2 = 16$	16	$16x^2 + 9y^2 = 144$
7	$16x^2 + y^2 = 16$	17	$4x^2 + 3y^2 = 36$
8	$3x^2 + 4y^2 = 36$	18	$25x^2 + 9y^2 = 225$
9	$x^2 + 9y^2 = 36$	19	$9x^2 + 49y^2 = 441$
10	$9x^2 + y^2 = 36$	20	$49x^2 + 9y^2 = 441$

Задание 3. Даны действительная полуось a и эксцентриситет ε гиперболы (табл. 7). Построить гиперболу и найти координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот гиперболы.

Таблица 7. Исходные данные

Номер варианта	α	ε	Номер варианта	α	ε
1	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	11	8	$\sqrt{2}$
2	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	12	$6\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$
3	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	13	$5\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$
4	$\sqrt{5}$	$3\sqrt{2}$	14	$4\sqrt{7}$	$3\sqrt{7}$
5	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	15	$3\sqrt{7}$	$4\sqrt{7}$
6	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	16	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$
7	$4\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	17	$3\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$
8	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$	18	$4\sqrt{6}$	2
9	$2\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	19	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$
10	7	$\sqrt{3}$	20	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$

Задание 4. Дано уравнение параболы (табл.8). Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.

Таблица 8. Исходные данные

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$y^2 = -10x$	11	$y^2 = -5x$
2	$x^2 = 10y$	12	$x^2 = -5y$
3	$y^2 = 9x$	13	$y^2 = 3x$
4	$x^2 = -9y$	14	$x^2 = 4y$
5	$y^2 = -8x$	15	$y^2 = -3x$
6	$x^2 = 8y$	16	$x^2 = 3y$
7	$y^2 = 7x$	17	$y^2 = 2x$
8	$x^2 = -7y$	18	$x^2 = -2y$
9	$y^2 = -6x$	19	$y^2 = -11x$
10	$x^2 = 6y$	20	$x^2 = 11y$

Повышенный уровень

Задание 5. Через фокус параболы (табл. 8) проведена прямая под углом 135° к оси Ox. Найти длину образовавшейся хорды.

Задание 6. Доказать оптическое свойство параболы: луч света, исходящий из фокуса параболы, отразившись от нее, идет по прямой, параллельной оси этой параболы.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-2;4)$, $B(6;-2)$, $C(8;7)$.

Найти:

1) длину стороны AB;
2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол A;
4) уравнение высоты CD и ее длину;
5) длину медианы AE;
6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;
7) точку пересечения медиан;

8) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно высоте CD.

Решение

1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяем по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Подставляя в нее координаты точек $A(-2; 4)$ и $B(6; -2)$, найдем длину стороны AB:

$$AB = \sqrt{(6-(-2))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10\,.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,.$$

Подставив в него координаты точек $A(-2; 4)$ и $B(6; -2)$, получим уравнение прямой AB:

$$\frac{y-4}{-2-4} = \frac{x-(-2)}{6-(-2)},$$

$$\frac{y-4}{-6} = \frac{x+2}{8}\,,$$

$$8(y-4) = -6(x+2),$$

$$4(y-4) - 3(x+2),$$

$$4y - 16 = -3x - 6\,,$$

$$3x + 4y - 10 = 0\,.$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой AB разрешим уравнение этой прямой относительно y, то есть запишем в виде $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент:

$$3x + 4y - 10 = 0\,,$$

$$4y = -3x + 10\,,$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\,.$$

Отсюда определяем угловой коэффициент прямой AB: $k_{AB} = -\dfrac{3}{4}$.

Аналогично по двум точкам $A(-2; 4)$ и $C(8; 7)$ составим уравнение прямой AC:

$$\frac{y-4}{7-4}=\frac{x-(-2)}{8-(-2)},$$
$$\frac{y-4}{3}=\frac{x+2}{10},$$
$$10(y-4)=3(x+2),$$
$$10y-40=3x+6,$$
$$3x-10y+46=0.$$

Найдем угловой коэффициент k_{AC} прямой AC:

$$10y=3x+46,$$
$$y=\frac{3}{10}x+\frac{23}{5},$$
$$k_{AC}=\frac{3}{10}.$$

3. Угол φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Искомый внутренний угол A образован прямыми AB и AC, угловые коэффициенты которых $k_{AB}=-\frac{3}{4}$, $k_{AC}=\frac{3}{10}$. Отмечая на рисунке треугольника ABC в системе координат направление угла A против хода часовой стрелки, определяем порядок прямых: AB — первая, AC — вторая. Следовательно $k_1=k_{AB}=-\frac{3}{4}$, $k_2=k_{AC}=\frac{3}{10}$.

Подставляем угловые коэффициенты в формулу угла между прямыми:

$$\operatorname{tg}A=\frac{\frac{3}{10}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{10}}=\frac{\frac{6+15}{20}}{1-\frac{9}{40}}=\frac{\frac{21}{20}}{\frac{31}{40}}=\frac{21\cdot 40}{20\cdot 31}=\frac{42}{31}.$$

Тогда $\angle A=\operatorname{arctg}\frac{42}{31}$.

4. Высота CD перпендикулярна стороне AB, поэтому угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, то есть $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ в заданном угловым коэффициентом k направлении, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Для составления уравнения высоты CD подставим в эту формулу координаты точки $C(8; 7)$ и угловой коэффициент $k_{CD} = \frac{4}{3}$:

$$y - 7 = \frac{4}{3}(x - 8),$$

$$3(y - 7) = 4(x - 8),$$

$$3y - 21 = 4x - 32,$$

$$4x - 3y - 11 = 0.$$

Найдем длину высоты CD, то есть расстояние от точки C до прямой AB. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $C(8; 7)$ и коэффициенты из уравнения прямой AB: $3x + 4y - 10 = 0$.

Тогда $CD = \dfrac{|3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{42}{\sqrt{25}} = \dfrac{42}{5} = 8{,}4$.

5. Точка E — середина отрезка BC. Для определения ее координат применим формулы деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Подставляем в них координаты точек $B(6; -2)$ и $C(8; 7)$:

$$x_E = \frac{6 + 8}{2} = 7, \quad y_E = \frac{-2 + 7}{2} = \frac{5}{2}.$$

То есть $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$.

Найдем длину медианы AE, то есть расстояние между точками $A(-2; 4)$ и $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$:

$$AE = \sqrt{(7 - (-2))^2 + \left(\frac{5}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{9^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{81 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{333}{4}} = \frac{3\sqrt{37}}{2}.$$

6. Точка D — точка пересечения прямых AB и CD. Чтобы найти ее координаты, решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} 3x+4y-10=0, \\ 4x-3y-11=0. \end{cases}$$

Применим правило Крамера:

$$\begin{cases} 3x+4y=10, \\ 4x-3y=11, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)-4\cdot 4 = -9-16 = -25,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 11 & -3 \end{vmatrix} = 10\cdot(-3)-4\cdot 11 = -30-44 = -74,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 3\cdot 11-10\cdot 4 = 33-40 = -7,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{74}{25}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{25}.$$

Итак, $D\left(\frac{74}{25}; \frac{7}{25}\right)$.

Найдем координаты центра окружности, то есть середину отрезка CD, где $C(8; 7)$, $D\left(\frac{74}{25}; \frac{7}{25}\right)$:

$$x = \frac{8+\frac{74}{25}}{2} = \frac{274}{50} = \frac{137}{25}, \qquad y = \frac{7+\frac{7}{25}}{2} = \frac{182}{50} = \frac{91}{25}.$$

Итак, $M\left(\frac{137}{25}; \frac{91}{25}\right)$ — центр окружности.

Радиус окружности R равен половине длины отрезка CD:

$$R = \frac{CD}{2} = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}.$$

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

где $(a; b)$ — координаты центра окружности; R — ее радиус.

Подставив в него координаты точки $M\left(\frac{137}{25}; \frac{91}{25}\right)$ и $R = \frac{21}{5}$, получим уравнение окружности, для которой CD является диаметром:

$$\left(x-\frac{137}{25}\right)^2 + \left(y-\frac{91}{25}\right)^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{137}{25}\right)^2+\left(y-\frac{91}{25}\right)^2=\frac{441}{25}.$$

7. Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2:1$, начиная от вершины. Найдем координаты точки N, делящей медиану AE в отношении $\lambda=\frac{AN}{NE}=\frac{2}{1}=2$. Используем формулы деления отрезка в данном отношении:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Подставим в них координаты точек $A(-2;4)$, $E\left(7;\frac{5}{2}\right)$ и $\lambda=2$:

$$x_N=\frac{-2+2\cdot 7}{1+2}=4, \qquad y_N=\frac{4+2\cdot\frac{5}{2}}{1+2}=3.$$

Итак, $N(4;3)$ — точка пересечения медиан.

8. Составим уравнение прямой l, проходящей через точку A, параллельно высоте CD. Из условия параллельности прямых l и CD следует, что их угловые коэффициенты равны, то есть $k_l=k_{CD}=\frac{4}{3}$. Подставляя в формулу $y-y_1=k(x-x_1)$ координаты точки $A(-2;4)$ и $k_l=\frac{4}{3}$, получим уравнение прямой l:

$$y-4=\frac{4}{3}(x-(-2)),$$

$$3y-12=4x+8,$$

$$4x-3y+20=0.$$

При пересечении данных прямых получается треугольник ABC (рис. 1).

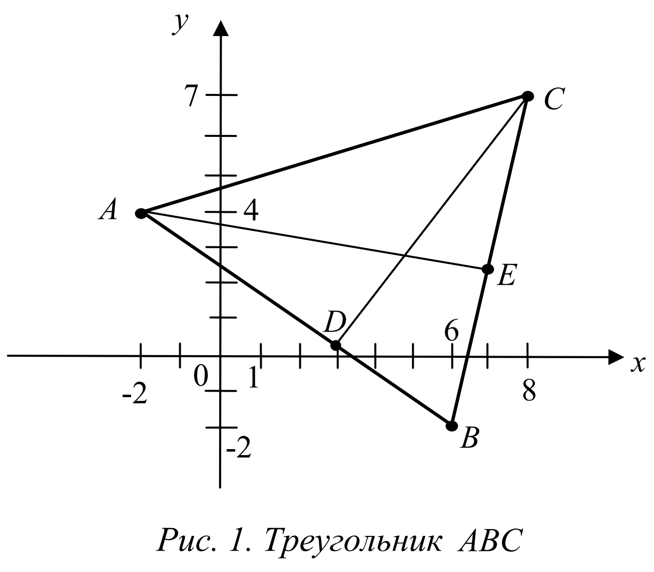

Рис. 1. Треугольник ABC

Задание 2. Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Решение

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1.$$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ — каноническое уравнение эллипса.

Так как $a^2 = 9$, то $a = 3$ — большая полуось, $b^2 = 4$, $b = 2$ — малая полуось.

$A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$ — вершины эллипса.

Найдем c — расстояние от центра эллипса до каждого фокуса по формуле связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим $c^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$.

Тогда $F_1\left(-\sqrt{5}; 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5}; 0\right)$ — фокусы эллипса.

Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$, получим $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

По полученным данным можно построить эллипс (рис. 2).

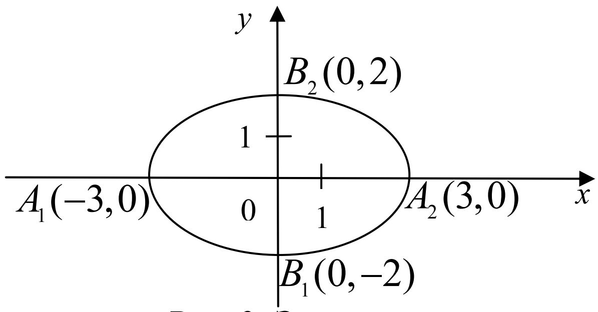

Рис. 2. Эллипс

Задание 3. Даны действительная полуось $a = 2\sqrt{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{3}$ гиперболы. Построить гиперболу и найти координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот гиперболы.

Решение

$A_1\left(-2\sqrt{3}; 0\right)$, $A_2\left(2\sqrt{3}; 0\right)$ — вершины гиперболы.

Из формулы для нахождения эксцентриситета гиперболы $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ найдем значение c — расстояние от центра гиперболы до каждого фокуса:

$$c = \varepsilon a = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Тогда $F_1(-6; 0)$, $F_2(6; 0)$ — фокусы гиперболы.

Из формулы связи $c^2 = a^2 + b^2$ найдем мнимую полуось b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 36 - 12 = 24,$$

$$b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Составим каноническое уравнение гиперболы, которое имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Получим $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{24} = 1$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm \dfrac{b}{a} x$. Подставив $a = 2\sqrt{3}$, и $b = 2\sqrt{6}$, получим $y = \pm \dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} x$.

После преобразований имеем: $y = \pm\sqrt{2}x$ — уравнения асимптот данной гиперболы.

Построим гиперболу (рис. 3).

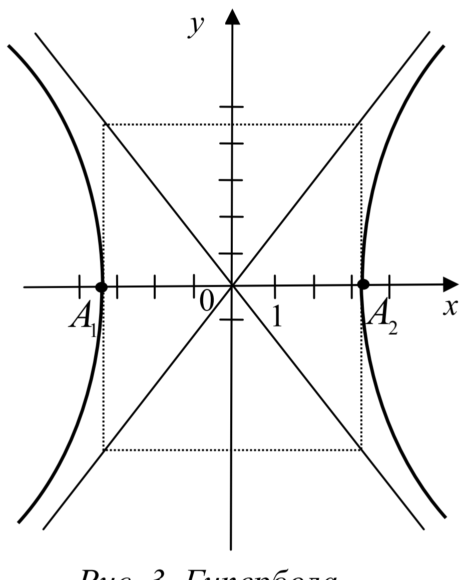

Рис. 3. Гипербола

Задание 4. Дано уравнение параболы $y^2 = 4x$. Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.

Решение

$y^2 = 4x$ — уравнение параболы, с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox, с ветвями, идущими вправо.

$y^2 = 2px$ — общий вид уравнения такой параболы, где p — расстояние между фокусом и директрисой.

Из уравнения находим: $2p = 4$, откуда $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$.

Директрисой параболы $y^2 = 2px$ является прямая, параллельная оси Oy, с уравнением $x = -\frac{p}{2}$, а фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Таким образом, для данной параболы директрисой служит прямая $x = -1$, а точка $F(1; 0)$ — фокусом.

По данным исследования построим параболу (рис. 4).

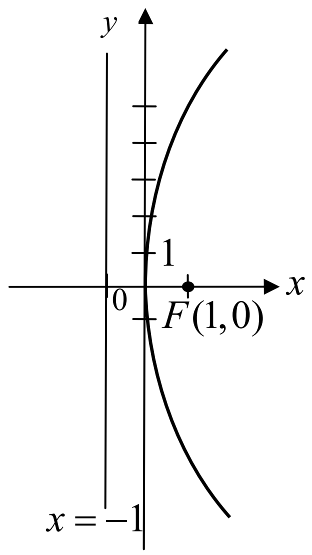

Рис. 4. Парабола

2.2. Индивидуальное домашнее задание №2 «Аналитическая геометрия в пространстве»

Базовый уровень

Задание 1. Даны координаты точек A, B, C, D (табл. 9).

Требуется:

1) написать уравнение плоскости ABC;

2) написать уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

3) написать канонические и параметрические уравнения прямой AB;

4) написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;

5) найти расстояние от точки D до плоскости ABC.

Таблица 9. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Координаты точек			
	A	B	C	D
1	2	3	4	5
1	$(3;-1;2)$	$(4;-1;-1)$	$(2;0;2)$	$(1;2;4)$
2	$(2;-1;2)$	$(3;-1;-1)$	$(1;0;2)$	$(0;2;4)$
3	$(3;0;2)$	$(4;0;-1)$	$(2;1;2)$	$(1;3;4)$
4	$(2;-1;3)$	$(3;-1;0)$	$(1;0;3)$	$(0;2;5)$
5	$(3;1;2)$	$(4;1;-1)$	$(2;2;2)$	$(1;4;4)$
6	$(2;1;2)$	$(3;1;-1)$	$(1;2;2)$	$(0;4;4)$
7	$(1;1;2)$	$(2;1;-1)$	$(0;2;2)$	$(-1;4;4)$
8	$(0;1;2)$	$(1;1;-1)$	$(-1;2;2)$	$(-2;4;4)$
9	$(0;2;2)$	$(1;2;-1)$	$(-1;3;2)$	$(-2;5;4)$
10	$(0;2;1)$	$(1;2;-2)$	$(-1;3;1)$	$(-2;5;3)$
11	$(2;1;0)$	$(5;3;1)$	$(0;1;2)$	$(4;3;1)$
12	$(1;1;0)$	$(2;3;1)$	$(1;-1;2)$	$(3;2;1)$
13	$(1;1;0)$	$(3;4;5)$	$(2;3;1)$	$(4;5;1)$
14	$(2;-1;0)$	$(-1;3;4)$	$(1;1;1)$	$(0;3;5)$
15	$(3;-1;2)$	$(7;9;1)$	$(5;1;2)$	$(1;2;0)$
16	$(2;4;-3)$	$(3;5;-4)$	$(4;5;-1)$	$(3;4;0)$
17	$(1;3;-1)$	$(2;0;7)$	$(-2;0;7)$	$(5;5;2)$

Номер варианта	Координаты точек			
	A	B	C	D
1	2	3	4	5
18	$(1;-1;1)$	$(4;1;2)$	$(2;0;1)$	$(5;2;8)$
19	$(1;4;-2)$	$(-2;5;0)$	$(3;4;0)$	$(2;5;-1)$
20	$(2;-1;1)$	$(4;-4;1)$	$(1;0;1)$	$(3;4;6)$

Повышенный уровень

Задание 2. Найти проекцию точки A на плоскость BCD (табл. 9).

Задание 3. Найти кратчайшее расстояние от точки A (табл. 9) до сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Даны координаты точек $A(4;1;-5)$, $B(-2;3;-4)$, $C(-2;1;3)$, $D(0;-1;2)$.

Требуется:

1) написать уравнение плоскости ABC;

2) написать уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

3) написать канонические и параметрические уравнения прямой AB;

4) написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;

5) найти расстояние от точки D до плоскости ABC.

Решение

1. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим в него координаты точек $A(4;1;-5)$, $B(-2;3;-4)$, $C(-2;1;3)$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+5 \\ -2-4 & 3-1 & -4+5 \\ -2-4 & 1-1 & 3+5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+5 \\ -6 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-4)\cdot 2\cdot 8+(y-1)\cdot 1\cdot(-6)+(z+5)\cdot(-6)\cdot 0-$$

$$-(z+5)\cdot 2\cdot(-6)-(x-4)\cdot 1\cdot 0-(y-1)\cdot(-6)\cdot 8=0,$$

$$16x-64-6y+6+12z+60+48y-48=0,$$

$$16x+42y+12z+46=0,$$

$$8x+21y+6z+23=0.$$

Таким образом, $8x+21y+6z+23=0$ — уравнение плоскости ABC.

2. Для составления уравнения плоскости α, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC, найдем координаты ее нормального вектора, в качестве которого можно взять нормальный вектор плоскости ABC в силу их параллельности.

Если общее уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, то ее нормальный вектор имеет координаты $\overline{n}=(A;B;C)$.

Для плоскости ABC с уравнением $8x+21y+6z+23=0$ нормальным вектором является вектор $\overline{n}=(8;21;6)$. Он же служит и нормальным вектором для плоскости α.

Если плоскость проходит через точку $M(x_1;y_1;z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\overline{n}=(A;B;C)$, то ее уравнение имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Подставим в него координаты точки $D(0;-1;2)$ и нормального вектора $\overline{n}=(8;21;6)$:

$$8(x-0)+21(y-(-1))+6(z-2)=0,$$

$$8x+21y+21+6z-12=0,$$

$$8x+21y+6z+9=0.$$

Таким образом, $8x+21y+6z+9=0$ — уравнение плоскости α, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC.

3. Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставив в них координаты точек $A(4;1;-5)$ и $B(-2;3;-4)$, получим канонические уравнения прямой AB:

$$\frac{x-4}{-2-4}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-(-5)}{-4-(-5)},$$

$$\frac{x-4}{-6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{1}.$$

От канонических уравнений прямой AB, введя параметр t, перейдем к ее параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-4}{-6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{1}=t,$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{-6}=t,\\ \dfrac{y-1}{2}=t,\\ \dfrac{z+5}{1}=t;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-6t+4,\\ y=2t+1,\\ z=t-5.\end{cases}$$

4. Составим канонические уравнения прямой l, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC. В качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять нормальный вектор перпендикулярной ей плоскости ABC, то есть $\bar{s}=\bar{n}=(8;21;6)$.

Если прямая проходит через точку $M(x_1;y_1;z_1)$ параллельно направляющему вектору $\bar{s}=(m;n;p)$, то ее канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Подставив в них координаты точки $D(0;-1;2)$ и направляющего вектора $\bar{s}=(8;21;6)$, получим канонические уравнения прямой l, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC:

$$\frac{x-0}{8}=\frac{y-(-1)}{21}=\frac{z-2}{6},$$

$$\frac{x}{8}=\frac{y+1}{21}=\frac{z-2}{6}.$$

5. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ находим по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $D(0; -1; 2)$ и коэффициенты из уравнения плоскости ABC $8x + 21y + 6z + 23 = 0$:

$$d = \frac{|8 \cdot 0 + 21 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 23|}{\sqrt{8^2 + 21^2 + 6^2}} = \frac{14}{\sqrt{541}} = \frac{14\sqrt{541}}{541} \approx 0{,}6.$$

Таким образом, расстояние от точки D до плоскости ABC равно $d = \dfrac{14\sqrt{541}}{541}$.

2.3. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №2 «Поверхности в пространстве»

Составьте таблицу «Поверхности в пространстве» (табл. 10):

Таблица 10 Поверхности в пространстве

№	Название поверхности	Уравнение	Рисунок
1	Эллиптический цилиндр		
2	Параболический цилиндр		
3	Гиперболический цилиндр		
4	Эллипсоид		
5	Сфера		
6	Однополостный гиперболоид		
7	Двухполостный гиперболоид		
8	Эллиптический параболоид		
9	Гиперболический параболоид		
10	Конус второго порядка		

Учебно-исследовательская работа № 2
«Применение аналитической геометрии для решения профессионально направленных задач»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение аналитической геометрии в профессиональной деятельности.

2-Й СЕМЕСТР

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Контрольная работа № 2 «Дифференцирование функций одной переменной»

Базовый уровень

Задание 1. Найти производные заданных функций (табл. 11).

Таблица 11. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4$ 2) $y=\dfrac{4x+7\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+9x^2}}$ 3) $y=\cos 3x\cdot e^{\sin x}$ 4) $y=\ln\operatorname{arctg}2x$	2	1) $y=(3x-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$ 2) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$ 3) $y=2^{3x}\operatorname{tg}2x$ 4) $y=\cos\ln 5x$
3	1) $y=(x^2-\dfrac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4$ 2) $y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$ 3) $y=e^{tgx}\ln 2x$ 4) $y=\cos\sqrt{x^2+3}$	4	1) $y=(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$ 3) $y=2^{8x}\operatorname{tg}3x$ 4) $y=\arcsin\ln 4x$
5	1) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\operatorname{tg}x}$ 3) $y=e^{ctgx}\cdot\sin 4x$ 4) $y=\sin\ln 5x$	6	1) $y=(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5)^2$ 2) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ 3) $y=3^{tgx}\arcsin(x^2)$ 4) $y=\ln\sin 6x$
7	1) $y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3$ 2) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}7x}{2-9x^2}$ 3) $y=e^{\operatorname{ctg}x}\cos 6x$ 4) $y=\sin\ln 2x$	8	1) $y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4$ 2) $y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$ 3) $y=4^{\cos x}\operatorname{arctg}2x$ 4) $y=\ln\cos 5x$

1	*2*	*3*	*4*
9	1) $y=(3x^5-\frac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\frac{\cos 6x}{\sin 3x}$ 3) $y=e^{x^3}\operatorname{tg}7x$ 4) $y=\arcsin\ln 2x$	10	1) $y=(x^4+2\sqrt[3]{x}+1)^2$ 2) $y=\frac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\operatorname{ctg}x}$ 3) $y=4^{5x}\operatorname{ctg}6x$ 4) $y=\ln\cos 7x$
11	1) $y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\frac{5x+7\cos x}{\sqrt{1+4x^2}}$ 3) $y=ctg6x\cdot e^{\cos 2x}$ 4) $y=\ln\arccos 3x$	12	1) $y=(2x-4\sqrt[4]{x^3}-6)^3$ 2) $y=\frac{\operatorname{arc}tg4x}{1-7x^3}$ 3) $y=4^{5x}\operatorname{ctg}6x$ 4) $y=\sin\ln 4x$
13	1) $y=(x^6-\frac{1}{x^4}+5\sqrt{x})^5$ 2) $y=\frac{\arccos 6x}{x^3+e^{2x}}$ 3) $y=e^{ctgx}\ln 6x$ 4) $y=\sin\sqrt{x^4+8}$	14	1) $y=(5x^5-\frac{7}{\sqrt{x}}+4)^4$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=7^{5x}\operatorname{ctg}2x$ 4) $y=\operatorname{arctg}\ln 6x$
15	1) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=e^{\cos 3x}\cdot\arcsin 4x$ 4) $y=\sin\ln 5x$	16	1) $y=(6x^2-\frac{2}{x^4}+5)^2$ 2) $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ 3) $y=3^{tgx}\arcsin(x^2)$ 4) $y=\ln\sin\frac{3x}{5}$
17	1) $y=(3x-3\sqrt[5]{x}+2)^6$ 2) $y=\frac{\sin 6x}{\cos\frac{x}{3}}$ 3) $y=2^{\sin x}\arcsin 2x$ 4) $y=\sin\ln 5x$	18	1) $y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\operatorname{tg}x}$ 3) $y=4^{\cos x}\operatorname{arctg}2x$ 4) $y=\cos\ln 5x$

1	2	3	4
19	1) $y=(3x^5-\frac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\frac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\mathrm{ctg}x}$ 3) $y=e^{ctgx}\cdot\sin 4x$ 4) $y=\arcsin\ln 4x$	20	1) $y=(3x-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=4^{5x}\mathrm{ctg}6x$ 4) $y=\sin\ln 2x$

Повышенный уровень

Задание 2. Найти производную неявной функции (табл. 12).

Таблица 12. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	$x^3y^3-2xy+3=0$	2	$x^2y^2-\cos x=0$
3	$\cos(xy)-2x=0$	4	$\frac{x}{y}+xy-2=0$
5	$5x^2y^2-7y+4x=0$	6	$x^3y^3-4xy^2+1=0$
7	$x^2+xy+y^2=3$	8	$x^2+y^2-xy=0$
9	$x^3+y^3-3xy=0$	10	$x^4+y^4=x^2y^2$
11	$y=1+x\cos y$	12	$y^3+e^{xy}=0$
13	$xy+e^y=0$	14	$x^2y^3-\sin y+3=0$
15	$\sin x+xy^2=0$	16	$x^3y^2-\cos y+4=0$
17	$\ln y+xy-5=0$	18	$x^2y^3+x\ln y=0$
19	$tgy-xy^2=0$	20	$\sin y-xy^2+4=0$

Задание 3. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции (табл. 13).

Таблица 13. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	2	3	4
1	$\begin{cases} x=4\sin 5t, \\ y=\cos 5t \end{cases}$	2	$\begin{cases} x=2\sin 3t, \\ y=5\cos 3t \end{cases}$

1	2	3	4
3	$\begin{cases} x = 2e^{3t} + 1, \\ y = e^{6t} - 4 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = 6e^{2t} + 7, \\ y = e^{2t} - 3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = t^3 - 4, \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = 2e^{3t} + 1 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = 9e^{7t} - 6 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 8t^3 - 9 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = 2\sin 3t + 1, \\ y = \cos 3t - 2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = 7\sin 5t - 3, \\ y = \cos 5t + 4 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 4\sin 2t - 1 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = \sin 5t, \\ y = -3\cos 5t + 7 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = e^{5t} + 2, \\ y = 2\ln t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = e^{-7t} - 4, \\ y = 6\ln t \end{cases}$
17	$\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + 8t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = t^4 - 5t, \\ y = 2t^2 + 3t^3 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x = \sqrt{t} - 2, \\ y = t^3 + 4 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 4\sqrt{t} + 1, \\ y = 2t^2 - 5 \end{cases}$

Задание 4. Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $s(t) = 4 + 8t - 5t^2$, где высота $s(t)$ измеряется в метрах, а время t – в секундах. Найти: а) скорость тела в начальный момент времени; б) скорость тела в момент соприкосновения с землей; в) наибольшую высоту подъема тела.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Найти производные заданных функций

1) $y = \left(x^4 - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 6 \right)^3$;

2) $y = \dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$;

3) $y = e^{ctgx} \arcsin\sqrt{x}$;

4) $y = 3^{\cos^2 x} + \mathrm{arctg}\, 5x$.

Решение

1) $y = \left(x^4 - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 6 \right)^3$ — сложная функция.

Применим формулы дифференцирования:

$$\left(u^3\right)' = 3u^2 u', \ \left(x^n\right)' = nx^{n-1},$$

а также формулы

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, \ \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Имеем

$$y' = 3\left(x^4 - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 6 \right)^2 \left(x^4 - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 6 \right)' =.$$

$$= 3\left(x^4 - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 6 \right)^2 \left(x^4 - 2x^{-3} + x^{\frac{2}{3}} - 6 \right)' =$$

$$= 3\left(x^4 - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 6 \right)^2 \left(4x^3 + 6x^{-4} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) =$$

$$= 3\left(x^4 - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 6 \right)^2 \left(4x^3 + \frac{6}{x^4} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right).$$

2) Для дифференцирования функции $y = \dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$ применим правило производной частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Получим

$$y' = \frac{\left(\cos\frac{x}{4}\right)' x^2 - \cos\frac{x}{4}\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-\sin\frac{x}{4}\left(\frac{1}{4}x\right)' - \cos\frac{x}{4}\cdot 2x}{x^4} =$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}-2x\cos\frac{x}{4}}{x^4}.$$

3) Для дифференцирования функции $y=e^{\operatorname{ctg}x}\arcsin\sqrt{x}$ применим правило производной произведения:

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Получим

$$y'=\left(e^{\operatorname{ctg}x}\right)'\arcsin\sqrt{x}+e^{\operatorname{ctg}x}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)'=$$

$$=e^{\operatorname{ctg}x}\left(\operatorname{ctg}x\right)'\arcsin\sqrt{x}+e^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\left(\sqrt{x}\right)'=$$

$$=e^{\operatorname{ctg}x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\arcsin\sqrt{x}+e^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=e^{\operatorname{ctg}x}\left(-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x}+\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)=$$

$$=e^{\operatorname{ctg}x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x}\right).$$

4) Для дифференцирования функции $y=3^{\cos^2 x}+\operatorname{arctg}5x$ применяем правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$y'=3^{\cos^2 x}\ln 3\left(\cos^2 x\right)'+\frac{1}{1+(5x)^2}(5x)'=$$

$$=3^{\cos^2 x}\ln 3\cdot 2\cos x\left(\cos x\right)'+\frac{1}{1+25x^2}5=$$

$$=3^{\cos^2 x}\ln 3\cdot 2\cos x\left(-\sin x\right)+\frac{5}{1+25x^2}=$$

$$=-3^{\cos^2 x}\ln 3\sin 2x+\frac{5}{1+25x^2}.$$

Повышенный уровень

Задание 2. Найти производную неявной функции $x^4+x^2y^3-\cos y=0$.

Решение

Дифференцируем по переменной x обе части равенства, рассматривая y, как функцию от x:

$$4x^3+\left(x^2\right)'\cdot y^3+x^2\cdot\left(y^3\right)'-\left(-\sin y\right)\cdot y'=0,$$

$$4x^3+2x\cdot y^3+x^2\cdot 3y^2y'+y'\cdot\sin y=0,$$

$$3x^2y^2y'+y'\cdot\sin y=-4x^3-2xy^3,$$

Выразим из полученного уравнения искомую производную y':

$$y'\left(3x^2y^2+\sin y\right)=-2x\left(2x^2+y^3\right),$$

$$y'=\frac{-2x\left(2x^2+y^3\right)}{3x^2y^2+\sin y}.$$

Задание 3. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции $\begin{cases}x=e^{-t}\cos t,\\ y=e^{t}\cos t.\end{cases}$

Решение

Производная параметрически заданной функции $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ находится по формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем y'_t:

$$y'_t=\left(e^{-t}\cos t\right)'=\left(e^{-t}\right)'\cos t+e^{-t}(\cos t)'=$$
$$=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}(\cos t+\sin t).$$

Найдем x'_t:

$$x'_t=\left(e^{t}\cos t\right)'=\left(e^{t}\right)'\cos t+e^{t}(\cos t)'=;$$
$$=e^{t}\cos t-e^{t}\sin t=e^{t}(\cos t-\sin t).$$

Тогда

$$y'_x=\frac{-e^{-t}(\cos t+\sin t)}{e^{t}(\cos t-\sin t)}=\frac{\cos t+\sin t}{e^{2t}(\sin t-\cos t)}.$$

3.2. Индивидуальное задание №3
«Исследование функций одной переменной и построение графиков»

Базовый уровень

Задание 1. Исследовать данную функцию $y = f(x)$ (табл. 14) методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Таблица 14. Исходные данные

№ варианта	$y = f(x)$
1	*2*
1	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
2	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
3	$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$
4	$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
5	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$
6	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
7	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$
8	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$
9	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$
10	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$
11	$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$

1	*2*
12	$y=2x^3+15x^2+36x+32$
13	$y=2x^3+15x^2+24x-2$
14	$y=x^3-9x^2+24x-18$
15	$y=x^3-3x^2-24x+26$
16	$y=x^3+3x^2-24x-21$
17	$y=x^3+9x^2+24x+17$
18	$y=2x^3+9x^2-24x-56$
19	$y=2x^3-9x^2-24x+61$
20	$y=2x^3-15x^2+24x+4$

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения данной функции $y=f(x)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$ (табл. 15).

Таблица 15. Исходные данные

№ варианта	$y=f(x)$	α	β
1	$y=2x^3-9x^2+12x-5$	–1	3
2	$y=x^3-6x^2+9x+1$	–1	2
3	$y=x^3-3x^2-9x+10$	2	4
4	$y=x^3+3x^2-9x-10$	–1	2
5	$y=x^3+6x^2+9x+2$	0	4
6	$y=2x^3-3x^2-12x+5$	–2	3
7	$y=2x^3+3x^2-12x-8$	–3	0
8	$y=2x^3+9x^2+12x+7$	–3	1
9	$y=2x^3-15x^2+36x-32$	1	4
10	$y=2x^3-3x^2-36x+20$	–1	4
11	$y=2x^3+3x^2-36x-21$	–4	1
12	$y=2x^3+15x^2+36x+32$	–4	0
13	$y=2x^3+15x^2+24x-2$	–5	0
14	$y=x^3-9x^2+24x-18$	0	3
15	$y=x^3-3x^2-24x+26$	–3	5
16	$y=x^3+3x^2-24x-21$	–5	3
17	$y=x^3+9x^2+24x+17$	–5	–1
18	$y=2x^3+9x^2-24x-56$	–5	2
19	$y=2x^3-9x^2-24x+61$	–2	3
20	$y=2x^3-15x^2+24x+4$	1	5

Задание 3. Исследовать данную функцию $y = f(x)$ методами дифференциального исчисления и построить ее график (табл. 16).

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Таблица 16. Исходные данные

№ варианта	$y = f(x)$	№ варианта	$y = f(x)$
1	$y = \frac{x^2+1}{x}$	2	$y = \frac{x^2+9}{x}$
3	$y = \frac{x^2}{x-1}$	4	$y = \frac{x^2+8}{x+1}$
5	$y = \frac{x^2-3}{x+2}$	6	$y = \frac{x^2+21}{x-2}$
7	$y = \frac{x^2-8}{x-3}$	8	$y = \frac{x^2+16}{x+3}$
9	$y = \frac{x^2+9}{x+4}$	10	$y = \frac{x^2-12}{x-4}$
11	$y = \frac{x^2+4}{x}$	12	$y = \frac{x^2+25}{x}$
13	$y = \frac{x^2+3}{x-1}$	14	$y = \frac{x^2+24}{x+1}$
15	$y = \frac{x^2+5}{x+2}$	16	$y = \frac{x^2+32}{x-2}$
17	$y = \frac{x^2-5}{x-3}$	18	$y = \frac{x^2+27}{x+3}$
19	$y = \frac{x^2-15}{x+4}$	20	$y = \frac{x^2-7}{x-4}$

Задание 4. Вычислить предел (табл. 17) по правилу Лопиталя.

Таблица 17. Исходные данные

№ варианта	Предел	№ варианта	Предел
1	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$	2	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tgx}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^{x^3+1}-e}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$
7	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\cdot\ln\cos 5x}$	10	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{tgx-tga}{\ln x-\ln a}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+tg^2x}{x\cdot\sin 3x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$
13	$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$
15	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln tgx}$	16	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$
19	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$

Повышенный уровень

Задание 5. Решить задачу (табл. 18).

Таблица 18. Исходные данные

№ варианта	Задача
1	*2*
1	Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием и вертикальной боковой поверхностью заданного объёма, $V = 25\ м^3\ (\approx 8\pi)$. Каковы, должны быть линейные размеры ямы (радиус R и высота H), чтобы на облицовку её дна и боковой поверхности пошло наименьшее количество материала?

1	*2*
2	Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), если на его изготовление имеется $S = 18{,}84\ м^2 \left(\approx 6\pi\right)$ материала?
3	В эллипс $\frac{x^2}{128} + \frac{y^2}{32} = 1$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти стороны этого прямоугольника, если они параллельны осям эллипса.
4	Требуется вырыть яму конической формы (воронку) с образующей $a = 3\ м$. При какой глубине объём воронки будет наибольшим?
5	Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак с заданным объёмом V. Каковы должны быть линейные размеры бака, чтобы его полная поверхность была наименьшей?
6	Проволокой длиной $20\ м$ требуется огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?
7	Среди цилиндров, полная поверхность которых равна, $S = 6\pi\ м^2$. Найти цилиндр, имеющий наибольший объём.
8	Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью $294\ м^2$ и разделить, затем этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?
9	Огород прямоугольной формы огорожен изгородью, длина которой $72\ м.$ Какова должна быть размеры огорода, чтобы его площадь была наибольшей?
10	Деталь из листового железа имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной $10\ см$. Каким должно быть основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?
11	Какое положительное число, будучи сложенным, с обратным ему числом, даёт наименьшую сумму?
12	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.
13	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
14	Найти прямоугольник наибольшей площади, если сумма длин его катета и гипотенузы постоянна и равна $4\ см.$
15	Из прямоугольного листа жести размером $24\ см \times 9\ см$ требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

1	*2*
16	Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь наибольшую площадь.
17	Требуется изготовить полотняный шатёр, имеющий форму прямого кругового конуса заданной вместимости, $V = \frac{9\pi}{2}\ м^3$. Каковы должны быть размеры конуса (высота и радиус основания), чтобы на шатёр ушло наименьшее количество полотна?
18	Требуется изготовить ящик с крышкой, объём которого был бы равен, $72\ см^3$, причём стороны основания, относились бы как $1:2$. Каковы, должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?
19	Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной $20 см.$ Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольший?
20	Открытый чан имеет форму цилиндра объёма, $V = 27\pi\ м^3$. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Область определения функции: $D(y) = R$.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения.

3. Исследуем функцию на четность:

$$y(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x)^2 - 3(-x) + 5 = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 5.$$

Так как $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, то есть это функция общего вида. Ее график не будет обладать симметрией относительно начала координат и оси Oy.

4. Найдем первую производную:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5\right)' = x^2 - 2x - 3.$$

Найдем критические точки функции. Приравняем производную к нулю и решим уравнение:

$$x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1},$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критические точки. Эти точки разбивают область определения на три интервала: $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$, $(3; +\infty)$. В полученных интервалах расставляем знак производной y' (рис. 5).

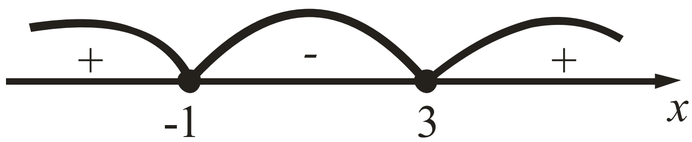

Рис. 5. Исследование на экстремум

Данная функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; 3)$.

$x = -1$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 5 = 6\frac{2}{3},$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 5 = -4 .$$

5. Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(x^2 - 2x - 3\right)'' = 2x - 2 .$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем производную y'' к нулю и решим уравнение:

$$2x - 2 = 0 ,$$
$$x = 1 .$$

Точек, в которых вторая производная y'' не существует, нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критическую точку второго рода. Область определения разбивается на два интервала: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис.6).

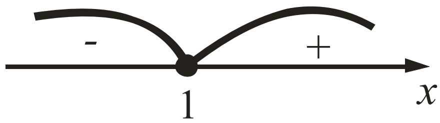

Рис. 6. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на интервале $(-\infty; 1)$ и вогнутый на интервале $(1; +\infty)$.

При переходе через критическую точку второго рода $x = 1$ вторая производная меняет знак, следовательно, $x = 1$ – абсцисса точки перегиба.

Вычислим значение функции в точке $x = 1$:

$$y(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 5 = 1\frac{1}{3} .$$

$y = 1\frac{1}{3}$ — ордината точки перегиба.

Итак, $\left(1; 1\frac{1}{3}\right)$ — точка перегиба.

6. Для нахождения точки пересечения графика функции с осью Oy подставим в уравнение функции значение $x = 0$. Тогда $y = 5$. Значит, график функции пересекает ось Oy в точке $(0; 5)$.

Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью Ox следует решить кубическое уравнение $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0$. Оно имеет не более трех решений. Следовательно, график функции пересекает ось Ox не более чем в трех точках.

7. По результатам исследования построим график функции (рис. 7).

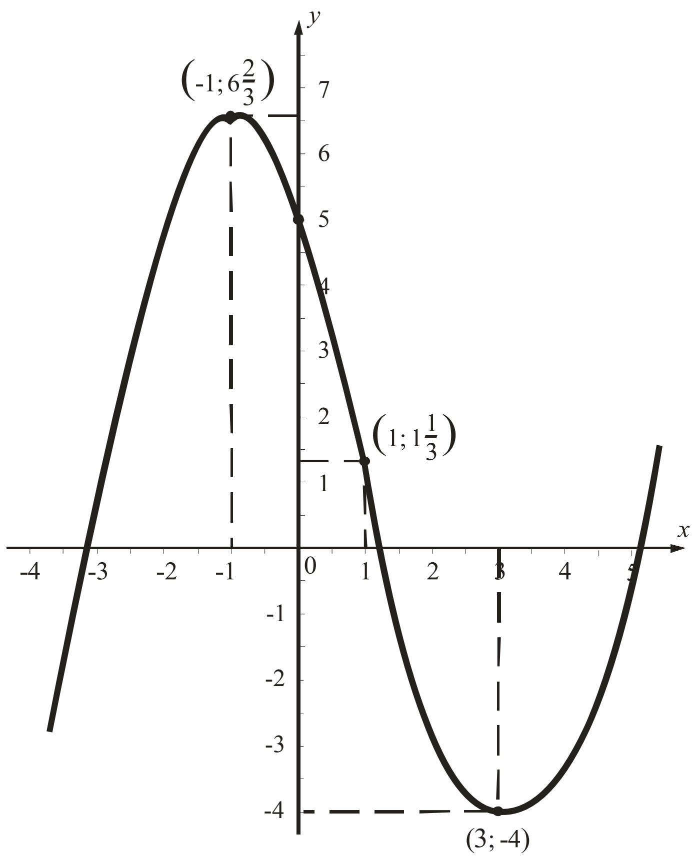

Рис. 7. График функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение

Найдем производную функции:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right).$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0,\ 4x\left(x^2 - 1\right) = 0,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$$

Все критические точки принадлежат отрезку $[-2; 3]$.

Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$y(0) = 5,$$

$$y(-1) = 4,$$

$$y(1) = 4,$$

$$y(-2)=12,$$

$$y(3)=68.$$

Итак, $y_{наиб}=y(3)=68$, $y_{наим}=y(-1)=y(1)=4$.

Ответ: $y_{наиб}=y(3)=68$, $y_{наим}=y(-1)=y(1)=4$.

Задание 3. Исследовать данную функцию $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению *x* ряд значений и вычисляя соответствующие значения *y*;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Найдем область определения функции: $D(y)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-6(-x)+13}{-x-3}=\frac{x^2+6x+13}{-x-3};$$

$$y(-x)\neq y(x),\ y(-x)\neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Исследуем функцию на непрерывность: $x=3$ — точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=-\infty,\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=+\infty.$$

Следовательно, $x=3$ — точка разрыва второго рода.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y' = \frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+13)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

Найдем критические точки:

$$y'=0\text{, если } x^2-6x+5=0\text{, откуда } x_1=1 \text{ и } x_2=5.$$

Производная не существует при $x=3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 8).

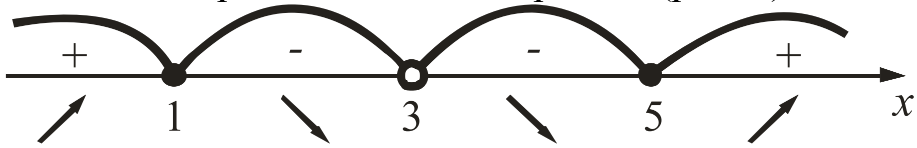

Рис. 8. Исследование на экстремум

Функция возрастает на $(-\infty;1)$ и на $(5;+\infty)$.

Функция убывает на $(1;3)$ и на $(3;5)$.

$x=1$ — точка максимума, $x=5$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(1) = -4,$$
$$y_{\min} = y(5) = 4.$$

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)' = \frac{(x^2-6x+5)'(x-3)^2-(x^2-6x+5)\left((x-3)^2\right)'}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2(x-3)\left((x-3)^2-x^2+6x-5\right)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2-6x+9-x^2+6x-5)2(x-3)}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем вторую производную y'' к нулю и решим уравнение $\dfrac{8}{(x-3)^3}=0$. Оно не имеет решений.

Вторая производная не существует при $x=3$, но данная точка не является точкой перегиба, так как является точкой разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

На числовую ось нанесем область определения функции. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис. 9).

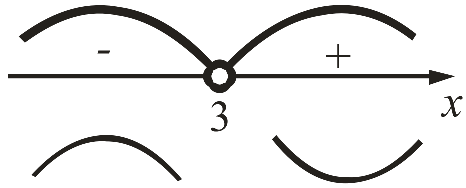

Рис. 9. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на $(-\infty; 3)$ и вогнутый на $(3; +\infty)$.

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как $x = 3$ — точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением $x = 3$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$. Найдем параметры k и b:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x(x-3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x^2 - 3x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{13}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 13 - x^2 + 3x}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x + 13}{x - 3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3 + \frac{13}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = -3.$$

Итак, $y = x - 3$ — уравнение наклонной асимптоты.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

При $x = 0$ получим $y = \frac{13}{-3} = -4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0; -4\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения с осью Oy.

При $y = 0$ получим $\frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = 0$, $x^2 - 6x + 13 = 0$;

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0.$$

Следовательно, точек пресечения с осью Ox нет.

8. По результатам исследования строим график функции (рис. 10).

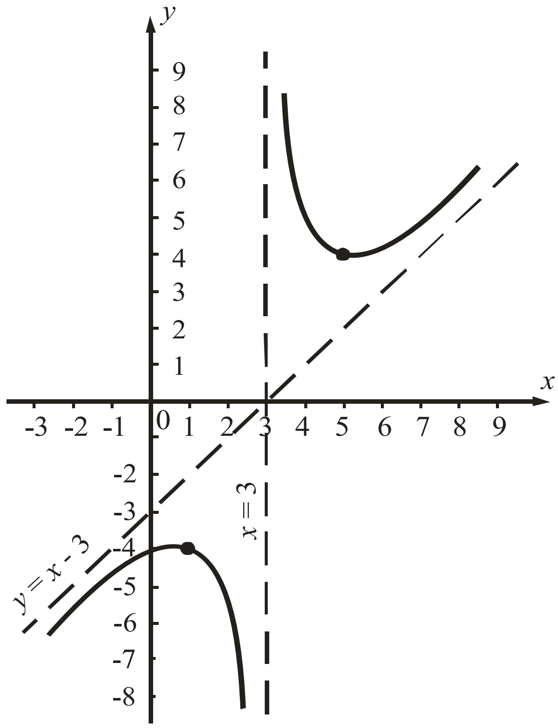

Рис. 10. График функции

Задание 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$ по правилу Лопиталя.

Решение

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{(1-2\cos x)'}{(\sin(\pi-3x))'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{-3\cos(\pi-3x)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Повышенный уровень

Задание 5. Определить размеры силосного сооружения, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, объемом 108 м^3, чтобы суммарная площадь поверхности дна и стенок была минимальной.

Решение

Пусть x (м) — сторона основания силосного сооружения, а y (м) — его глубина. Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x, y) = x^2 + 4xy.$$

Так как объем сооружения 108 м^3 и $V = x^2 y$, то $y = \dfrac{108}{x^2}$.

Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}, \text{ где } x > 0.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое значение x, при котором функция $S(x)$ принимает наименьшее значение.

Найдем производную:

$$S' = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0.$$

Решая это уравнение относительно x, получим $x = 6$.

На числовую ось нанесем область определения функции $S(x)$ и критическую точку $x = 6$. В полученных промежутках расставляем знак производной S' (рис. 11).

Рис. 11. Знаки производной

По достаточному условию экстремума в точке $x = 6$ функция $S(x)$ имеет минимум. Так как функция $S(x)$ непрерывна при $x > 0$ и имеет единственную точку экстремума $x = 6$ и это точка минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение, то есть $S_{наим} = S(6)$. Тогда глубина сооружения $y = \frac{108}{x^2} = \frac{108}{36} = 3$ (м).

Ответ: длина основания 6 м, глубина 3 м.

3.3. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №3 «Основные элементарные функции, их свойства и графики»

Заполните таблицу «Основные элементарные функции» (табл. 19).

Таблица 19. Основные элементарные функции

Обозначение функции	Область определения $D(y)$	Область значений $E(y)$	Четность, нечетность	Моно-тон-ность	Периодич-ность	График функции
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Степенная функция						
$y = x^n$ $n \in N$, n – четное						
$y = x^n$ $n \in N$, n – нечетное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n – четное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n – нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n – нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n – четное						
Показательная функция						
$y = a^x$ $0 < a < 1$						
$y = a^x$ $a > 1$						
Логарифмическая функция						
$y = \log_a x$ $0 < a < 1$						
$y = \log_a x$ $a > 1$						
Тригонометрические функции						
$y = \sin x$						
$y = \cos x$						
$y = \mathrm{tg} x$						
$y = \mathrm{ctg} x$						

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Обратные тригонометрические функции						
$y = \arcsin x$						
$y = \arccos x$						
$y = \mathrm{arctg} x$						
$y = \mathrm{arcctg} x$						

Учебно-исследовательская работа № 3 «Применение производных для решения профессионально направленных задач»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение производных в профессиональной деятельности.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1. Контрольная работа №3 «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

Базовый уровень

Задание 1. Дана функция $u(x, y)$. Проверить, удовлетворяет ли она заданному уравнению (табл. 20).

Таблица 20. Исходные данные

Номер варианта	Функция	Уравнение
1	*2*	*3*
1	$u = \dfrac{y}{x}$	$x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x dy} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
2	$u = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$	$x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
3	$u = x^y$	$y \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \dfrac{\partial u}{\partial x}$
4	$u = \dfrac{xy}{x + y}$	$x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$
5	$u = e^{xy}$	$x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
6	$u = \sin^2(x - 2y)$	$4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Номер варианта	Функция	Уравнение
1	*2*	*3*
7	$u=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
8	$u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y}$
9	$u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3\left(x^3-y^3\right)$
10	$u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$
11	$u=x\ln\frac{y}{x}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$
12	$u=\left(x^2+y^2\right)\operatorname{tg}\frac{x}{y}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$
13	$u=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
14	$u=\frac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$	$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2}$
15	$u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$
16	$u=\ln\left(x^2+y^2\right)$	$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$
17	$u=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$
18	$u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)$	$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
19	$u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
20	$u=\sqrt{2xy+y^2}$	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{u}$

Задание 2. Исследовать функцию $z = f(x, y)$ (табл. 21) на экстремум.

Таблица 21. Исходные данные

Номер варианта	$z = f(x, y)$
1	*2*
1	$z = (x-1)^2 + 2y^2$
2	$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$
3	$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
4	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$
5	$z = xy(6 - x - y)$
6	$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
7	$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
8	$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$
9	$z = 2xy - 4x - 2y$
10	$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$
11	$z = xy - x^2 - y^2 + 9$
12	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
13	$z = 3xy - x^2 - y^2 + 11$
14	$z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$
15	$z = (x-1)^2 - 2y^2$
16	$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
17	$z = x^3 + y^3 - 3xy$
18	$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$
18	$z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$
19	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
20	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

Повышенный уровень

Задание 3. Найти линии уровня функции $z = \sqrt{y - x^2}$.

Задание 4. Найти градиент функции $z = x\ln(x+y)$ и его модуль в точке $M(-1;2)$.

Задание 5. Поток пассажиров z выражается функцией $z = \frac{x^2}{y}$, где x – число жителей; y – расстояние между городами. Найти частные производные этой функции и пояснить их смысл.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Дана функция $u = \frac{y}{x}$. Проверить, удовлетворяет ли она уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x dy} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение

Находим частные производные первого порядка функции $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Находим частные производные второго порядка функции $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Подставляем частные производные в левую часть данного уравнения:

$$x^2 \cdot \frac{2y}{x^3} + 2xy\left(-\frac{1}{x^2}\right) + y^2 \cdot 0 = 0;$$

$$\frac{2y}{x} - \frac{2y}{x} = 0.$$

Поскольку левая часть равна правой, то функция $u = \frac{y}{x}$ удовлетворяет заданному уравнению.

Задание 2. Исследовать функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy + 5$ на экстремум.

Решение

1. Область определения функции: $D(z) = R^2$.
2. Частные производные первого порядка:

$$z'_x = 3x^2 - 3y;$$

$$z'_y = 3y^2 - 3x.$$

3. Найдем критические точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 - 1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Итак, $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$ — критические точки.

4. Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(3x^2 - 3y\right)'_x = 6x;$$

$$z''_{xy} = \left(3x^2 - 3y\right)'_y = -3;$$

$$z''_{yy} = \left(3y^2 - 3x\right)'_y = 6y.$$

5. Проверим выполнение достаточных условий экстремума в точке $M_1(0;0)$:

$$A = z''_{xx}(M_1) = 0,$$

$$B = z''_{xy}(M_1) = -3,$$

$$C = z''_{yy}(M_1) = 0,$$

$$\Delta = AC - B^2 = -3 < 0.$$

Следовательно, точка $M_1(0;0)$ не является точкой экстремума.

6. Проверим выполнение достаточных условий экстремума в точке $M_2(1;1)$:

$$A = z''_{xx}(M_2) = 6,$$

$$B = z''_{xy}(M_2) = -3,$$

$$C = z''_{yy}(M_2) = 6.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$, то точка $M_2(1;1)$ является точкой экстремума. Так как $A = 6 > 0$, то точка $M_2(1;1)$ — точка минимума.

7. Найдем экстремум функции.

$z(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 = 4$ — минимум функции.

Ответ: 4 — минимум функции.

4.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №4 «Касательная плоскость и нормаль к поверхности»

Ответьте на вопросы:

1. Сформулируйте определение нормали к поверхности и напишите уравнения нормали.
2. Сформулируйте определение касательной плоскости к поверхности и напишите уравнение касательной плоскости.

Решите задачи:

№1. Составьте уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M(1;2;-1)$ к поверхности, заданной уравнением $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$.

№2. Составьте уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M(2;1;4)$ к поверхности, заданной уравнением $z=2x^2-4y^2$.

Учебно-исследовательская работа №4
«Применение метода наименьших квадратов для решения профессионально направленных задач»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение метода наименьших квадратов в профессиональной деятельности.

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. Контрольная работа №4 «Неопределенный интеграл»

Базовый уровень

Задание 1. Найдите неопределенные интегралы. В пунктах 1) и 2) сделайте проверку дифференцированием (табл. 22):

Таблица 22. Исходные данные

№ варианта	Интегралы	№ варианта	Интегралы
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\cos x}\sin xdx$ 3) $\int\ln xdx$	2	1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2+x^4}dx$ 3) $\int(8x-2)\sin 5xdx$

1	*2*	*3*	*4*
3	1) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}$ 3) $\int(2x+1)\sin 3x dx$	4	1) $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$ 3) $\int(x-3)e^{-2x}dx$
5	1) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 3) $\int(x-1)e^{2x}dx$	6	1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ 3) $\int\sqrt{x}\ln 3x dx$
7	1) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ 3) $\int(5x+1)\ln x dx$	8	1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2x^4+5}dx$ 3) $\int x^3\ln x dx$
9	1) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^2}x dx$ 3) $\int x\cos 2x dx$	10	1) $\int\left(4-\frac{1}{x^3}-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ 3) $\int(2x+8)e^{-7x}dx$
11	1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2+x^4}dx$ 3) $\int\ln x dx$	12	1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx$ 3) $\int(8x-2)\sin 5x dx$
13	1) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}$ 3) $\int(x-3)e^{-2x}dx$	14	1) $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$ 3) $\int(2x+1)\sin 3x dx$

1	*2*	*3*	*4*
15	1) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2x^4+5}dx$ 3) $\int\sqrt{x}\ln 3xdx$	16	1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ 3) $\int x^3\ln xdx$
17	1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ 3) $\int(5x+1)\ln xdx$	18	1) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 3) $\int(x-1)e^{2x}dx$
19	1) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^2}xdx$ 3) $\int(2x+8)e^{-7x}dx$	20	1) $\int\left(4-\frac{1}{x^3}-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ 3) $\int x\cos 2xdx$

Повышенный уровень

Задание 2. Найдите неопределенные интегралы (табл. 23):

Таблица 23. Исходные данные

№ варианта	Интегралы	№ варианта	Интегралы
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $\int\frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$ 2) $\int\frac{x}{x^3+1}dx$ 3) $\int\cos^2 x\sin^3 xdx$	2	1) $\int\frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx$ 2) $\int\frac{x+20}{x^3-8}dx$ 3) $\int\cos^4 2xdx$
3	1) $\int\frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$ 2) $\int\frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$ 3) $\int\sin^3 5xdx$	4	1) $\int\frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx$ 2) $\int\frac{2x+5}{x^3+2x}dx$ 3) $\int\sin^2 x\cos^3 xdx$

1	*2*	*3*	*4*
5	1) $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx$ 2) $\int \frac{3x-1}{x^3+3x}dx$ 3) $\int \sin^4 3x dx$	6	1) $\int \frac{3x+7}{x^2+8x+17}dx$ 2) $\int \frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}dx$ 3) $\int \cos^3 2x dx$
7	1) $\int \frac{8x-3}{x^2+6x+10}dx$ 2) $\int \frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx$ 3) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$	8	1) $\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5}dx$ 2) $\int \frac{5x-11}{x(x^2+4)}dx$ 3) $\int \cos^3 x \sin^3 x dx$
9	1) $\int \frac{7x+3}{x^2-4x+5}dx$ 2) $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2+3)}dx$ 3) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$	10	1) $\int \frac{7x-3}{x^2+6x+13}dx$ 2) $\int \frac{2x}{x^3-1}dx$ 3) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$
11	1) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$ 2) $\int \frac{x}{x^3+1}dx$ 3) $\int \sin^3 5x dx$	12	1) $\int \frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx$ 2) $\int \frac{2x+5}{x^3+2x}dx$ 3) $\int \cos^4 2x dx$
13	1) $\int \frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$ 2) $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$ 3) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$	14	1) $\int \frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx$ 2) $\int \frac{x+20}{x^3-8}dx$ 3) $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$
15	1) $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx$ 2) $\int \frac{3x-1}{x^3+3x}dx$ 3) $\int \sin^4 3x dx$	16	1) $\int \frac{3x+7}{x^2+8x+17}dx$ 2) $\int \frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}dx$ 3) $\int \cos^3 2x dx$

1	2	3	4
17	1) $\int\frac{7x-3}{x^2+6x+13}dx$ 2) $\int\frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx$ 3) $\int\cos^2 x\sin^2 xdx$	18	1) $\int\frac{5x-2}{x^2-2x+5}dx$ 2) $\int\frac{5x-11}{x(x^2+4)}dx$ 3) $\int\cos^3 x\sin^3 xdx$
19	1) $\int\frac{7x+3}{x^2-4x+5}dx$ 2) $\int\frac{3x}{(x+1)(x^2+3)}dx$ 3) $\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos^2 x}$	20	1) $\int\frac{8x-3}{x^2+6x+10}dx$ 2) $\int\frac{2x}{x^3-1}dx$ 3) $\int\frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}$

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

2) $\int e^{x^5}x^4dx$;

3) $\int(4x+1)\sin 3xdx$;

Решение

1) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

Применим формулу интегрирования $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=4\int x^{-2}dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{3}}dx+6\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+6\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=-\frac{4}{x}-\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16}+9\sqrt[3]{x^2}+C.$$

2) $\int e^{x^5} x^4 dx$.

Применим способ замены переменной:

$$\int e^{x^5} x^4 dx = \left[\begin{array}{l} u = x^5, \\ du = 5x^4 dx, \\ x^4 dx = \frac{1}{5} du \end{array}\right] = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{x^5} + C.$$

3) $\int (4x+1)\sin 3x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\int (4x+1)\sin 3x dx = \left[\begin{array}{ll} u = 4x+1, & du = 4dx \\ dv = \sin 3x dx, & v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C =$$

$$-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{9}\sin 3x + C.$$

(Проверку дифференцированием выполните самостоятельно.)

Повышенный уровень

Задание 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13} dx$;

2) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$.

Решение

1) $\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13} dx$.

Подынтегральная функция является простейшей рациональной дробью третьего типа. В ее знаменателе выделим полный квадрат и сделаем замену переменных:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 13 = \\ = x^2 - 6x + 9 + 4 = \\ = (x-3)^2 + 4, \\ x - 3 = t, \\ x = t+3, dx = dt \end{array}\right] =$$

$$=\int\frac{2(t+3)-2}{t^2+4}dt=\int\frac{2t+4}{t^2+4}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+4}+$$

$$+4\int\frac{dt}{4+t^2}=\int\frac{d(t^2+4)}{t^2+4}+4\int\frac{dt}{t^2+2^2}=$$

$$=\ln\left|t^2+4\right|+4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\ln\left|x^2-6x+13\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$$

2) $\int\cos^3 x\sin^4 xdx$.

Применим основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Получим:

$$\int\cos^3 x\sin^4 xdx=\int\cos^2 x\cos x\sin^4 xdx=\int\left(1-\sin^2 x\right)\sin^4 x\cos xdx=$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\sin x, \\ dt=\cos xdx \end{array}\right]$$

$$=\int\left(1-t^2\right)t^4dt=\int\left(t^4-t^6\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C.$$

5.2. Индивидуальное домашнее задание №4 «Определенный интеграл и его применение»

Базовый уровень

Задание 1. Вычислить определенный интеграл (табл. 24):

Таблица 24. Исходные данные

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	*2*	*3*	*4*
1	$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$	2	$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2}\frac{\cos\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$
3	$\int_0^{12\sqrt{3}}\frac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$	4	$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{1+x^6}$
5	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 xdx$	6	$\int_1^e\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$
7	$\int_{-3}^0\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$	8	$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	*2*	*3*	*4*
9	$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$	10	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$
11	$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$	12	$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
13	$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}$	14	$\int_1^e \frac{\ln^2 xdx}{x}$
15	$\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$	16	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$
17	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$	18	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3-\sin x} dx$
19	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	20	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x}{4-\cos x} dx$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл (табл. 25):

Таблица 25. Исходные данные

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	*2*	*3*	*4*
1	$\int_2^3 x \ln(x-1) dx$	2	$\int_1^2 \ln(3x+2) dx$
3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$	4	$\int_{-1}^0 (x+1) e^{-2x} dx$
5	$\int_1^2 (x-1) \ln x dx$	6	$\int_0^2 x e^{-x} dx$
7	$\int_{-\frac{1}{2}}^0 x e^{-2x} dx$	8	$\int_1^e x \ln x dx$

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	*2*	*3*	*4*
9	$\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}} \frac{x}{e^{3x}} dx$	10	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x-2)\cos x dx$
11	$\int_{1}^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$	12	$\int_{1}^{e^3} \ln x dx$
13	$\int_{0}^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2} dx$	14	$\int_{0}^{\pi} x\sin 7x dx$
15	$\int_{1}^{2} x^2 \ln x dx$	16	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (3x+5)\cos x dx$
17	$\int_{-3}^{0} (x-2)e^{-\frac{x}{3}} dx$	18	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x dx}{x^2}$
19	$\int_{-1}^{0} x\ln(1-x) dx$	20	$\int_{0}^{\pi} (2x-4)\sin x dx$

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (табл. 26). Построить фигуру.

Таблица 26. Исходные данные

Номер варианта	Уравнения линий
1	*2*
1	$y=\frac{1}{2}x^2-x+1, \quad y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$
2	$y=\frac{1}{2}x^2+x+2, \quad y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$
3	$y=\frac{1}{3}x^2-3x+2, \quad y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$

1	*2*
4	$y=2x^2+6x-3,\quad y=-x^2+x+5$
5	$y=3x^2-5x-1,\quad y=-x^2+2x+1$
6	$y=x^2-3x-1,\quad y=-x^2-2x+5$
7	$y=2x^2-6x+1,\quad y=-x^2+x-1$
8	$y=\frac{1}{3}x^2-2x+4,\quad y=-\frac{2}{3}x^2-x+2$
9	$y=x^2-5x-3,\quad y=-3x^2+2x-1$
10	$y=x^2-2x-5,\quad y=-x^2-x+1$
11	$y=\frac{1}{4}x^2-2x-5,\quad y=-\frac{3}{4}x^2-x+1$
12	$y=\frac{1}{2}x^2+3x-2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$
13	$y=2x^2-6x-2,\quad y=-x^2+x-4$
14	$y=2x^2+3x+1,\quad y=-x^2-2x+9$
15	$y=x^2-2x-4,\quad y=-x^2-x+2$
16	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3$
17	$y=2x^2+4x-7,\quad y=-x^2-x+1$
18	$y=2x^2-6x+3,\quad y=-2x^2+x+5$
19	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-1,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$
20	$y=x^2-3x-4,\quad y=-x^2-x+8$

Задание 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой, прямой и осью *Ox* (табл. 27). Сделать рисунок фигуры вращения.

Таблица 27. Исходные данные

Номер варианта	Уравнения линий	Номер варианта	Уравнения линий
1	$y=2x^2,\quad y=-2x+4$	2	$y=4x^2,\quad y=-2x+6$
3	$y=x^2,\quad y=-x+2$	4	$y=x^2,\quad y=-x+3$
5	$y=3x^2,\quad y=-x+4$	6	$y=2x^2,\quad y=-3x+14$
7	$y=\frac{1}{4}x^2,\quad y=-x+3$	8	$y=\frac{1}{3}x^2,\quad y=-x+6$
9	$y=\frac{1}{2}x^2,\quad y=-3x+8$	10	$y=3x^2,\quad y=-2x+5$
11	$y=\frac{1}{3}x^2,\quad y=-3x+12$	12	$y=\frac{1}{3}x^2,\quad y=-2x+9$
13	$y=4x^2,\quad y=-2x+2$	14	$y=\frac{1}{4}x^2,\quad y=-2x+6$
15	$y=\frac{1}{4}x^2,\quad y=-\frac{1}{2}x+2$	16	$y=2x^2,\quad y=-x+10$
17	$y=3x^2,\quad y=-3x+6$	18	$y=\frac{1}{2}x^2,\quad y=-x+3$
19	$y=x^2,\quad y=-2x+5$	20	$y=3x^2,\quad y=-5x+8$

Задание 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией (табл. 28). Построить фигуру.

Таблица 28. Исходные данные

Номер варианта	Задание	Номер варианта	Задание
1	*2*	*3*	*4*
1	$r=a(1+\sin 2\varphi)$	2	$r=3\sin 2\varphi$
3	$r=\cos\varphi$	4	$r=5\cos\varphi$
5	$r=\cos 2\varphi$	6	$r=\sqrt{3}\sin\varphi$
7	$r=4\cos\varphi$	8	$r=3(1+\sin\varphi)$
9	$r=a(1+\cos\varphi)\ (a>0)$	10	$r=2\sqrt{\sin 2\varphi}$
11	$r=\sin^2\varphi$	12	$r=a\cos 2\varphi\ (a>0)$

Номер варианта	Задание	Номер варианта	Задание
1	*2*	*3*	*4*
13	$r=\cos^2\varphi$	14	$r=2a\left(1-\cos\varphi\right)\left(a>0\right)$
15	$r=\sin 2\varphi$	16	$r=2\sin^2\varphi$
17	$r=4\cos^2\varphi$	18	$r=2\sqrt{\cos 2\varphi}$
19	$r=5\cos\varphi$	20	$r=\sin\varphi$

Задание 6. Вычислить длину дуги кривой (табл. 29):

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad t_1\le t\le t_2 .$$

Таблица 29. Исходные данные

Номер варианта	$x(t)$	$y(t)$	t_1	t_2
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	$a\sin^3 t$	$b\cos^3 t$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	$2t$	$\frac{4}{3}\sqrt{t^3}$	-1	0
3	$2(t-\sin t)$	$2(1-\cos t)$	0	2π
4	$\frac{1}{3}t^3-t$	t^2+2	0	3
5	$e^t\cos t$	$e^t\sin t$	0	$\ln\pi$
6	$8\sin t+6\cos t$	$6\sin t-8\cos t$	0	$\frac{\pi}{2}$
7	$\cos^3 t$	$\sin^3 t$	0	$\frac{\pi}{2}$
8	$4(t-\sin t)$	$4(1-\cos t)$	0	2π
9	$2(\cos t+t\sin t)$	$2(\sin t-t\cos t)$	0	π
10	t^2	$t-\frac{1}{3}t^3$	0	1
11	$b\cos^3 t$	$a\sin^3 t$	0	$\frac{\pi}{2}$

Номер варианта	$x(t)$	$y(t)$	t_1	t_2
1	*2*	*3*	*4*	*5*
12	$\cos t + t\sin t$	$\sin t - t\cos t$	0	$\dfrac{\pi}{4}$
13	$3(t-\sin t)$	$3(1-\cos t)$	π	2π
14	$2\cos t$	$2\sin t$	0	$\dfrac{\pi}{3}$
15	$e^t \sin t$	$e^t \cos t$	0	π
16	$\dfrac{1}{6}t^6$	$2-\dfrac{t^4}{4}$	0	1
17	$4\cos t$	$4\sin t$	0	$\dfrac{\pi}{3}$
18	$3\sin t + 4\cos t$	$4\sin t - 3\cos t$	0	π
19	$2\cos t - \cos 2t$	$2\sin t - \sin 2t$	0	$\dfrac{\pi}{2}$
20	$\dfrac{1}{3}t^3 - t$	t^2+1	0	1

Повышенный уровень

Задание 7.

Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первой координатной четверти.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

Решение

Выполним замену переменной. Пусть $t=1+x^2$, тогда $dt=2xdx$, откуда $xdx=\dfrac{1}{2}dt$. Находим новые пределы интегрирования. Если $x=0$, то $t=1$. Если $x=\sqrt{3}$, то $t=4$, что следует из зависимости $t=1+x^2$.

Тогда

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^4 t^{\frac{1}{3}}dt =$$

Применим формулу интеграла от степенной функции $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ и формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4}\Bigg|_1^4 = \frac{3\sqrt[3]{t^4}}{8}\Bigg|_1^4 = \frac{3}{8}\sqrt[3]{4^4} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{1^4} = \frac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4} - 1\right).$$

Ответ: $\frac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4} - 1\right)$.

Задание 2. Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 x\ln(x-1)dx$.

Решение

Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пусть $u = \ln(x-1)$, $dv = xdx$. Находим $du = \frac{dx}{x-1}$, $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$.

Тогда

$$\int_2^3 x\ln(x-1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x-1)\Bigg|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}dx = \frac{9}{2}\ln 2 - 2\ln 1 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2-1+1}{x-1}dx =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}dx = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_2^3 \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\int_2^3 xdx + \int_2^3 dx + \int_2^3 \frac{d(x-1)}{x-1}\right) = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^3 + x\Big|_2^3 + \ln(x-1)\Big|_2^3\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 2 + 3 - 2 + \ln 2 - \ln 1\right) = 4\ln 2 - \frac{7}{4}.$$

Ответ: $4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 - x - 2$ и $y = -x^2 + x - 1$. Построить фигуру.

Решение

Построив линии, получим фигуру (рис. 12).

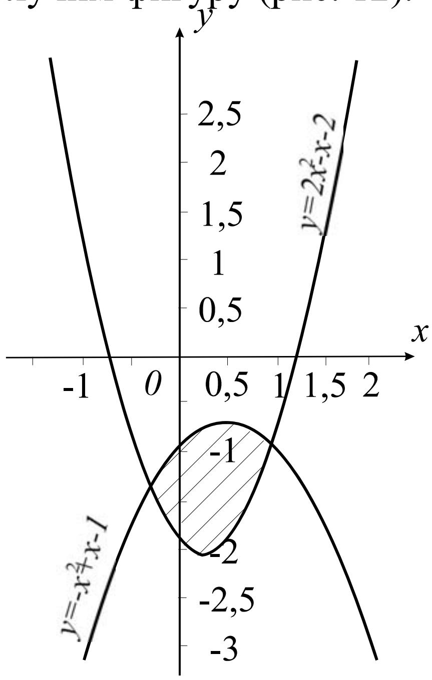

Рис. 12. Фигура

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1, \qquad x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Вычисление площади осуществляем по формуле

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx,$$

где $y = f(x)$, $y = g(x)$ — кривые, ограничивающие фигуру $\left(f(x) \ge g(x)\right)$.

Тогда

$$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(\left(-x^2+x-1\right)-\left(2x^2-x-2\right)\right)dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(-3x^2+2x+1\right)dx=$$

$$=\left(-3\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1}=\left(x^3+x^2+x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1}=$$

$$=\left(-1+1+1\right)-\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)=\frac{34}{27}\ \text{(кв. ед.)}.$$

Ответ: $\frac{34}{27}$ кв. ед.

Задание 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой $y=8x^2$, прямой $y=-6x+14$ и осью Ox. Сделать рисунок фигуры вращения.

Решение

Построив линии, получим фигуру вращения (рис. 13).

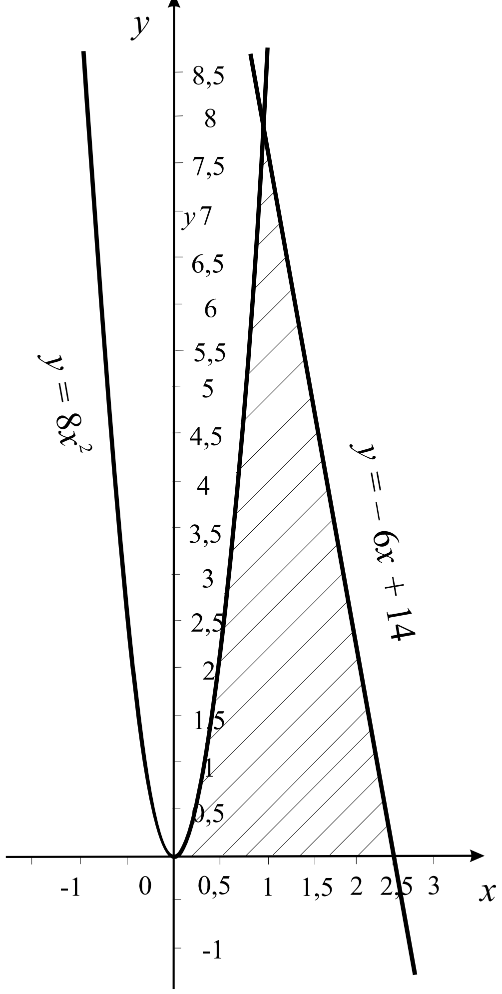

Рис. 13. Фигура вращения

Найдем абсциссу точки пересечения параболы и прямой в первом квадранте. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$8x^2 = -6x + 14.$$

Решим полученное квадратное уравнение.

$$4x^2 + 3x - 7 = 0,$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot (-7) = 121,$$

$$x_1 = \frac{-3-11}{8} = -\frac{7}{4}, \qquad x_2 = \frac{-3+11}{8} = 1.$$

Первому квадранту соответствует корень $x_2 = 1$.

Найдем абсциссу точки пересечения прямой $y = -6x + 14$ с осью Ox, решив уравнение $-6x + 14 = 0$, откуда $x = \frac{7}{3}$.

Таким образом, тело ограничено при $0 \le x \le 1$ поверхностью, образованной вращением параболы $y = 8x^2$ вокруг оси Ox, а при $1 \le x \le \frac{7}{3}$ — вращением прямой $y = -6x + 14$.

Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

где $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ — уравнения линий, ограничивающих криволинейную трапецию, которая вращается вокруг оси Ox.

Тогда искомый объем:

$$V = \pi \int_0^1 \left(8x^2\right)^2 dx + \pi \int_1^{\frac{7}{3}} (-6x + 14)^2\, dx.$$

Для вычисления второго интеграла применим метод подведения под знак дифференциала:

$$V = 64\pi \int_0^1 x^4 dx - \frac{\pi}{6} \int_1^{\frac{7}{3}} (-6x + 14)^2\, d(-6x + 14) =$$

$$= 64\pi \left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{\pi}{6} \cdot \frac{(-6x+14)^3}{3}\Bigg|_1^{\frac{7}{3}} = \frac{64\pi}{5} + \frac{256\pi}{9} = \frac{1\,856}{45}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $\frac{1856}{45}\pi$ куб. ед.

Задание 5. Найти площадь, ограниченную линией $r = a\sin 3\varphi$.

Решение

Заданная линия — трехлепестковая роза (рис. 14).

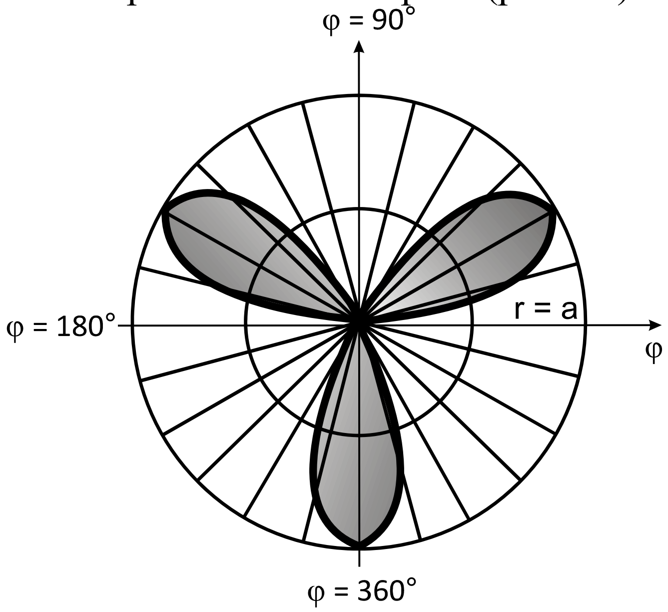

Рис. 14. Фигура

Для вычисления площади фигуры в полярных координатах используем формулу

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Найдем площадь половинки одного лепестка и умножим ее на 6:

$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\sin^2(3\varphi)\,d\varphi = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{3a^2}{2}\left(\varphi - \frac{1}{6}\cdot\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\sin\pi\right)-(0-0)\right) = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$ кв. ед.

Задание 6. Вычислить длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t \\ y = \left(t^2 - 2\right)\cos t - 2t\sin t \end{cases},$$

где $0 \le t \le \pi$.

Решение

Если уравнение кривой задано в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где $t_1 \le t \le t_2$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Найдем $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = \left(t^2 - 2\right)' \sin t + \left(t^2 - 2\right)(\sin t)' + (2t)' \cos t + 2t(\cos t)' =$$

$$= 2t\sin t + \left(t^2 - 2\right)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2 \cos t,$$

$$y'(t) = \left(t^2 - 2\right)' \cos t + \left(t^2 - 2\right)(\cos t)' - (2t)' \sin t - 2t(\sin t)' =$$

$$= 2t\cos t - \left(t^2 - 2\right)\sin t - 2\sin t - 2t\cos t = -t^2 \sin t.$$

Тогда

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(t^2 \cos t\right)^2 + \left(-t^2 \sin t\right)^2}\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{t^4 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,dt = \int_0^{\pi} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \text{ (ед.)}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi^3}{3}$ ед.

5.3. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №5 «Несобственные интегралы»

Ответьте на вопросы:

1. Какие интегралы называются несобственными?
2. Как вычисляются несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования?

3. Как вычисляются несобственные интегралы от неограниченных функций?

4. В каком случае несобственный интеграл называется расходящимся? сходящимся?

№1. Вычислите интегралы или установите их расходимость:

1) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$;   2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$;   4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$;

5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$;   6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Учебно-исследовательская работа № 5
«Применение определенных интегралов для решения профессионально направленных задач»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение аналитической геометрии в профессиональной деятельности.

3-Й СЕМЕСТР

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Индивидуальное домашнее задание №5 «Дифференциальные уравнения»

Базовый уровень

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 29):

Таблица 29. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$y - xy = (1 + x^2)y'$
2	$x(1 + y^2) + y(1 - x^2)y' = 0$
3	$y' = (2y + 1)ctgx$
4	$(1 + x^2)y' = y(x - \sqrt{1 + x^2})$
5	$(1 + x^2)y^3 + (1 - y^2)x^3 y' = 0$
6	$x(1 + y^2) + (1 + y^3)y' = 0$
7	$y' \cos x = (y + 1)\sin x$
8	$(2 + y)dx - (2 - x)dy = 0$
9	$(e^{2x} + 1)dy + ye^{2x}dx = 0$
10	$y'tgx - y = 0$
11	$y' \sin x - y \ln y = 0$
12	$y' = e^{x-y}$
13	$(e^x + 2)y' = ye^x$
14	$(e^x + 1)dy + e^x dx = 0$
15	$x^2 dy + (y - 1)dx = 0$
16	$y' \cos x - y \sin x = 0$
17	$(1 + x^2)y' = 1 + y^2$
18	$e^y(1 + x^2)y' - 2x(1 + e^y) = 0$
19	$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$
20	$xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$

Задание 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 30).

Таблица 30. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$xye^{\frac{x}{y}} + y^2 = x^2 y' e^{\frac{x}{y}}$
2	$(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$
3	$x\ln\frac{x}{y}dy - ydx = 0$
4	$xyy' = y^2 + 8x^2$
5	$y' = \frac{x-y}{x+y}$
6	$2x^2 y' + x^2 + y^2 = 0$
7	$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$
8	$4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$
9	$y' = \frac{8x+5y}{5x-2y}$
10	$x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$
11	$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
12	$xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$
13	$xy' = y\ln\frac{y}{x}$
14	$(x^2 - y^2)y' = 2xy$
15	$y' = \frac{x+y}{x-y}$
16	$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$
17	$xy' - y = xtg\frac{y}{x}$
18	$xy' - y - \sqrt{xy} = 0$
19	$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$
20	$y' = \frac{y^2}{x^2 + xy}$

Задание 3.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 31).

Таблица 31. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$(1+x^2)y' + y = arctgx$
2	$y'\cos^2 x + y = tgx$
3	$xy' + y - x - 1 = 0$
4	$x^2 y' = 2xy + 3$
5	$xy' + y - 3 = 0$
6	$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
7	$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$
8	$x^3 y' + 3x^2 y = 2$
9	$xy' - y = -2\ln x$
10	$xy' - y = x^3$
11	$y' - y = e^x$
12	$2xy' + y = 2x^3$
13	$y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$
14	$xy' - y = -\ln x$
15	$y' - y\cos x = -\sin 2x$
16	$xy' + y = x + 1$
17	$y'\cos x + y\sin x = 2x\cos^2 x$
18	$xy' - 3y = x^4\ln x$
19	$xy' - 2y = 4x^3\cos^2 x$
20	$xy' - 5y = e^x x^7$

Задание 4.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 32).

Таблица 32. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	2
1	$3xy' + 5y = (4x-5)y^4$
2	$2y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = \dfrac{5}{y}$

1	2
3	$y' - ytgx = -\frac{2}{3}y^4 \sin x$
4	$y' - y = xy^2$
5	$y' + 2y = (x+1)y^{-2}$
6	$xy^2y' = x^2 + y^3$
7	$y' + 2y = y^2e^x$
8	$2xyy' - y^2 + x = 0$
9	$y' = -\frac{y}{x} - xy^2$
10	$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$
11	$y' + 2y = 2x^3y^3$
12	$xy' - y = x^3y^2$
13	$xy' + y = -x^2y^2$
14	$xy' + 2y = 3x^5y^2$
15	$y' + y = -e^{2x}y^2$
16	$xy' - 2y = x^2\sqrt{y}$
17	$y' - ytgx = y^2 \sin x \cos x$
18	$xy' + y = 2xy^2 \ln x$
19	$y' - ytgx = -y^2 \cos x$
20	$xy' = x^5y^2 - 2y$

Задание 5. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка, при указанных начальных условиях (табл. 33).

Таблица 33. Исходные данные

№ варианта	Уравнение	Начальные условия
1	2	3
1	$(y-2)y'' = 2(y')^2$	$y(0) = 3$, $y'(0) = 1$
2	$y'y'' = 2y$	$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
3	$y'' - e^y y' = 0$	$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
4	$x^3y'' = 4\ln x$	$y(1) = 4$, $y'(1) = 0$
5	$y'' + y'tgx = \cos x$	$y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{\pi}{2}$

1	2	3
6	$xy'' = \ln x + 1$	$y(1) = 0,\ y'(1) = 0$
7	$xy'' - 2y' = 2x^4$	$y(1) = \frac{1}{5},\ y'(1) = 4$
8	$y'' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
9	$y'' - y'ctgx = \sin x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
10	$xy'' - y' - x^2 = 0$	$y(1) = \frac{4}{3},\ y'(1) = 3$
11	$2y'' = e^{4y}$	$y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{2}$
12	$y''y^3 = 1$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
13	$y'y'' = 1$	$y(0) = \frac{1}{3},\ y'(0) = 1$
14	$yy'' = (y')^2$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
15	$2(y')^2 = (y-1)y''$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
16	$y'' = xe^x$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
17	$(x^2+1)y'' = 2xy'$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 3$
18	$2y'' - 3y^2 = 0$	$y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$
19	$2yy'' = (y')^2$	$y(0) = 4,\ y'(0) = 2$
20	$2yy'' = 1 + (y')^2$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения (табл. 34).

Таблица 34. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	*2*
1	$y'' + 2y' - 3y = 6x$
2	$y'' - 4y' = 4x^2 - 8x$
3	$y'' + 2y' + 2y = x^2 + 1$
4	$y'' - 4y' = 8x + 4$
5	$y'' - 4y' = x^2 + x$
6	$y'' + 2y' + 2y = 3x^2 + x$
7	$y'' + 2y' + 2y = x + 2$

1	*2*
8	$y'' + 2y' + 2y = x^3 + x + 1$
9	$y'' - 4y' = 12x^2$
10	$y'' - 3y' = 2 - 6x$
11	$y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$
12	$y'' + 2y' + 2y = x^3 + 2x^2 + 3$
13	$y'' + 2y' + 2y = x^2 - 1$
14	$y'' - 4y' = x^2 + x - 4$
15	$y'' + 2y' + 2y = x^2 + 2x + 1$
16	$y + 2y' + 2y = 2x^3 + 2x^2$
17	$y'' + 2y' - 3y = 6x$
18	$y'' + 2y' - 3y = 6x$
19	$y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$
20	$y'' - y = x^2$

Задание 7. Найти общее решение дифференциального уравнения (табл. 35).

Таблица 35. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	*2*
1	$9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}$
2	$3y'' + 2y' - y = \sqrt[3]{e^x}$
3	$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$
4	$y'' - 4y' + 4y = 3e^x$
5	$4y'' - 12y' + 9y = \sqrt{e^{3x}}$
6	$y'' - 4y' + 4y = 2e^{-2x}$
7	$y'' - 4y' + 4y = 5e^{-x}$
8	$y'' - 4y' + 4y = \frac{9}{4}\sqrt{e^x}$
9	$4y'' - 20y' + 25y = \sqrt{e^{5x}}$
10	$9y'' + 6y' + y = 2\sqrt[3]{e^{-x}}$
11	$y'' - 4y' + 4y = 8e^{4x}$

1	2
12	$y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{4}\sqrt{e^{3x}}$
13	$y'' - 4y' + 4y = 36e^{-4x}$
14	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
15	$y'' - 4y' + 4y = \frac{25}{4}\sqrt{e^{-x}}$
16	$y'' - 3y' - 4y = 3e^{-x}$
17	$9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^{x}}$
18	$9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^{x}}$
19	$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$
20	$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

Задание 8. Найти общее решение дифференциального уравнения (табл. 36).

Таблица 36. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	*2*
1	$y'' + 9y = \sin 3x + \cos 3x$
2	$4y'' + 9y = \sin \frac{3}{2} x$
3	$y'' + 4y = 2\sin 2x$
4	$y'' - 4y = 5\sin 3x - 10\cos 3x$
5	$y'' - 4y = 5\sin x + \cos x$
6	$y'' + y = 4\sin x$
7	$y'' - 4y = 13\cos 3x$
8	$y'' + 9y = 3\cos 3x$
9	$2y'' + y = \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$
10	$y'' - 4y = \sin 4x + 16\cos 4x$
11	$y'' - 4y = \sin 2x - 2\cos 2x$
12	$y'' + 2y' + 2y = x^3 + 2x^2 + 3$
13	$y'' + 2y = \sin\sqrt{2x}$
14	$y'' - 4y = 5\sin x + \cos x$
15	$y'' - 4y = 29\cos 5x$

1	*2*
16	$y'' - 4y = 4\sin 4x + \cos 4x$
17	$y'' + 9y = \cos 3x$
18	$6y'' + y = \cos\dfrac{x}{\sqrt{6}}$
19	$y'' - 4y = 4\sin 2x$
20	$y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$

Повышенный уровень

Задание 9. Материальная точка массой *m* движется прямолинейно под действием силы, которая пропорциональна квадрату отношения времени к скорости (коэффициент пропорциональности равен *k*). Найти зависимость скорости от времени при условии, что в начальный момент движения скорость точки равнялась нулю.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$.

Решение

Уравнение $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$ является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, деля обе части уравнения на $\left(1+x^2\right)\sqrt{1+y^2}$, получим:

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0.$$

Интегрируем обе части:

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx + \int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = C,$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1+y^2\right) = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \sqrt{1+y^2} = C.$$

Получили общий интеграл данного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\sqrt{1+y^2}=C$.

Задание 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\left(xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$.

Решение

Уравнение $\left(xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$ является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части уравнения на dx:

$$\left(xy+y^2\right)-x^2\frac{dy}{dx}=0.$$

Так как $\frac{dy}{dx}=y'$, получим:

$$\left(xy+y^2\right)-x^2y'=0,$$

$$x^2y'=xy+y^2,$$

$$y'=\frac{xy+y^2}{x^2},$$

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}.$$

Сделаем замену $u=\frac{y}{x}$, где u — некоторая функция переменной x. Тогда $y=ux$. Дифференцируя, получим $y'=u'x+u$.

В результате замены заданное уравнение примет вид:

$$u'x+u=u+u^2$$

или

$$u'x=u^2,$$

$$x\frac{du}{dx}=u^2.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные, проинтегрируем и получим его общий интеграл:

$$xdu=u^2dx,$$

$$\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u}=\ln|x|+C,$$

Так как $u=\frac{y}{x}$, то имеем:

$$-\frac{x}{y}=\ln|x|+C,$$

откуда

$$y=-\frac{x}{\ln|x|+C}.$$

Получили общее решение данного однородного дифференциального уравнения.

Ответ: $y=-\frac{x}{\ln|x|+C}$.

Задание 3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x^2y'-5xy-1=0$.

Решение

Уравнение $x^2y'-5xy-1=0$ является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части уравнения на x^2:

$$y'-\frac{5}{x}y=\frac{1}{x^2}.$$

Сделаем замену $y=uv$, где u и v — некоторые функции переменной x. Дифференцируя, получим $y'=u'v+uv'$.

В результате замены заданное уравнение примет вид:

$$u'v+uv'-\frac{5}{x}uv=\frac{1}{x^2}$$

или

$$u'v+u\left(v'-\frac{5}{x}v\right)=\frac{1}{x^2}.$$

Выберем функцию v так, чтобы имело место равенство

$$v'-\frac{5}{x}v=0.$$

Найдем из него функцию v, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{5v}{x},$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{5dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = 5\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = 5\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\left|x^5\right|,$$

$$v = x^5.$$

Найдем из него функцию *v*, как частное решение:

$$u'v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v = x^5$, получим уравнение:

$$x^5 u' = \frac{1}{x^2}.$$

Найдем из него функцию *u*, как общее решение:

$$x^5 \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2},$$

$$x^5 du = \frac{dx}{x^2},$$

$$du = \frac{dx}{x^7},$$

$$\int du = \int \frac{dx}{x^7},$$

$$u = -\frac{1}{6x^6} + C.$$

Тогда

$$y = uv = \left(-\frac{1}{6x^6} + C\right)x^5 = Cx^5 - \frac{1}{6x}.$$

Итак, $y = Cx^5 - \dfrac{1}{6x}$ — общее решение данного линейного дифференциального уравнения.

Ответ: $y = Cx^5 - \dfrac{1}{6x}$.

Задание 4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy' + 2y - y^2 = 0$.

Решение

Уравнение $xy' + 2y = y^2$ является уравнением Бернулли.

Разделим обе части уравнения на y^2, получим:

$$\frac{xy'}{y^2}+\frac{2}{y}=1.$$

Введем новую переменную

$$z=\frac{1}{y},$$

где z — функция переменной x. Дифференцируя ее по правилу производной сложной функции, имеем:

$$z'=-\frac{1}{y^2}y'.$$

В результате замены получим линейное уравнение

$$-xz'+2z=1$$

или

$$z'-\frac{2}{x}z=-\frac{1}{x}.$$

Решим его с помощью замены $z=uv$, $z'=u'v+uv'$, которая приводит уравнение к виду:

$$u'v+uv'-\frac{2}{x}uv=-\frac{1}{x}$$

или

$$u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=-\frac{1}{x}.$$

Выберем функцию v так, чтобы имело место равенство

$$v'-\frac{2}{x}v=0.$$

Найдем из него функцию v, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2}{x}v,$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=2\ln|x|,$$

$$\ln|v|=\ln\left|x^2\right|,$$

$$v=x^2.$$

При таком выборе функции v функция u находится из уравнения

$$u'v=-\frac{1}{x}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v=x^2$, получим уравнение:

$$x^2u' = -\frac{1}{x}.$$

Найдем из него функцию *u*, как общее решение:

$$x^2\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x},$$

$$x^2du = -\frac{dx}{x},$$

$$du = -\frac{dx}{x^3},$$

$$\int du = -\int\frac{dx}{x^3},$$

$$u = \frac{1}{2x^2} + C.$$

Тогда

$$z = uv = \left(\frac{1}{2x^2} + C\right)x^2 = \frac{1}{2} + Cx^2.$$

Так как $z = \frac{1}{y}$, то

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} + Cx^2,$$

откуда

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2} + Cx^2}$$

или

$$y = \frac{2}{1 + 2Cx^2}.$$

Получили общее решение данного дифференциального уравнения.

Ответ: $y = \frac{2}{1 + 2Cx^2}$.

Задание 5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{x^2} - \frac{y'}{x}$, если $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

Решение

Уравнение $y'' = \frac{1}{x^2} - \frac{y'}{x}$ не содержит явным образом функцию *y*, поэтому является дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка с помощью замены $y' = p$, где $p = p(x)$. Тогда $y'' = p'$.

В результате замены уравнение примет вид:

$$p' = \frac{1}{x^2} - \frac{p}{x}$$

или

$$p' + \frac{p}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения применим замену $p = uv$, $p' = u'v + uv'$. В результате которой уравнение примет вид:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2}$$

или

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Выберем функцию *v* так, чтобы имело место равенство

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

Найдем из него функцию *v*, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

При таком выборе функции *v* функция *u* находится из уравнения

$$u'v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v=\frac{1}{x}$, получим уравнение:

$$\frac{1}{x}u'=\frac{1}{x^2}.$$

Найдем из него функцию *u*, как общее решение:

$$\frac{du}{xdx}=\frac{1}{x^2},$$

$$du=\frac{dx}{x},$$

$$\int du=\int\frac{dx}{x},$$

$$u=\ln|x|+C_1.$$

Тогда

$$p=uv=\left(\ln|x|+C_1\right)\frac{1}{x}=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{C_1}{x}.$$

Так как $p=y'$, то имеем:

$$y'=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{C_1}{x}.$$

Используем начальное условие $y'(1)=2$. Подставляя в последнее равенство $x=1$, $y'=2$, найдем C_1:

$$2=\frac{\ln 1}{1}+\frac{C_1}{1},$$

$$C_1=2.$$

Тогда

$$y'=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{2}{x}.$$

Интегрированием найдем из полученного уравнения функцию *y*:

$$y=\int\left(\frac{\ln|x|}{x}+\frac{2}{x}\right)dx=\int\ln|x|d\left(\ln|x|\right)+2\int\frac{dx}{x}=\frac{\ln^2|x|}{2}+2\ln|x|+C_2.$$

Итак, получили:

$$y=\frac{\ln^2|x|}{2}+2\ln|x|+C_2.$$

Используем начальное условие $y(1)=1$. Подставляя в последнее равенство $x=1$, $y=1$, найдем C_2:

$$1=\frac{\ln^2 1}{2}+2\ln 1+C_2,$$

$$C_2=1.$$

Следовательно,

$$y = \frac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + 1.$$

Получили частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

Ответ: $y = \dfrac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + 1$.

Задание 6. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1$.

Решение

Уравнение $y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k = 0.$$

Его корни: $k_1 = 0$ и $k_2 = -2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x}$$

или

$$y_{оо} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой

многочлен второй степени и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y''_{чн} = 6Ax + 2B.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$6Ax + 2B + 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = x^2 + 2x - 1$$

или

$$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2 + 2x - 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 2, \\ 2B + 2C = -1. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$A = \frac{1}{6},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{3}{4}.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$

Задание 7. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$.

Решение

Уравнение $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Его корни: $k_1 = -1$ и $k_2 = 2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой показательную функцию вида $f(x) = ae^{mx}$ и $m = 2$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = Axe^{2x}.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$

$$y''_{чн} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - Ae^{2x} - 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = 9e^{2x}.$$

Приведя подобные слагаемые и разделив обе части уравнения на e^{2x}, определим коэффициент A:

$$3Ae^{2x} = 9e^{2x},$$

$$3A = 9,$$

$$A = 3.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = 3xe^{2x}.$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}$.

Задание 8. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 4y = 4\cos 2x - 12\sin 2x$.

Решение

Уравнение $y'' + 4y = 4\cos 2x - 12\sin 2x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0$$

или

$$k^2 = -4.$$

Его корни: $k_1 = -2i$ и $k_2 = 2i$.

Так как корни характеристического уравнения комплексные сопряженные вида $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = e^{0x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$$

или

$$y_{оо} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой тригонометрическую функцию вида $f(x) = a\cos nx + b\sin nx$ и числа $k = \pm ni = \pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$

$$y''_{чн} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x +$$
$$+ x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) =$$
$$= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x +$$
$$+ 4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x$$

или

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получим:

$$\begin{cases} -4A = -12, \\ 4B = 4; \end{cases}$$

Тогда $A = 3$, $B = 1$.

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x)$.

6.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №6 «Уравнения Бернулли»

Ответьте на вопросы:

1. Какой вид имеют уравнения Бернулли?
2. Каков способ их решения?

Решите уравнения:

№1. $y' + \frac{2}{x} y = x^2 y^2$;

№2. $y' - \frac{y}{x} = \frac{(x-1)^2}{y}$.

Учебно-исследовательская работа № 6 «Применение дифференциальных уравнений для решения профессионально направленных задач»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности.

7. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

7.1. Контрольная работа № 5 «Теория вероятностей»

Базовый уровень

Задание 1. Решить задачу (табл. 37).

Таблица 37. Исходные данные

№ варианта	Задача
1	*2*
1	Вероятность того, что одна газетная экспедиция доставит газеты вовремя, равна 0,95, а для второй эта вероятность равна 0,98. Найти вероятность того, что вовремя доставят газеты: а) только одна экспедиция; б) хотя бы одна экспедиция.
2	Из 12 вопросов студент не знает 3. Найти вероятность того, что в случайно выбранном билете, содержащем 3 вопроса, будет не менее двух известных студенту.
3	Вероятность того, что при измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, при первом измерении равна 0,1, а при втором 0,15. Найти вероятность того, что в результате двух измерений ошибка будет допущена: а) только в одном случае; б) в обоих случаях измерение будет произведено без ошибок.
4	Среди 15 лотерейных билетов 3 выигрышных. Найти вероятность того, что среди наудачу отобранных 3 билетов не менее двух выигрышных.

1	*2*
5	Вероятность того, что первый цех выполнит заказ в срок, равна 0,95, второй цех — 0,8. Найти вероятность того, что: а) только один цех выполнит заказ в срок; б) хотя бы один цех не выполнит заказ в срок.
6	Вероятность того, что при расчете будет допущена ошибка для первого студента, равна 0,01; для второго 0,02. Найти вероятность того, что при расчете: а) оба студента не допустят ошибку; б) не допустит ошибку хотя бы один студент.
7	В студенческой группе 15 человек, среди которых 5 юношей. Найти вероятность того, что среди наудачу отобранных для дежурства 3 человек не менее двух девушек.
8	Отдел технического контроля проверяет партию из 20 изделий. Партия принимается, если среди наудачу отобранных 5 изделий будет не более одной нестандартной. Найти вероятность того, что партия будет принята, если в этой партии 4 нестандартных изделия.
9	Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен на отлично, равна 0,95, для второго экзамена эта вероятность равна 0,85. Найти вероятность того, что студент сдаст на отлично: а) только один экзамен; б) хотя бы один экзамен
10	Вероятность попадания в цель по удаляющейся мишени при первом выстреле равна 0,9, при втором 0,8, при третьем 0,7. Найти вероятность того, что при трех выстрелах будет: а) только одно попадание; б) хотя бы одно попадание.
11	Среди 20 деталей 5 нестандартных. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей есть хотя бы одна нестандартная.
12	Вероятности бесперебойной работы для каждого из двух станков соответственно равны 0,95 и 0,8. Найти вероятность того, что за смену: а) произойдет остановка только одного станка; б) остановится хотя бы один станок.
13	Для практики студентам предоставлено 10 мест в Костромском районе и 5 мест в Красносельском районе. Найти вероятность того, что два определенных студента поедут на практику в один и тот же район.
14	Для практики студентам предоставлено 12 мест в Ярославской области и 8 мест в Ивановской области. Найти вероятность того, что два определенных студента поедут в разные области.

1	*2*
15	Вероятность того, что автобус из Москвы прибудет с опозданием, равна 0,05, из Ярославля — 0,07. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день: а) оба автобуса приедут вовремя; б) опоздает только один автобус.
16	Вероятности войти в сборную команду академии для каждого из трех студентов соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в результате отборочных соревнований в сборную войдет: а) только один студент; б) хотя бы один студент.
17	Собрание из 12 человек, среди которых 8 мужчин, выбирает делегацию из 4 человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдут не менее трех мужчин.
18	Среди 20 деталей 5 нестандартных. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей не более одной нестандартной.
19	На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, среди которых 5 женщин. Найти вероятность того, что в случайно выбранной смене мужчин окажется не менее двух, если в смене занято три человека.
20	На двух станках штампуют детали. Вероятность того, что за смену первый станок допустит брак, равна 0,05, для второго эта вероятность равна 0,04. Найти вероятность того, что за смену допустит брак: а) только один станок; б) хотя бы один станок.

Задание 2. Решить задачу (табл. 38).

Таблица 38. Исходные данные

№ варианта	Задача
1	*2*
1	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,81. Найти вероятность того, что из 250 посаженных семян прорастет ровно 200.
2	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,64. Найти вероятность того, что из 225 посаженных семян прорастет ровно 158.
3	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,36. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян прорастет ровно 340.
4	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 400 посаженных семян прорастет ровно 330.

1	*2*
5	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 посаженных семян прорастет ровно 95.
6	Семена пшеницы содержат 0,2% сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 6 семян сорняков.
7	Всхожесть семян пшеницы составляет 90%. Определить наиболее вероятное число всходов из 200 посеянных семян.
8	Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Написать закон распределения вероятностей попаданий в цель при 5 выстрелах. Построить многоугольник распределения вероятностей.
9	Вероятность всхожести пшеницы равна 0,8. Какова вероятность того, что из 5 семян взойдет не менее трех?
10	Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится 4 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) три раза; б) не более двух раз.
11	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,75. Найти вероятность того, что из 200 посаженных семян прорастет ровно 180.
12	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,73. Найти вероятность того, что из 160 посаженных семян прорастет ровно 130.
13	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,45. Найти вероятность того, что из 700 посаженных семян прорастет ровно 500.
14	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 400 посаженных семян прорастет ровно 330.
15	Вероятность того, что семя злака прорастет, равна 0,75. Найти вероятность того, что из 200 посаженных семян прорастет ровно 190.
16	Семена пшеницы содержат 0,3% сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 5 семян сорняков.
17	Всхожесть семян пшеницы составляет 80%. Определить наиболее вероятное число всходов из 175 посеянных семян.
18	Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Написать закон распределения вероятностей попаданий в цель при 4 выстрелах. Построить многоугольник распределения вероятностей.
19	Вероятность всхожести пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из 5 семян взойдет не менее двух?

1	2
20	Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,85. Производится 3 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) два раза; б) не менее одного раза.

Задание 3. Дана вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз (табл. 39).

Таблица 39. Исходные данные

№ варианта	n	p	k_1	k_2
1	360	0,8	280	300
2	490	0,6	320	350
3	640	0,9	500	540
4	225	0,2	50	60
5	810	0,4	340	400
6	250	0,7	150	180
7	300	0,3	110	130
8	625	0,8	480	500
9	100	0,5	60	80
10	256	0,9	200	220
11	360	0,7	270	310
12	460	0,8	320	400
13	630	0,9	500	600
14	255	0,3	150	180
15	800	0,6	540	700
16	280	0,8	190	250
17	300	0,4	100	150
18	650	0,9	580	650
19	300	0,7	160	200
20	255	0,9	200	230

Задание 4. Случайная величина X задана рядом распределении (табл. 40). Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Таблица 40. Исходные данные

№ варианта	Закон распределения			
1	*2*			
1	X	–3	1	2
	p	0,1	0,6	0,3

1	*2*			
2	X	1	3	4
	p	0,1	0,5	0,4
3	X	–1	0	3
	p	0,3	0,2	0,5
4	X	–1	2	4
	p	0,2	0,4	0,4
5	X	–3	–1	0
	p	0,3	0,4	0,3
6	X	–2	1	2
	p	0,1	0,4	0,5
7	X	–4	–1	0
	p	0,3	0,4	0,3
8	X	15	13	10
	p	0,1	0,3	0,6
9	X	8	5	3
	p	0,2	0,4	0,4
10	X	–5	–1	3
	p	0,5	0,3	0,2
11	X	–7	–5	–1
	p	0,5	0,3	0,2
12	X	–12	–10	–6
	p	0,5	0,2	0,3
13	X	3	5	8
	p	0,4	0,5	0,1
14	X	1	4	8
	p	0,5	0,3	0,2
15	X	–4	0	5
	p	0,2	0,4	0,4
16	X	–5	–1	3
	p	0,5	0,3	0,2
17	X	–7	–5	–1
	p	0,3	0,5	0,2
18	X	–1	2	4
	p	0,4	0,2	0,4
19	X	1	3	4
	p	0,3	0,1	0,6
20	X	–12	–10	–6
	p	0,2	0,1	0,7

Задание 5. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения (табл. 41).

Найти:

1) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности);

2) математическое ожидание $M(X)$;

3) дисперсию $D(X)$;

4) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Таблица 41. Исходные данные

№ варианта	Функция распределения
1	*2*
1	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right), \text{ при } 1<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$
2	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ 3x^2+2x, \text{ при } 0<x\le \frac{1}{3},\\ 1, \text{ при } x>\frac{1}{3}.\end{cases}$
3	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 2,\\ \frac{x}{2}-1, \text{ при } 2<x\le 4,\\ 1, \text{ при } x>4.\end{cases}$
4	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ x^3, \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
5	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -1,\\ \frac{1}{4}(x+1)^2, \text{ при } -1<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
6	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{1}{5}\left(x^2+4x\right), \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$

1	*2*
7	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -2,\\ \frac{1}{9}(x+2)^2, \text{ при } -2<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
8	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x^2+x}{6}, \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$
9	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x, \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
10	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x^3}{27}, \text{ при } 0<x\le 3,\\ 1, \text{ при } x>3.\end{cases}$
11	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{9}(x-1)^2, \text{ при } 1<x\le 4,\\ 1, \text{ при } x>4.\end{cases}$
12	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 4,\\ x-4, \text{ при } 4<x\le 5,\\ 1, \text{ при } x>5.\end{cases}$
13	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -2,\\ \frac{1}{16}(x+2)^2, \text{ при } -2<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$
14	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x^3}{8}, \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$

1	*2*
15	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{3}(x-1), \text{ при } 1<x\le 4,\\ 1, \text{ при } x>4.\end{cases}$
16	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{1}{3}(x^2+2x), \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
17	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{1}{7}x^2+\frac{6}{7}x, \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$
18	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{1}{27}x^2+\frac{2}{9}x, \text{ при } 0<x\le 3,\\ 1, \text{ при } x>3.\end{cases}$
19	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le \frac{1}{4},\\ \left(x-\frac{1}{4}\right)^2, \text{ при } \frac{1}{4}<x\le \frac{5}{4},\\ 1, \text{ при } x>\frac{5}{4}.\end{cases}$
20	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \frac{1}{25}(x-1)^2, \text{ при } 1<x\le 6,\\ 1, \text{ при } x>6.\end{cases}$

Повышенный уровень:

Задание 6. Текущая цена ценной бумаги представляет собой нормально распределенную случайную величину X со средним 100 усл. ед. и дисперсией 9. Найти вероятность того, что цена актива будет находиться в пределах от 91 до 109 усл. ед.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,9 для первого, 0,8 для второго и 0,7 для третьего. Найти вероятность того, что при аварии:

а) сработает только один сигнализатор;

б) сработает хотя бы один сигнализатор;

в) все три сигнализатора сработают.

Решение

а) Обозначим события:

A — сработает только один сигнализатор,

A_i — i-й сигнализатор сработает, где $i = 1, 2, 3$.

Тогда $\overline{A_i}$ — i-й сигнализатор не сработает, где $i = 1, 2, 3$.

По условию $P(A_1) = 0{,}9$, $P(A_2) = 0{,}8$, $P(A_3) = 0{,}7$.

Тогда по формуле вероятности противоположного события

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

имеем

$$P(\overline{A_1}) = 0{,}1,\ P(\overline{A_2}) = 0{,}2,\ P(\overline{A_3}) = 0{,}3.$$

Событие A можно представить в виде:

$$A = A_1\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,A_2\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3.$$

Используя формулы вероятности суммы несовместных событий и вероятности произведения независимых событий

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n),$$

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n),$$

получим вероятность события A:

$$P(A) = P(A_1\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\,A_2\,\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3) =$$

$$= P(A_1)\,P(\overline{A_2})\,P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) =$$

$$= 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 + 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}092.$$

$$P(A) = 0{,}092.$$

б) Пусть событие B — сработает хотя бы один сигнализатор.

Рассмотрим событие $\overline{B}$ — все три сигнализатора не сработают , которое является противоположным к событию B:

$$\overline{B} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}.$$

Используя формулы вероятности противоположного события и вероятности произведения независимых событий, получим вероятность события B:

$$P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)=$$
$$=1-0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}994.$$

в) Пусть событие C — все три сигнализатора срабатывают, т.е.

$$C=A_1A_2A_3.$$

По формуле вероятности произведения независимых событий:

$$P(C)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}504.$$

Задание 2.1. Производится четыре независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны p = 0,8. Найти вероятность того, что при этом будет:

а) ровно три попадания;

б) не менее трех попаданий;

в) не более одного попадания;

г) хотя бы одно попадание.

Решение

Обозначим событие:

A — попадание в цель при отдельном выстреле.

По условию: $n = 4$, $p = 0{,}8$, $q = 1–p = 1–0{,}8 = 0{,}2$.

а) Найдем вероятность того, что событие A произойдет ровно три раза, т.е. $k = 3$.

Вероятность того, что событие A в n повторных независимых испытаниях произойдет ровно k раз, находится по *формуле Бернулли:*

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где n — число повторных независимых испытаний;

p — вероятность наступления события A в каждом испытании;

q — вероятность непоявления события A в каждом испытании ($q = 1–p$);

k — число наступлений события A,

$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k элементов.

Тогда

$$P_4(3)=C_4^3p^3q^1=\frac{4!}{3!\ 1!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2=0{,}4096.$$

б) Событие, заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло не менее трех попаданий в цель, означает, что было либо три попадания, либо четыре. Следовательно, $k = 3, 4$.

Тогда, используя теорему о нахождении вероятности суммы несовместных событий и формулу Бернулли, имеем:

$$P_4(3,\ 4) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0 =$$

$$= 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^4 = 0{,}8192.$$

в) Событие, заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло не более одного попадания в цель, означает, что было либо одно попадание, либо ни одного. Следовательно, $k = 0,\ 1$.

Тогда, используя теорему о нахождении вероятности суммы несовместных событий и формулу Бернулли, имеем:

$$P_4(0,\ 1) = P_4(0) + P_4(1) = C_4^0 p^0 q^4 + C_4^1 p^1 q^3 =$$

$$= 0{,}2^4 + \frac{4!}{1!\ 3!} \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0272.$$

г) Событие, заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло хотя бы одно попадание в цель, означает, что $k \geq 1$, т.е. $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Найдем вероятность противоположного события — в серии из четырех выстрелов нет ни одного попадания в цель, т.е. $k = 0$:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0{,}2^4 = 0{,}0016.$$

Тогда

$$P_4(1,\ 4) = 1 - P_4(0) = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984.$$

Ответ: а) 0,4096, б) 0,8192, в) 0,0272, г) 0,9984.

Задание 2.2. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено:

а) ровно три изделия;

б) менее трех изделий;

в) более трех изделий;

г) хотя бы одно изделие.

Решение

Обозначим событие:

A — изделие повреждено в пути.

По условию: $n = 500$, $p = 0{,}002$.

Так как n велико, а p мало, используем формулу Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

а) Найдем вероятность того, что будет повреждено ровно три изделия, т.е. $k = 3$:

$$P_{500}(3) \approx \frac{e^{-1}}{3!} \approx \frac{0,36788}{6} \approx 0,0613.$$

б) Найдем вероятность того, что будет повреждено менее трех изделий, т.е. $k < 3$ или $k = 0, 1, 2$.

$$P_{500}(0,\ 2) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) \approx \frac{1^0 e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 e^{-1}}{2!} \approx$$

$$\approx e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \approx \frac{5}{2} e^{-1} \approx \frac{5}{2} \cdot 0,36788 \approx 0,9197.$$

в) Найдем вероятность того, что будет повреждено более трех изделий, т.е. $k > 3$ или $k = 4, 5, \ldots, 500$.

Рассмотрим противоположное событие — повреждено не более трех изделий, т.е. $k \le 3$ или $k = 0, 1, 2, 3$.

Тогда

$$P_{500}(4,\ 500) = 1 - P_{500}(0,\ 3) = 1 - \left(P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)\right).$$

Используя результаты, полученные выше, имеем:

$$P_{500}(4,\ 500) \approx 1 - (0,9197 + 0,0613) \approx 0,019.$$

г) Найдем вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие, т.е. $k \ge 1$ или $k = 1, 2, \ldots, 500$.

Рассмотрим противоположное событие — ни одно из изделий не повреждено, т.е. $k = 0$.

Тогда

$$P_{500}(1,\ 500) = 1 - P_{500}(0) \approx 1 - \frac{1^0 e^{-1}}{0!} \approx 1 - e^{-1} \approx 1 - 0,3679 \approx 0,632.$$

Ответ: а) 0,0613, б) 0,9197, в) 0,019, г) 0,632.

Задание 2.3. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

Решение

Обозначим событие: A — деталь высшего сорта.

По условию:

$n = 26$,

$p = 0,4$,

$q = 1 – p = 1 – 0,4 = 0,6$,

$k = 13$.

Найдем вероятность $P_{26}(13)$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Вычислим x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{13 - 26 \cdot 0,4}{\sqrt{26 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} \approx \frac{2,6}{2,498} \approx 1,04.$$

По таблице приложения 3 найдем $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(1,04) \approx 0,2323.$$

Тогда искомая вероятность

$$P_{26}(13) \approx \frac{1}{2,498} \cdot 0,2323 \approx 0,093.$$

Ответ: 0,093.

Задание 3. Дана вероятность $p = 0,8$ появления события A в каждом из 100 независимых испытаний. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится не менее 75 раз и не более 90 раз.

Решение

По условию: $n = 100$,

$p = 0,8$,

$q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$,

$k_1 = 75$,

$k_2 = 90$.

Найдем вероятность $P_{100}(75,\ 90)$.

Так как n большое, воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,5.$$

Тогда

$$P_{100}(75,\ 90) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) \approx \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

Найдем $\Phi(1,25)$, $\Phi(2,5)$ по таблице значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$:

$$\Phi(1,25)\approx 0,3944,$$
$$\Phi(2,5)\approx 0,4938.$$

Тогда искомая вероятность

$$P_{100}(75,\ 90)\approx 0,4938+0,3944\approx 0,8882.$$

Ответ: 0,8882.

Задание 4. Случайная величина X задана рядом распределения (табл. 42):

Таблица 42. Ряд распределения с. в. X

X	–1	6	13	20	27
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение

1. Математическое ожидание дискретной с. в. X найдем по формуле

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i.$$

Получим:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=-1\cdot 0,2+6\cdot 0,1+13\cdot 0,4+20\cdot 0,2+27\cdot 0,1=12,3.$$

2. Дисперсию с. в. X найдем по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Составим ряд распределения с. в. X^2. Для этого возможные значения с. в. X возведем в квадрат, а соответствующие вероятности оставим такими же (табл. 43).

Таблица 43. Ряд распределения с.в. X^2

X^2	1	36	169	400	729
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Найдем математическое ожидание с.в. X^2:

$$M\left(X^2\right)=1\cdot 0,2+36\cdot 0,1+169\cdot 0,4+400\cdot 0,2+729\cdot 0,1=224,3.$$

Тогда

$$D(X)=224,3-(12,3)^2=224,3-151,29=73,01.$$

3. Вычислим среднее квадратическое отклонение с.в. X:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{73,01} \approx 8,5.$$

Ответ: $M(X) = 12,3$, $D(X) = 73,01$, $\sigma(X) = \sqrt{73,01} \approx 8,5$.

Задание 5. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$

Найти:

1) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности);

2) математическое ожидание $M(X)$;

3) дисперсию $D(X)$;

4) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение

1. Дифференциальную функцию распределения $f(x)$ непрерывной с. в. X найдем по формуле

$$f(x) = F'(x).$$

Получим:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 3x^2 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

2. Математическое ожидание непрерывной с. в. X найдем по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Так как функция $f(x)$ при $x < 0$ и при $x > 1$ равна нулю, то имеем

$$M(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

3. Дисперсию $D(X)$ определим по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$ по формуле:

$$M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f\left(x\right)dx.$$

Так как функция $f(x)$ при $x < 0$ и при $x > 1$ равна нулю, то имеем

$$M\left(X^2\right)=\int\limits_0^1 x^2 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1 x^2\cdot 3x^2 dx=\left.\frac{3x^5}{5}\right|_0^1=\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$D\left(X\right)=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}.$$

4. Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$ (рис. 15,16).

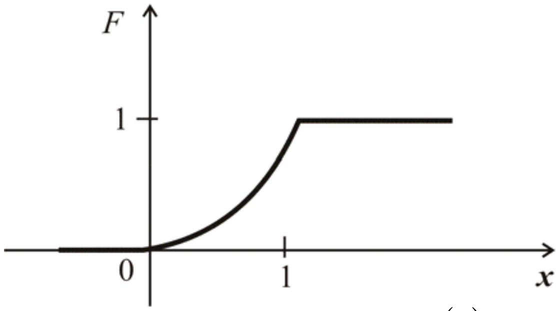

Рис. 15. График функции $y=F\left(x\right)$

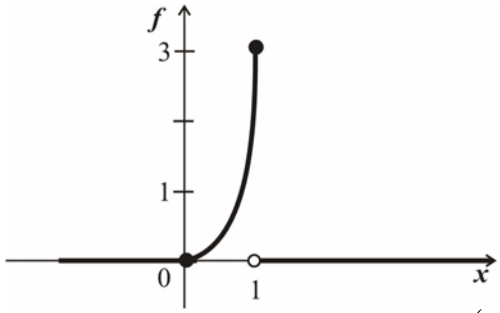

Рис. 16. График функции $y=f\left(x\right)$

7.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №7 «Формулы комбинаторики»

Ответьте на вопросы:

1. Что называют соединениями в комбинаторике?
2. Какие соединения называют размещениями из n элементов по k элементов?
3. По какой формуле находится число размещений с повторением из n элементов по k элементов?
4. По какой формуле находится число размещений без повторений из n элементов по k элементов?
5. Какие соединения называют сочетаниями из n элементов по k элементов?
6. По какой формуле находится число сочетаний из n элементов по k элементов?
7. Какие соединения называют перестановками из n элементов?
8. По какой формуле находится число перестановок из n элементов?
9. Какой вид имеет формула бинома Ньютона?
10. Какой вид имеет треугольник Паскаля?

Решите задачи:

№1. Десять билетов с номерами от 1 до 10 перемешаны на столе экзаменатора. Какова вероятность того, что эти билеты будут вытянуты студентами в порядке возрастания их номеров?

№2. Четыре человека вошли в лифт на первом этаже девятиэтажного дома. Считая, что равновозможен выход каждого пассажира на любом из этажей со второго по девятый, найти вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на разных этажах; б) все пассажиры выйдут выше пятого этажа.

№3. В группе 12 студентов, из которых 5 отличников, выбрали 7 человек. Какова вероятность, что среди них 3 отличника?

№4. Из урны, в которой лежат шесть белых, четыре черных и два красных шара, наугад выбирают четыре шара. Какова вероятность того, что среди них только черные и красные шары?

№5. Из карточек составлено слово ПОБЕДА. Буквы перемешаны. Найти вероятность того, что две наугад выбранные буквы — гласные.

№6. Кодовый замок состоит из пяти барабанов. Каждый барабан имеет 6 граней с цифрами от 1 до 6. Замок откроется, если набрано определенное число. Найти вероятность того, что при случайном наборе пяти цифр замок откроется.

Учебно-исследовательская работа № 7
«Применение теории вероятностей для решения профессионально направленных задач»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение математической статистики в профессиональной деятельности.

8. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

8.1. Индивидуальное домашнее задание №6 «Вариационные ряды»

Базовый уровень

Задание 1.

Заданы результаты обследования (табл. 44–47). Требуется:

1) построить вариационный ряд и гистограмму относительных частот;

2) вычислить выборочную среднюю $\overline{x}_в$, «исправленную» дисперсию s^2, «исправленное» среднее квадратическое отклонение s, коэффициент вариации V, среднее квадратическое отклонение выборочной средней $\sigma_{\overline{x}_в}$;

3) с надежностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней $\overline{x}_Г$.

Таблица 44. Исходные данные для вариантов №1–5

Номер наблюдения	Номер варианта				
	1	2	3	4	5
1	3,1	5,5	3,2	3,8	5,2
2	4,2	5,9	3,8	4,3	6,4
3	5,0	7,5	4,1	4,3	6,7
4	4,6	5,4	4,3	5,1	5,8
5	6,4	3,4	4,3	5,7	5,4
6	5,3	5,2	5,6	6,3	4,7
7	3,8	4,3	6,0	4,8	3,3
8	5,1	4,7	5,7	5,6	5,1
9	4,9	5,8	4,5	6,4	4,6
10	5,4	6,8	5,0	7,2	5,8
11	5,9	4,0	6,7	5,0	6,0
12	6,5	5,7	5,3	5,3	7,1
13	5,5	4,5	5,4	5,1	5,2
14	5,7	5,3	4,7	4,2	5,5
15	4,7	6,3	4,3	3,7	4,7
16	5,6	5,2	5,9	6,0	4,8
17	5,8	4,1	6,5	4,5	5,4
18	7,3	5,1	7,1	4,7	4,9
19	4,7	5,0	3,4	5,7	3,8
20	5,5	6,2	4,6	5,2	5,5

Таблица 45. Исходные данные для вариантов №6–10

Номер наблюдения	Номер варианта				
	6	7	8	9	10
1	27	43	36	39	36
2	32	26	26	32	32
3	31	35	27	27	36
4	32	45	35	36	37
5	28	26	37	32	33
6	37	35	28	34	28
7	35	32	31	26	31
8	26	32	27	23	36
9	28	35	37	28	33
10	32	35	39	36	26
11	39	28	30	36	35
12	34	32	30	28	45
13	30	36	36	31	26
14	37	32	38	30	35

15	26	36	24	32	32
16	27	37	32	24	32
17	40	33	30	38	35
18	35	28	31	36	35
19	37	31	28	30	28
20	28	32	36	30	32

Таблица 46. Исходные данные для вариантов №11–15

Номер наблюдения	Номер варианта				
	11	12	13	14	15
1	6,7	4,6	6,5	5,8	5,1
2	5,3	5,8	5,5	6,8	4,2
3	5,4	6,0	5,7	4,0	3,7
4	4,7	7,1	4,7	5,7	6,0
5	4,3	5,2	5,6	4,5	4,5
6	5,9	5,5	5,8	5,3	4,7
7	6,5	4,7	7,3	6,3	5,7
8	7,1	4,8	4,7	5,2	5,2
9	3,4	5,4	5,5	4,1	3,8
10	4,6	4,9	3,1	5,1	4,3
11	3,2	3,8	4,2	5,0	4,3
12	3,8	5,5	5,0	6,2	5,1
13	4,1	5,2	4,6	5,5	5,7
14	4,3	6,4	6,4	5,9	6,3
15	4,3	6,7	5,3	7,5	4,8
16	5,6	5,8	3,8	5,4	5,6
17	6,0	5,4	5,1	3,4	6,4
18	5,7	4,7	4,9	5,2	7,2
19	4,5	3,3	5,4	4,3	5,0
20	5,0	5,1	5,9	4,7	5,3

Таблица 47. Исходные данные для вариантов №16–20

Номер наблюдения	Номер варианта				
	16	17	18	19	20
1	36	28	26	30	35
2	33	36	28	36	28
3	26	36	32	38	32
4	35	28	39	24	36
5	45	31	34	32	32
6	26	30	30	30	36

7	35	32	37	31	37
8	32	24	26	28	33
9	32	38	27	36	28
10	35	36	40	36	31
11	35	30	35	26	32
12	28	30	37	27	43
13	32	39	28	35	26
14	36	32	27	37	35
15	32	27	32	28	45
16	36	36	31	31	26
17	37	32	32	27	35
18	33	34	28	37	32
19	28	26	37	39	32
20	31	23	35	30	35

Повышенный уровень

Задание 2. Дана выборка значений нормально распределенного признака X (табл. 48). В первой строке таблицы указаны значения признака x_i, во второй – соответствующие им частоты n_i. Найти:

1) выборочную среднюю $\overline{x}_в$;

2) выборочную дисперсию $D_в$;

2) «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение s.

Таблица 48. Исходные данные

Вариант	x_i, n_i	Значения						
1	*2*	*3*						
1	x_i	65	70	75	80	85	90	95
	n_i	3	7	10	40	20	12	8
2	x_i	20	30	40	50	60	70	80
	n_i	5	10	24	31	15	10	5
3	x_i	12	22	32	42	52	62	72
	n_i	4	16	25	40	7	5	3
4	x_i	36	42	48	54	60	66	72
	n_i	4	16	20	40	12	5	3
5	x_i	12	18	24	30	36	42	48
	n_i	2	16	12	50	15	3	2

1	2	3						
6	x_i	7	12	17	22	27	32	37
	n_i	3	7	10	40	20	12	8
7	x_i	9	15	21	27	33	39	45
	n_i	4	10	25	30	16	10	5
8	x_i	10	16	22	28	34	40	46
	n_i	2	14	16	50	10	3	5
9	x_i	18	21	24	27	30	33	36
	n_i	4	16	10	30	15	20	5
10	x_i	8	13	18	23	28	33	38
	n_i	2	8	10	40	20	10	10
11	x_i	6	11	16	21	26	31	36
	n_i	2	25	20	30	5	9	6
12	x_i	6	10	14	18	22	26	30
	n_i	4	10	20	25	18	10	13
13	x_i	12	17	22	27	32	37	42
	n_i	15	10	14	20	14	17	10
14	x_i	16	20	24	28	32	36	42
	n_i	5	10	24	31	15	10	5
15	x_i	15	20	25	30	35	40	45
	n_i	4	6	10	35	12	25	8
16	x_i	11	15	19	23	27	31	35
	n_i	10	14	15	20	15	15	11
17	x_i	30	33	36	39	42	45	48
	n_i	15	10	20	30	14	6	5
18	x_i	21	26	31	36	41	46	51
	n_i	7	11	12	60	5	3	2
19	x_i	27	30	33	36	39	42	45
	n_i	5	15	25	40	7	5	3
20	x_i	40	45	50	55	60	65	70
	n_i	5	15	25	40	7	5	3

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Из крупной партии растений произведена случайная выборка, получено 20 вариант длины стебля (в см): 35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3.

Требуется:

1) построить вариационный ряд и гистограмму относительных частот;

2) вычислить выборочную среднюю $\overline{x}_в$, «исправленную» дисперсию s^2, «исправленное» среднее квадратическое отклонение s, коэффициент вариации V, среднее квадратическое отклонение выборочной средней $\sigma_{\overline{x}_в}$;

3) с надежностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней $\overline{x}_Г$.

Решение

1) Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания:

25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Максимальное значение признака составляет 46,3 см, а минимальное – 25,9 см. Разница между ними равна 20,3 см. Этот интервал надо разбить на определенное количество классов. При малом объеме выборки (20–40 вариант) намечают 5–6 классов. Возьмем длину классового интервала $\Delta x_i = 5$. Получаем пять интервалов: первый 25–30, второй 30–35, третий 35–40, четвертый 40–45, пятый 45–50 (начало первого интервала не обязательно должно совпадать со значением минимальной варианты).

С помощью ранжированного ряда определяем частоту попадания вариант выборки в каждый интервал. В первый интервал попадает два значения (25,9 и 27,0), поэтому $n_1 = 2$. Во второй интервал попадают пять значений, поэтому $n_2 = 5$. Аналогично находим $n_3 = 9$, $n_4 = 3$, $n_5 = 1$.

Определяем относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал:

в первый интервал — $w_1 = \dfrac{n_1}{n} = \dfrac{2}{20} = 0{,}1$;

во второй интервал — $w_1 = \dfrac{n_2}{n} = \dfrac{5}{20} = 0{,}25$;

в третий интервал — $w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{9}{20} = 0{,}45$;

в четвертый интервал — $w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15$;

в пятый интервал — $w_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Сумма $\sum w_i = 1$, следовательно, вычисления выполнены верно.

Определим плотность относительных частот вариант как отношение относительной частоты w_i к длине интервала Δx_i, то есть

$$p_i = \frac{w_i}{\Delta x_i}.$$

Для первого интервала — $p_1 = \frac{w_1}{\Delta x_1} = \frac{0{,}1}{5} = 0{,}02$;

для второго интервала — $p_2 = \frac{w_2}{\Delta x_2} = \frac{0{,}25}{5} = 0{,}05$;

для третьего интервала — $p_3 = \frac{w_3}{\Delta x_3} = \frac{0{,}45}{5} = 0{,}09$;

для четвертого интервала — $p_4 = \frac{w_4}{\Delta x_4} = \frac{0{,}15}{5} = 0{,}03$;

для пятого интервала — $p_5 = \frac{w_5}{\Delta x_5} = \frac{0{,}05}{5} = 0{,}01$.

Результаты выполнения расчетов сводим в таблицу 47:

Таблица 49. Таблица частот, относительных частот, плотности относительных частот

Интервал значений длины стебля Δx_i	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	
Частоты вариант n_i	2	5	9	3	1	$\sum n_i = 20$
Относительные частоты w_i	0,10	0,25	0,45	0,15	0,05	$\sum w_i = 1{,}00$
Плотность относительных частот p_i	0,02	0,05	0,09	0,03	0,01	

Построим гистограмму, показывающую зависимость плотности относительных частот от значения вариант. По горизонтальной оси наносим шкалу возможных значений вариант, по вертикальной оси – плотность относительных частот; величину относительной плотности считаем постоянной внутри соответствующего интервала. Получаем столбчатую диаграмму, называемую гистограммой распределения плотности относительных частот (постройте самостоятельно).

2) Основные выборочные характеристики вычисляются по формулам:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i$$ — выборочная средняя;

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 n_i$$ — «исправленная» выборочная дисперсия;

$$s = \sqrt{s^2}$$ — «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение;

$$\sigma_{\overline{x}_в} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$ — среднее квадратическое отклонение выборочной средней;

$$V = \frac{s}{\left|\overline{x}_в\right|}\cdot 100\%$$ — коэффициент вариации.

Расчеты $\overline{x}_в$ и s^2 удобно проводить с помощью таблицы50:

Таблица 50. Расчетная таблица выборочных характеристик

Варианта x_i	Частота варианты n_i	$x_i n_i$	$\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 n_i$
1	*2*	*3*	*4*
25,9	1	25,9	104,04
27,0	1	27,0	82,81
30,8	1	30,8	28,09
31,3	1	31,3	23,04
33,4	1	33,4	7,29
33,7	1	33,7	5,76
34,2	1	34,2	3,61
35,3	2	70,6	1,28
35,5	1	35,5	0,36
35,9	2	71,8	0,08
37,4	1	37,4	1,69
38,4	1	38,4	5,29
38,6	1	38,6	6,25
38,8	1	38,8	7,29
40,9	1	40,9	23,04
42,7	1	42,7	43,56
44,1	1	44,1	64,00
46,2	1	46,2	102,01
$\sum$		721,3	509,49

Найдем выборочную среднюю:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{20} \cdot 721{,}3 \approx 36{,}1 \text{ см.}$$

Вычислим «исправленную» выборочную дисперсию:

$$s^2 \approx \frac{1}{20-1} \cdot 509{,}49 \approx 26{,}8 \text{ см}^2$$

Найдем «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$s \approx \sqrt{26{,}8} \approx 5{,}2 \text{ см.}$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение выборочной средней:

$$\sigma_{\overline{x}_в} \approx \frac{5{,}2}{\sqrt{20}} \approx 1{,}2 \text{ см.}$$

Найдем коэффициент вариации:

$$V \approx \frac{5{,}2}{36{,}1} \cdot 100\% \approx 14{,}4\%.$$

Так как $10\% < V < 20\%$, то изменчивость длины стебля следует считать средней.

3) Доверительный интервал для оценки генеральной средней определяется следующим неравенством

$$\overline{x}_в - t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в} < \overline{x}_Г < \overline{x}_в + t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в},$$

где величина t_γ при заданной надежности γ определяется с помощью таблицы приложения 1. В нашем примере

$$t_\gamma = t(\gamma; n) = t(0{,}95;\ 20) = 2{,}10.$$

Вычислим радиус доверительного интервала:

$$t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в} \approx 2{,}1 \cdot 1{,}2 = 2{,}52 \approx 2{,}5 \text{ см.}$$

Таким образом, с надежностью 95% можно утверждать, что во всей партии растений средняя длина стебля (генеральная средняя) заключена в пределах от $\overline{x}_в - t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в} \approx 36{,}1 - 2{,}5 \approx 33{,}6$ см (гарантированный минимум) и $\overline{x}_в + t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в} \approx 36{,}1 + 2{,}5 \approx 38{,}6$ см (возможный максимум). То есть доверительный интервал для оценки генеральной средней задается неравенством

$$33{,}6 \text{ см} < \overline{x}_Г < 38{,}6 \text{ см}.$$

Ответ: $\overline{x}_в \approx 36{,}1$ см, $s^2 \approx 26{,}8$ см^2, $s \approx 5{,}2$ см, $\sigma_{\overline{x}_в} \approx 1{,}2$ см, $V \approx 14{,}4$ %, $33{,}6 \text{ см} < \overline{x}_Г < 38{,}6 \text{ см}$.

Повышенный уровень

Задание 2. Дана выборка значений нормально распределенного признака X (в первой строке таблицы указаны значения признака x_i, во второй – соответствующие им частоты n_i) (табл.51).

Таблица 51. Исходные данные

x_i	20	30	40	50	60	70	80
n_i	4	11	25	30	15	10	5

Найти методом произведений выборочную среднюю $\overline{x}_в$; выборочную дисперсию $D_в$; «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение s.

Решение

Для нахождения выборочной средней $\overline{x}_в$ и выборочной дисперсии $D_в$ составим расчетную таблицу, для чего:

а) запишем варианты x_i в первый столбец, частоты n_i — во второй столбец;

б) в качестве «ложного нуля» C берем варианту 50 (она имеет наибольшую частоту); в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей варианту 50, пишем 0; над нулем последовательно записываем условные варианты –1, –2, –3, а под нулем – последовательно 1, 2, 3;

в) в четвертый столбец записываем произведения частот n_i на условные варианты u_i, то есть $n_i u_i$; находим сумму этих произведений и записываем ее в нижнюю клетку столбца;

г) в пятый столбец записываем произведения частот n_i на квадраты условных вариант u_i^2, то есть $n_i u_i^2$; сумму чисел столбца помещаем в его нижнюю клетку;

д) в шестой (контрольный) столбец записываем произведения $n_i(u_i+1)^2$; сумму чисел столбца помещаем в его нижнюю клетку.

В итоге получаем расчетную таблицу (табл. 52):

Таблица 52. Расчетная таблица

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
20	4	-3	-12	36	16
30	11	-2	-22	44	11
40	25	-1	-25	25	0
50	30	0	0	0	30
60	15	1	15	15	60
70	10	2	20	40	90
80	5	3	15	45	80
	$n=100$		$\sum n_i u_i = -9$	$\sum n_i u_i^2 = 205$	$\sum n_i(u_i+1)^2 = 287$

Контроль:

$$\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 205 - 18 + 100 = 287.$$

$$\sum n_i\left(u_i+1\right)^2 = 287.$$

Совпадение найденных сумм свидетельствует о том, что вычисления произведены правильно.

Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1 = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{-9}{100} = -0{,}09;$$

$$M_2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{205}{100} = 2{,}05.$$

Найдем шаг h (разность между двумя соседними вариантами):

$$h = 30 - 20 = 10.$$

Найдем выборочную среднюю:

$$\overline{x}_в = M_1 h + C = -0{,}09 \cdot 10 + 50 = 49{,}1.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_в = \left(M_2 - M_1^2\right)\cdot h^2 = \left(2{,}05 - (-0{,}09)^2\right)\cdot 10^2 = 204{,}19.$$

Найдем «исправленную» выборочную дисперсию:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{100}{99}\cdot 204{,}19 \approx 206{,}25.$$

Найдем «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{206{,}25} \approx 14{,}36.$$

Ответ: $\overline{x}_в = 49{,}1$, $D_в = 204{,}19$, $s = \sqrt{206{,}25} \approx 14{,}36$.

8.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №8 «Точечные и интервальные оценки параметров распределения»

Ответьте на вопросы:

1. Что называют статистическими оценками параметров генеральной совокупности?
2. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется точечной?
3. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется несмещенной?
4. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется состоятельной?
5. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется эффективной?
6. Какая статистическая оценка является несмещенной и состоятельной оценкой генеральной средней? По какой формуле она находится?
7. Какая статистическая оценка является состоятельной, но смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности? По какой формуле она находится? При каких объемах выборки ее обычно используют?
8. Какая статистическая оценка является состоятельной и несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности? По какой формуле она находится? При каких объемах выборки ее обычно используют?
9. По каким формулам вычисляют дисперсию и среднее квадратическое отклонение выборочной средней для повторной и бесповторной выборки?
10. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется интервальной?
11. Что называют доверительным интервалом и надежностью оцениваемого параметра генеральной совокупности?
12. Какое неравенство задает доверительный интервал для генеральной средней при заданной надежности γ и неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности в случае ее нормального распределения и объеме выборки $n \leq 30$?
13. Какое неравенство задает доверительный интервал для генеральной средней при заданной надежности γ и известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности в случае ее нормального распределения объеме выборки $n > 30$?

Решите задачи:

№1. Из генеральной совокупности извлечена выборка (табл. 53).

Таблица 53. Исходные данные

x_i	0	1	2	5
n_i	12	3	4	2

Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

№2. Из 1500 деталей отобрано 250. Вычислена точечная оценка генеральной средней $\overline{x}_в = 8,44$ и точечная оценка генеральной дисперсии $s^2 = 0,042$. Найти дисперсию $\sigma^2_{\overline{x}_в}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\overline{x}_в}$ оценки $\overline{x}_в$ для повторного и бесповторного отбора.

№3. Из партии в 5000 электрических ламп было отобрано 300 по схеме бесповторной выборки. Средняя продолжительность горения ламп в выборке оказалась равной 1450 часов. Найти с надежностью $\gamma = 0,9996$ доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 20$ ч. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределена нормально.

№4. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены выборочная средняя $\overline{x}_в = 30,1$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0,99$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Учебно-исследовательская работа № 8
«Применение математической статистики для решения профессионально направленных задач»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение математической статистики в профессиональной деятельности.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основная литература

1. Марусич, А.И. Математика [Текст] : учебник для с.-х. вузов / А.И. Марусич ; Костромская ГСХА. Каф. высшей математики. – Караваево : Костромская ГСХА, 2014. – 218 с.
2. Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Журбенко Л.Н., ред. ; Данилов Ю.М., ред. – М : ИНФРА-М, 2013. – 496 с.
3. Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. – 4-е изд., испр. и доп. – М : Юрайт, 2013. – 607 с.

Дополнительная литература

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 8-е изд., стереотип. – Москва : Высшая школа, 2002. – 479 с.
2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., доп. – Москва : Высшая школа, 2003. – 405 с.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. [Текст] . Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – 6-е изд. – М : Айрис-пресс, 2011. – 288 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. [Текст] : тридцать пять лекций. Ч. 2. – 5-е изд. – Москва : Айрис-Пресс, 2008. – 256 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Правила и формулы дифференцирования

Функция простого аргумента	*Сложная функция*
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(\mathrm{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\mathrm{tg} u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\left(\mathrm{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\mathrm{ctg} u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\left(\mathrm{arcctg} u\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
Основные правила дифференцирования	
$C' = 0$	$\left(u+v\right)' = u' + v'$
$\left(Cu\right)' = Cu'$	$\left(u-v\right)' = u' - v'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Приложение 2

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int u^a du = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$

2. $\int du = u + C$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u du = e^u + C$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u du = \sin u + C$

8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C$

10.1. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + C$

12.1. $\int \dfrac{du}{1 + u^2} = \mathrm{arctg}\, u + C$

13. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u - a}{u + a}\right| + C$

Дополнительные формулы

1. $\int tg\, u du = -\ln|\cos u| + C$

2. $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C$

3. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C$

4. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| + C$

Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 4

$$\text{Значения функции } \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Окончание приложения 4

1	2	3	4	5	6	7	8
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,49999997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961	∞	0,5
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		

Учебно-методическое издание

Математика : учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы / сост. Л.Б. Рыбина, Л.Ю. Головина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2021. — 146 с. ; 20 см. — 50 экз. — Текст непосредственный.

Компьютерная вёрстка Е.В. Рябикова
Корректор Т.В. Кулинич