§1. Криволинейные интегралы первого рода

1.1. Основные понятия

1°. Прежде чем дать определение криволинейного интеграла первого рода, рассмотрим следующую задачу. *Имеется кривая AB длиной l. Пусть на кривой AB непрерывным образом распределена масса с плотностью $\rho(x,y)$. (Средней плотностью дуги мы называем отношение ее массы к ее длине.) Плотность $\rho(x, y)$ кривой AB в точке (x, y) есть предел средней плотности бесконечно малой дуги, стягивающейся в упомянутую точку). Требуется найти массу m кривой AB.*

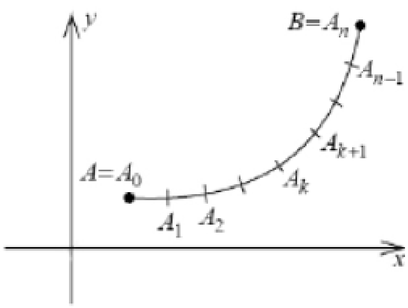

Рис.1.

Разбиваем кривую AB точками $A = A_0$, A_1, A_2, … , A_{n-1}, $A_n = B$ произвольным образом на n частичных дуг $A_k A_{k+1}$ ($k = 0,1,2, \ldots , n-1$) длинами l_0, l_1, l_2, … l_k … l_{n-1}. Полагаем $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} l_k$. Предполагаем частичные дуги $A_k A_{k+1}$ столь малыми, что на дуге $A_k A_{k+1}$ плотность распределения массы ρ вдоль этой дуги можно приближенно считать постоянной, равной $\rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$, где точка $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$ любая, принадлежащая дуге $A_k A_{k+1}$.

Тогда масса Δm_k частичной дуги $A_k A_{k+1}$ кривой AB будет приближенно выражаться формулой $\Delta m_k = \rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\ l_k$. Масса m всей кривой AB будет выражаться приближенно суммой $m \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} \rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\ l_k$. Интуитивно ясно, что чем мельче частичные дуги $A_k A_{k+1}$, тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая частичную дугу $A_k A_{k+1}$ однородной. Поэтому за массу m кривой AB естественно принять: $m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\ l_k$.

2°. Дадим теперь определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть на плоскости расположена спрямляемая кривая L длиной l, имеющая концы в точках A и B, и пусть во всех точках кривой определена функция $f(x, y)$.

Проделаем следующие операции.

1. Разобьем кривую AB точками $A = A_0$, A_1, A_2, … , A_{n-1}, $A_n = B$ произвольным образом на n частичных дуг $A_k A_{k+1}$ ($k = 0,1,2, \ldots , n-1$) длинами l_k. Полагаем $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} l_k$.

2. На каждой дуге $A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$ и вычисляем в ней значение функции f, т. е. находим $f(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на длину соответствующей частичной дуги: $f(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\ l_k$, где ($k = 0,1,2, \ldots , n-1$).

4.Складываем все такие произведения. Получаем сумму $\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\ \ l_k$,

эта сумма называется интегральной суммой для функции f(x, y) по кривой AB.

5.Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim_{\lambda \to 0} \sigma$.

Криволинейным интегралом первого рода *от функции f по кривой L называется конечный предел интегральной суммы* $\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\ \ l_k$*,если он существует, не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек* $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$*:* $\int_L f(x,y)dl = \int_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\ \ l_k$.

Замечание 1. Принимая во внимание определение криволинейного интеграла первого рода, можно заключить, что в задаче пункта 1° масса m кривой AB

определяется по формуле: m= $\int_{AB} \rho(x,y)dl$ *(физический смысл криволинейного интеграла первого рода).*

Замечание 2 . Аналогично определяется криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой L: $\int_l f(x,y,z)dl$.

Теорема (Условие существования криволинейного интеграла первого рода). *Если функция f(x,y) непрерывна а каждой точке гладкой кривой, то криволинейный интеграл первого рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения на части, ни от выбора точек на них.*

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода:

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования: $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$.
2. Линейность: $\int_{AB} Cf(x,y)dl = C\int_{AB} f(x,y)dl$, где C=const.
3. Аддитивность: если путь интегрирования L разбит на части L_1 и L_2, такие, что $L=L_1 \cup L_2$. При этом L_1 и L_2 имеют единственную общую точку, то $\int_L f(x,y)dl = \int_{L_1} f(x,y)dl + \int_{L_2} f(x,y)dl$.
4. Монотонность: если для точек кривой L выполнено неравенство f(x,y) ≤ g(x,y), то $\int_L f(x,y)dl \le \int_L g(x,y)dl$.
5. Теорема о среднем: Если функция f(x,y) непрерывна на кривой AB длиной l, то на этой кривой AB найдется точка(x_0, y_0) такая, что

$$\int_{AB} f(x,y)dl = l \cdot f(x_0, y_0)$$

1.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая AB **задана параметрическим уравнением** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha; \beta]$, где x(t) и y(t) – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем $(x(\alpha), y(\alpha)) = A$, $(x(\beta), y(\beta)) = B$, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$$

- Если кривая AB **явно задана** уравнением y=f(x), $x \in [a;b]$, где f(x) – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} f(x, f(x))\sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx.$$

Пример 1.

Вычислить $\int_L (x + y)dl$, где L - контур треугольника с вершинами в точках $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, где L_1- отрезок AB, L_2- отрезок BO, L_3- отрезок OA; по свойству аддитивности получаем:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{AB} f(x,y)dl + \int_{BO} f(x,y)dl + \int_{OB} f(x,y)dl.$$

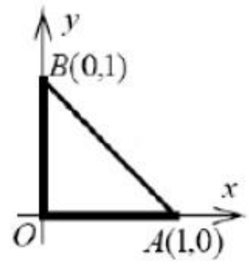

Рис.2

Решение.

1) Рассмотрим L_1- отрезок AB: подставим координаты точек в уравнение: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, $\frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - 0}{1 - 0}$. Получаем уравнение прямой AB: y=1-x, $x \in [0;1]$, $y' = -1$. Следовательно:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_0^1 (x + 1 - x)\sqrt{1 + (-1)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{2}dx = \sqrt{2}x\Big|_0^1 = \sqrt{2};$$

2) Рассмотрим L_1- отрезок BO: уравнение прямой BO: x=0, $y \in [0;1]$, $x' = 0$, следовательно:

$$\int_{BO} f(x,y)dl = \int_0^1 (x + y)\sqrt{1 + (x')^2}\,dy = \int_0^1 (0 + y)dy = \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2};$$

3) Рассмотрим L_1- отрезок OA: уравнение прямой OA: y=0, $x \in [0;1]$, $y' = 0$, следовательно:

$$\int_{OB} f(x,y)dl = \int_0^1 (x+y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^1 (x+0)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\int_L f(x,y)dl = \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

§2. Криволинейные интегралы второго рода

2.1.Основные понятия.

1°. Прежде чем дать определение криволинейного интеграла второго рода, рассмотрим следующую задачу. *Пусть в каждой точки кривой AB длиной l определена некоторая сила* $\vec{F}(x,y)$, *и под действием этой силы происходит перемещение точки по кривой AB от точки A до точки B. Необходимо определить работу, которую при этом выполняет сила поля.*

Замечание. Если направление силы $\vec{F}$ совпадает с направлением перемещения $\vec{s}$ по прямой, то работа A= $F\ s$. Если перемещение происходит по прямой, не совпадающей с направление силы $\vec{F}$, то работа равна скалярному произведению векторов $A = Fs\cos\phi = (\vec{F},\vec{s})$.

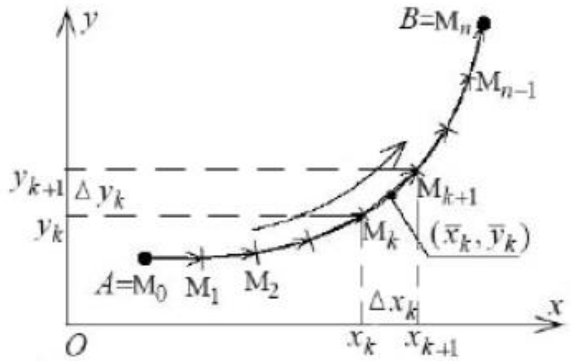

Рис.6

Разбиваем кривую AB точками $A=M_0,\ M_1,\ M_2,\ \dots\ ,\ M_{n-1},\ M_n = B$ произвольным образом на n частичных дуг $M_k\,M_{k+1}$ (k=0,1,2, … , $n-$ 1). Точки M_k следуют друг за другом вдоль кривой AB в направлении от точки A к точке B. Если частичные дуги $M_k\,M_{k+1}$ достаточно малы, то приближенно каждую из них можно заменить отрезком стягивающим концы, и можно предположить, что в силу малости частичных дуг, значение $\vec{F}$ в пределах частичной дуги остается постоянной и равной значению $\vec{F}(\overline{x}_k,\overline{y}_k)$ в одной из точек $(\overline{x}_k,\overline{y}_k)$ этой частичной дуги $M_k\,M_{k+1}$.

$\vec{s}_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j}$, где $x_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = y_{k+1} - y_k$, тогда

$A_k = (\vec{F}(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\ ,\ \vec{s}_k)$ – работа, которую выполняет сила $\vec{F}$ на частичной дуге $M_k\,M_{k+1}$.

Пусть $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\cdot\vec{i}+Q(x,y)\cdot\vec{j}$, где $P(x,y)$ проекция $\vec{F}$ силы на ось Ох, где $Q(x,y)$ проекция $\vec{F}$ силы на ось Оу.

Тогда $\vec{F}(\overline{x}_k,\overline{y}_k)=P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\vec{i}+Q(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\vec{j}$,

$A_k=(\vec{F}(\overline{x}_k,\overline{y}_k),\ \ \vec{s}_k)=P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ x_k+Q(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ y_k$.

$$A\approx\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ x_k+Q(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ y_k\right\rfloor,$$

для более точного значения надо уменьшать частичные дуги.

Получим формулу: $A_k=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left\lfloor P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ x_k+Q(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ y_k\right\rfloor$.

2°. Дадим теперь определение криволинейного интеграла второго рода.

Пусть в каждой точке кривой *AB* определена функция $P(x,y)$. Проделаем следующие операции.

1. Разобьем кривую *AB* точками $A=M_0, M_1, M_2,\dots, M_{n-1}, M_n=B$ произвольным образом на *n* частичных дуг $M_k M_{k+1}$ ($k=0,1,2,\ \dots\ , n-1$). Точки M_k следуют друг за другом вдоль кривой *AB* в направлении от точки *A* к точке *B*.

2. На каждой дуге $M_k M_{k+1}$ выберем точку $(\overline{x}_k,\overline{y}_k)$ и найдем значение функции в этой точке $P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)$.

3. Составим сумму $\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1}P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ x_k$, где $\ \ x_k=x_{k+1}-x_k$ - проекция дуги $M_k M_{k+1}$ на ось Ох. Пусть $\lambda=\max\limits_{0\le k\le n-1}\ \ x_k$.

Сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-1}P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ x_k$ *называется интегральной суммой для функции* $P(x,y)$ *по координате x.*

4. Измельчаем дробление так чтобы $\lambda\to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$.

Криволинейным интегралом по координате *x* *от функции* $P(x,y)$ *по кривой AB называется конечный предел интегральной суммы* $\sum\limits_{k=0}^{n-1}P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ x_k$, *не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек* $(\overline{x}_k,\overline{y}_k)$: $\int\limits_{AB}P(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ x_k$.

Аналогично определяется криволинейный интеграл от функции $Q(x,y)$ по координате у: $\int\limits_{AB}Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}Q(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\ \ y_k$, где

$\ \ y_k=y_{k+1}-y_k$ - проекция дуги $M_k M_{k+1}$ на ось Оу.

Криволинейным интегралом общего вида второго рода (по координатам) *называется интеграл*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy.$$

Замечание 1. Принимая во внимание определение криволинейного интеграла второго рода, можно заключить, что в задаче пункта 1° работа, которую выполняет сила поля по кривой AB определяется по формуле: $A=\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *(физический смысл криволинейного интеграла второго рода).*

Теорема (Условие существования криволинейного интеграла второго рода). *Если кривая AB гладкая, а функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны в каждой точке кривой AB, то криволинейный интеграл второго рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения на части, ни от выбора точек на них.*

Основные свойства криволинейного интеграла второго рода:

1. Криволинейный интеграл второго рода зависит от направления пути интегрирования: $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$.
2. Если кривая AB точкой C разбита на части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям: $\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}$.
3. Если кривая AB - прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости Oxy и перпендикулярный к оси Ox. Тогда $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ =0. Если кривая AB - прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости Oxy и перпендикулярный к оси Оу, тогда $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ =0.

Замечание 1. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L обозначается $\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Замечание 2. При вычислении криволинейного интеграла по замкнутому контуру положительным направлением считается такой обход контура, при котором область, ограниченная контуром, остается слева. При простом контуре - это движение против часовой стрелки.

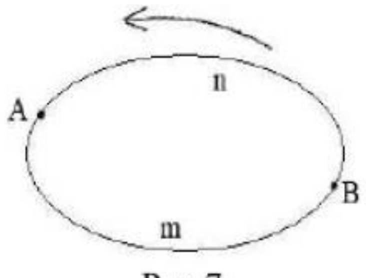

Рис.7

4. Если кривая AB - замкнутый контур, то криволинейный интеграл не зависит от выбора начальной точки на этом контуре, а зависит только от направления обхода:

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint\limits_{AmBnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$\oint\limits_{BnAmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

2.2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла.

- Если кривая AB **задана параметрическим уравнением** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем $(x(\alpha), y(\alpha)) = A$, $(x(\beta), y(\beta)) = B$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

- Если кривая AB **явно задана** уравнением y=f(x), $x \in [a;b]$, где f(x) – непрерывно дифференцируемая функция, и ее производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x, f(x)) + Q(x, y(x))f'(x))dx.$$

Пример 1. . Вычислить $\int\limits_{L} xdy - ydx$, где L – окружность радиуса R с центром в начале координат, которая обходится против часовой стрелки.

Решение. Окружность имеет параметрические уравнения: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, при $t \in [0;2\pi]$.

$$\int\limits_{L} xdy - ydx = \int\limits_{0}^{2\pi} (R\cos t \; R\cos t - R\sin t \cdot (-R\sin t))dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} (R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t)dt == \int\limits_{0}^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{L} (xy - 1)dx + x^2 ydy$, где L – отрезок от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$, по прямой AB.

Решение. Рассмотрим L- отрезок AB: подставим координаты точек в уравнение: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, $\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{4 - 2}$. Получаем уравнение прямой AB: $y=2x$, $x \in [1;2]$. Т. к $dy = y'dx = 2dx$, то

$$\int_L (xy-1)dx + x^2 y dy = \int_1^2 (x \cdot 2x - 1)dx + x^2 2x \cdot 2dx =$$

$$\int_1^2 (2x^2 - 1 + 4x^3)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - x + x^4\right)\Bigg|_1^2 = \frac{56}{3}.$$

2.3. Формула Остроградского-Грина

Рассмотрим криволинейные интегралы второго рода вида $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где L -замкнутый самонепересекающийся контур, расположенный в плоскости Oxy.

Область, ограниченная одним замкнутым самонепересекающимся контуром, называется **односвязной**.

Если на контуре L выбрать какое-нибудь направление интегрирования, то оказывается безразличным, какую точку на L взять за начало (а значит, и конец) пути интегрирования (см. рис 7). При вычислении криволинейного интеграла по замкнутому контуру используют положительное направление.

Теорема: *Если кривая L- замкнутая граница области D, а функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *в замкнутой области D (включая границу L), то справедлива* ***формула Остроградского-Грина****:*

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

. Причем интегрирование производится вдоль кривой L в положительном направлении.

2.4.Криволинейные интегралы второго рода, независимые от пути интегрирования

В некоторых случаях криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от того, каким образом линия интегрирования соединяет начальную A и конечную B точки плоскости. Важность этого свойства вытекает из его интерпретации как работы по перемещению материальной точки в силовом поле $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\cdot\vec{i} + Q(x,y)\cdot\vec{j}$ вдоль кривой L. Поэтому независимость криволинейного интеграла от способа соединения начальной и конечной точек кривой интегрирования эквивалентна независимости работы в соответствующем силовом поле от пути материальной точки (силовое поле является потенциальным, т. е. в нем выполняется закон сохранения энергии).

Если точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ односвязной области D можно соединить различными кривыми, и значение интегралов $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по всевозможным кривым AB одинаково, то ***криволинейный интеграл второго рода*** *называется* ***независимым от пути интегрирования*** *и обозначается* $\int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Теорема (Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования). *Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, в которой функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.*

Следствие 1. *Если криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования и точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ – начальных и конечных точек кривой интегрирования, то подынтегральное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x,y)$ и справедлива формула:*

$$\int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} dU(x,y) = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1).$$

Следствие 2. *Если подынтегральное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции, и L - замкнутый путь интегрирования, то $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.*