Геометрические применения определенного интеграла.

Из геометрических применений определенного интеграла рассмотрим вычисление: площадей плоских фигур, объемов тел вращения и длин дуг плоских кривых. Все задачи будем рассматривать в прямоугольной системе координат.

1. Площадь криволинейной трапеции

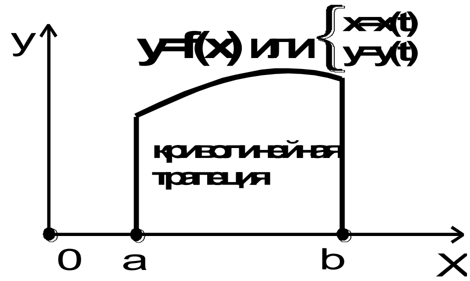

Рис. 3.

$$S_{кр.тр.} = \int_a^b y dx = \left[\begin{array}{l} \int_a^b f(x)dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27) \\ \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28) \end{array} \right.$$

Например, для криволинейной трапеции

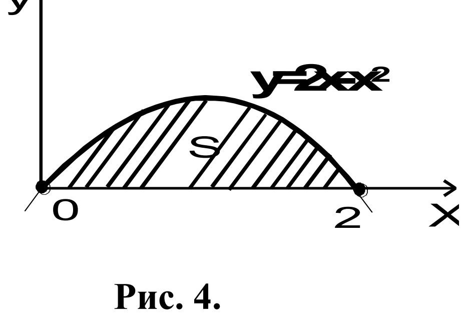

Рис. 4.

$$S=\int_0^2(2x-x^2)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$

При вычислении площади произвольной плоской фигуры, ее заменяют на сумму или разность площадей криволинейных трапеций и используют формулы (27), (28).

Например, для фигуры, изображенной на рисунке 5

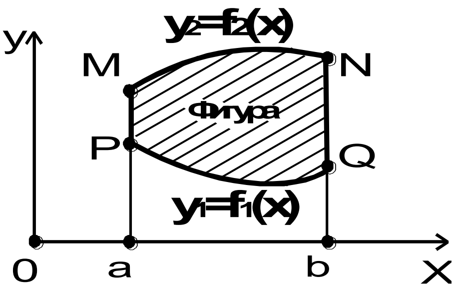

Рис. 5.

получим

$$S_{фиг.}=S_{aMNb}-S_{aPQb}=\int_a^b y_2dx-\int_a^b y_1dx,$$

или

$$S_{фиг.}=\int_a^b (y_2-y_1)dx=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx \qquad (29)$$

Замечание. Формула (29) остается справедливой при любом расположении системы координат относительно фигуры

Пример. 35. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: y=0, $y=-x^2-5x$ и y=-x+4.

Решение.

Построив линии, получим фигуру

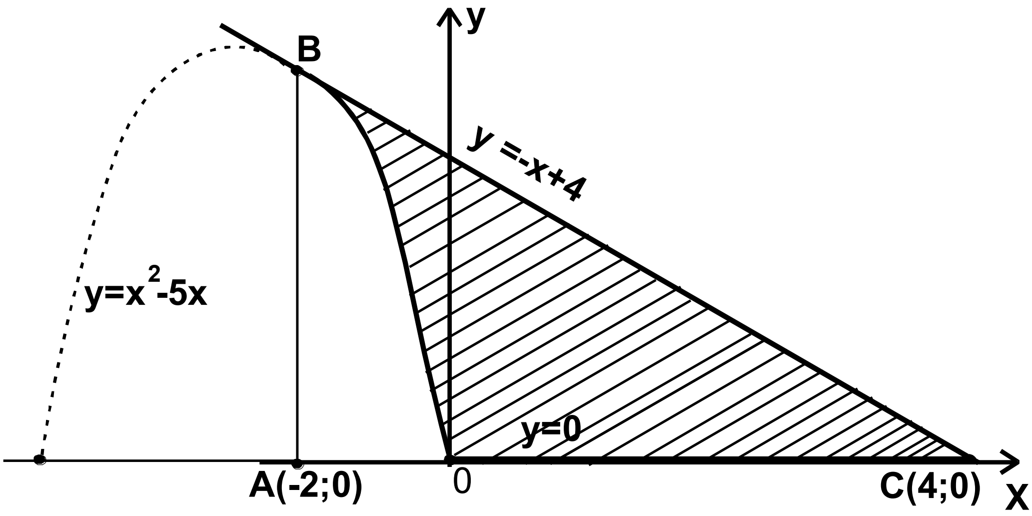

Рис. 6.

Абсциссы точек пересечения находим решая соответствующие системы.

Для точки B: $\begin{cases} y = -x + 4, \\ y = -x^2 - 5x \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = -2.$

Для точки C: $\begin{cases} y = 0, \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4.$

Тогда

$$S_{фиг.} = S_{\Delta ABC} - S_{AOB} = \int_{-2}^{4} (-x+4)dx - \int_{-2}^{0} (-x^2 - 5x)dx =$$

$$= 18 - \left(-\frac{8}{3} + 10 \right) = 10\frac{2}{3}.$$

Замечание. Площадь ΔABC можно было найти и без интеграла, как площадь прямоугольного треугольника: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$.

Ответ : $S_{фиг.} = 10\frac{2}{3} кв.ед.$

1. Аналогично вычисляют объемы тел, полученных при вращении криволинейной трапеции вокруг координатной оси.

При вращении криволинейной трапеции (рис.7) вокруг оси Ох

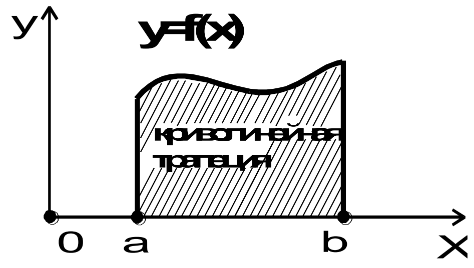

Рис. 7.

объем тела вращения находят по формуле:

$$V_{т.вр.Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx, \qquad (30)$$
$$где...y = f(x).$$

При вращении криволинейной трапеции (рис.8) вокруг оси Оу

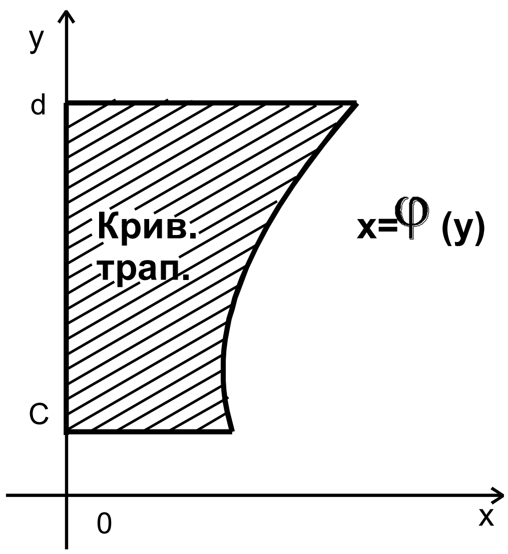

Рис. 8.

объем тела вращения находят по формуле:

$$V_{т.вр.Oy} = \pi \int_c^d x^2 dy, \qquad (31)$$
$$где...x = \varphi(y).$$

Замечание. При вычислении объемов тел, полученных при вращении вокруг координатных осей произвольных фигур, поступают точно так же, как и при вычислении площадей.

Пример 36. Фигура, ограниченная линиями $y^2=8x$ и $x^2=y$, вращается вокруг оси Ох. Вычислить объем получающегося при этом тела вращения.

Решение. Найдем сначала координаты точек пересечения линий.

$$\begin{cases} y^2 = 8x, \\ x^2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^4 = 8x, ..x^4 - 8x = 0, \\ x(x^3 - 8) = 0, \\ x_1 = 0, ..x_2 = 2 \Rightarrow ....O(0;0), A(2;4) \\ y_1 = 0, ..y_2 = 4 \end{array}$$

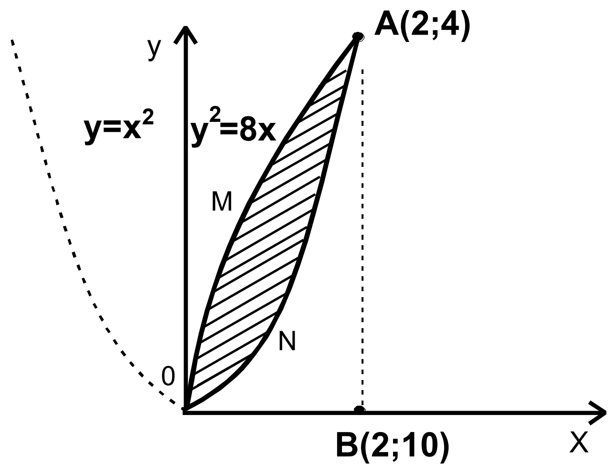

Рис. 9.

$V_{т.вр.Ox}=V_{OMABO}-V_{ONABO}$. По формуле (30) находим:

$$V_{OMABO} = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 8xdx = \pi \cdot 4x^2 \Big|_0^2 = 16\pi,$$

$$V_{ONABO} = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

Следовательно, $V_{т.вр.Ox} = 16\pi - \frac{32}{5}\pi = 9\frac{2}{5}\pi(куб.ед)$.

3. **Длину дуги кривой** вычисляют по формулам:

$$\mathbf{l}_{\cup AB} = \int_a^b \sqrt{\mathbf{1} + (\mathbf{y}')^2}\,\mathbf{dx}.., \text{если на} \cup \mathrm{AB}: \begin{cases} \mathrm{y} = \mathrm{f(x)}, \\ \mathrm{a} \le \mathrm{x} \le \mathrm{b}, \end{cases} \qquad (32)$$

или

$$\mathbf{l}_{\cup AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\mathbf{x}_t')^2 + (\mathbf{y}_t')^2}\,\mathbf{|dt|} \quad , \text{если на} \cup \mathrm{AB}: \begin{cases} \mathrm{x} = \varphi(\mathrm{t}), \\ \mathrm{y} = \psi(\mathrm{t}) \end{cases} \qquad (33)$$

$$и..t..изменяется$$
$$от..t_1..до..t_2.$$
$$При..этом..|dt| = dt, если..t_1 < t_2$$
$$и..|dt| = -dt, если..t_1 > t_2$$

<u>Пример</u> 37. Найти длину дуги кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ при изменении параметра t от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Для решения задачи следует воспользоваться формулой (33). Так как

$$x = 4\cos t, y = 4\sin t, \Rightarrow то..x_t' = -4\sin t, y_t' = 4\cos t, то$$

$$l_{\cup AB} = \int_0^{\pi/4} \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2} \cdot |dt| = 4\int_0^{\pi/4} dt = \pi.$$

Ответ: $l_{\cup AB} = \pi$ лин.ед.