ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ОРГАНИЗАЦИИ КОНТАКТНОЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Для студентов 1-го курса
направления подготовки 38.03.01 Экономика,,
направленность «Финансы и кредит»,
«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,
«Экономическая безопасность»
очной формы обучения

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2021

УДК 512(076)
ББК 22.1
М

Составители: сотрудники кафедры высшей математики Костромской ГСХА канд. филос. наук, доцент кафедры *Л.Б. Рыбина*, канд. эконом. наук, доцент кафедры *А.Е. Березкина*.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, д-р экон. наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Костромской ГСХА *В.И. Цуриков*, д-р пед. наук, доцент, профессор кафедры физики и автоматики Костромской ГСХА *И.А. Мамаева*

Рекомендовано методической комиссией архитектурно-строительного факультета в качестве учебно-методического пособия по организации контактной и самостоятельной работы и выполнению расчетно-графической работы для студентов 1-го курса направления подготовки 38.03.01 Экономика, направленность «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Экономическая безопасность» очной формы обучения

М **Математический анализ :** учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы и выполнению расчетно-графической работы / сост. Л.Б. Рыбина, А.Е. Березкина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2021. — 79 с. ; 20 см. – 50 экз. – Текст непосредственный.

Издание содержит задания для контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, расчетно-графической работы, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями, вопросы и задания для самостоятельного изучения учебного материала, список рекомендуемой литературы.

Учебно-методическое пособие предназначено для организации контактной и самостоятельной работы для студентов 1-го курса направления подготовки 38.03.01 Экономика, направленность «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Экономическая безопасность» очной формы обучения.

УДК 512(076)
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы и выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Математический анализ» предназначено для студентов 1-го курса направления подготовки 38.03.01 Экономика, направленность «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Экономическая безопасность» очной формы обучения.

Издание содержит задания для контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, расчетно-графической работы, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями, вопросы и задания для самостоятельного изучения учебного материала, список рекомендуемой литературы.

Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) и расчетно-графическая работа (РГР) являются одной из основных форм текущего контроля самостоятельной работы студентов. ИДЗ и РГР содержат комплект заданий, выполняя которые, студенты должны продемонстрировать умение решать типовые задачи и проводить типовые расчеты. Сроки выполнения ИДЗ и РГР указываются в рейтинг-плане.

Цель ИДЗ и РГР — помочь студентам закрепить и отработать материал, изученный на лекциях и практических занятиях. Для достижения этой цели задания подобраны таким образом, чтобы они охватывали все основные типы задач.

Общие требования к выполнению ИДЗ и РГР:

Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) и расчетно-графическая работа (РГР) должны выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяет преподаватель.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие. Решение задач следует излагать подробно. Все записи, чертежи должны быть аккуратными, четкими и разборчивыми.

На каждой странице тетради необходимо оставить поля шириной 3-5 см для замечаний рецензента. Страницы нумеруются.

Выполненная работа сдается преподавателю в указанный им срок. Рекомендуется внимательно разобрать решения типовых задач, которые приводятся в данном пособии.

Не зачтенная работа возвращается студенту для исправления ошибок. Все исправления ошибок делаются в конце работы. Исправления в тексте прорецензированной работы не допускаются. Работу с выполненными исправлениями следует сдать преподавателю для повторного рецензирования.

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Контрольная работа № 1 «Вычисление пределов»

Базовый уровень

Задание 1-4. Найти указанные пределы, не используя правило Лопиталя (табл. 1, №1–4):

Повышенный уровень

Задание 5. Найти предел (табл. 1, №5):

Таблица 1. Исходные данные

Номер варианта	Пределы	Номер варианта	Пределы
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-7x+2}{3x^5+6x^2-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}}{x-5}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{x-1}$	2	1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{4x^4+3x-6}$ 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{8-x}}{x-5}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2\cos 3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{x-1}$
3	1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+2}{4x^3-2x-7}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{6-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}3x}{\sin^2 2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{4/x}$	4	1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{2x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2-1}{2x^5+x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}{x-7}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\mathrm{tg}3x}{x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x+1}$

1	*2*	*3*	*4*
5	1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x^2-16}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6+5x^2-1}{4x^6+4x+5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{13-x}}{x-5}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\mathrm{tg}2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{5/x}$	6	1) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{2x-20}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+2x-3}{8x^3+5x+7}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+7}-\sqrt{9-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cos 5x}{\sin 3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+2}\right)^{2x+1}$
7	1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+2x^2-5}{5x^4+x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\mathrm{tg}4x}{\sin^2 6x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{4}{x}}$	8	1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+3x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x+6}{3x^3+6x+4}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}}{x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\mathrm{tg}4x}{x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4+x}$
9	1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-4x+1}{3x^6-2x^2-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}}{x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\mathrm{tg}5x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x-2}$	10	1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x^2+2x+8}{x^2-16}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+4x^2-3}{2x^4+3x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cos 7x}{\sin 2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{6/x}$

1	2	3	4
11	1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+x-4}{x^2+3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-5x+2}{2x^5+3x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin 6x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+7}\right)^{2x+1}$	12	1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^4+x-5}{3x^4+7x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}}{x-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{6\cos 5x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-9}{x+7}\right)^{3x-1}$
13	1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-3x-10}{x^2+6x-16}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^3+2x-7}$ 3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}6x}{\sin^2 7x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{3}{x}}$	14	1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{8x^2+3x-5}{6x+6}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-3x^2-1}{7x^4+x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{7-x}}{x^2-36}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x\cdot\operatorname{tg}3x}{x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+2}{9x-3}\right)^{5x+2}$
15	1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+5x-28}{16-x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-5x^2-1}{3x^6+6x+5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{12-x}}{x^2-25}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{7}{x}}$	16	1) $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{2x^2+13x-70}{2x+20}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x-3}{4x^4+5x^3+7x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2\cos 7x}{\sin^2 3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x+2}\right)^{x-2}$

1	*2*	*3*	*4*
17	1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+7x^2-5}{9x^4+x-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-\sqrt{-3-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x\mathrm{tg}3x}{3\sin^2 5x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(5x+1)^{\frac{3}{x}}$	18	1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+x-10}{2x^2+4x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+4x^5+6}{2x^5+5x+4}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{3x-6}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot \mathrm{tg}4x}{3x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+3}\right)^{6+x}$
19	1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-3x-14}{4x^2-5x-26}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-4x^3+1}{3x^5-2x^2-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{4-x^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{\mathrm{tg}^3 3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-1}\right)^{3x-2}$	20	1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^2+2x+3}{27-x^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+4x^2-3}{17x^4+3x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x+5}{\sqrt{x+7}-\sqrt{-3-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2\cos 6x}{\sin^2 2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(7x+1)^{\frac{4}{x}}$

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1-4. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

Решение

1) Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, надо и в числителе, и в знаменателе дроби выделить множитель ($x - a$) при $x \to a$ и сократить дробь на него.

Разложив числитель и знаменатель на множители, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{9}{5}.$$

(При разложении квадратного трехчлена на множители используйте формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена).

2) Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наивысшей степени. Разделим числитель и знаменатель данной дроби на x^2 и применим основные теоремы о пределах и свойства бесконечно малых величин, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2.$$

3) Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на множитель, сопряженный числителю, то есть на $\left(\sqrt{3x-2}+2\right)$, получим:

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-2-4}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}=\frac{3}{4}.$$

4) Применим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и формулу тригонометрии

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 4}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Повышенный уровень:

Задание 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{5x}$.

Решение

Применим второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{\frac{6}{x}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{30}=e^{30}.$$

1.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №3 «Основные элементарные функции, их свойства и графики»

Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 265–272.

Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 284–286. – № 5.6, 5.7 (а), 5.8, 5.9 (а).

Ответьте письменно на вопросы и выполните задание:

1. Что называют функцией?
2. Что называют областью определения функции?
3. Что называют множеством значений функции?
4. Какие есть способы задания функции?
5. Какая функция называется четной? Какова особенность графика четной функции? Приведите пример четной функции.
6. Какая функция называется нечетной? Какова особенность графика нечетной функции? Приведите пример нечетной функции.
7. Какая функция называется возрастающей на промежутке *X*?
8. Какая функция называется убывающей на промежутке *X*?
9. Какие функции называются монотонными?
10. Какая функция называется ограниченной на промежутке *X*? Какова особенность графика ограниченной функции? Приведите пример ограниченной функции.
11. Какая функция называется периодической? Какова особенность графика периодической функции? Приведите пример периодической функции, укажите ее основной период.
12. Заполните таблицу «Основные элементарные функции» (табл. 2).

Таблица 2. Основные элементарные функции

Обозначение функции	Область определения $D(y)$	Область значений $E(y)$	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Степенная функция						
$y = x^n$ $n \in N$, n – четное						

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
$y = x^n$ $n \in N$, n – нечетное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n – четное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n – нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n – нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n – четное						
Показательная функция						
$y = a^x$ $0 < a < 1$						
$y = a^x$ $a > 1$						
Логарифмическая функция						
$y = \log_a x$ $0 < a < 1$						
$y = \log_a x$ $a > 1$						
Тригонометрические функции						
$y = \sin x$						
$y = \cos x$						
$y = \mathrm{tg} x$						
$y = \mathrm{ctg} x$						
Обратные тригонометрические функции						
$y = \arcsin x$						
$y = \arccos x$						
$y = \mathrm{arctg} x$						
$y = \mathrm{arcctg} x$						

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Контрольная работа № 2 «Дифференцирование функций одной переменной»

Базовый уровень

Задание 1-4. Найти производные заданных функций (табл. 3).

Таблица 3. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4$ 2) $y=\dfrac{4x+7\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+9x^2}}$ 3) $y=\cos 3x\cdot e^{\sin x}$ 4) $y=\ln\operatorname{arctg}2x$	2	1) $y=(3x-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$ 2) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$ 3) $y=2^{3x}\operatorname{tg}2x$ 4) $y=\cos\ln 5x$
3	1) $y=(x^2-\dfrac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4$ 2) $y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$ 3) $y=e^{tgx}\ln 2x$ 4) $y=\cos\sqrt{x^2+3}$	4	1) $y=(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$ 3) $y=2^{8x}\operatorname{tg}3x$ 4) $y=\arcsin\ln 4x$
5	1) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\operatorname{tg}x}$ 3) $y=e^{ctgx}\cdot\sin 4x$ 4) $y=\sin\ln 5x$	6	1) $y=(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5)^2$ 2) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ 3) $y=3^{tgx}\arcsin(x^2)$ 4) $y=\ln\sin 6x$
7	1) $y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3$ 2) $y=\dfrac{\operatorname{arc\,tg}7x}{2-9x^2}$ 3) $y=e^{\operatorname{ctg}x}\cos 6x$ 4) $y=\sin\ln 2x$	8	1) $y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4$ 2) $y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$ 3) $y=4^{\cos x}\operatorname{arctg}2x$ 4) $y=\ln\cos 5x$

1	2	3	4
9	1) $y=(3x^5-\frac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\frac{\cos 6x}{\sin 3x}$ 3) $y=e^{x^3}\operatorname{tg}7x$ 4) $y=\arcsin\ln 2x$	10	1) $y=(x^4+2\sqrt[3]{x}+1)^2$ 2) $y=\frac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\operatorname{ctg}x}$ 3) $y=4^{5x}\operatorname{ctg}6x$ 4) $y=\ln\cos 7x$
11	1) $y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\frac{5x+7\cos x}{\sqrt{1+4x^2}}$ 3) $y=ctg6x\cdot e^{\cos 2x}$ 4) $y=\ln\arccos 3x$	12	1) $y=(2x-4\sqrt[4]{x^3}-6)^3$ 2) $y=\frac{\operatorname{arc}tg4x}{1-7x^3}$ 3) $y=4^{5x}\operatorname{ctg}6x$ 4) $y=\sin\ln 4x$
13	1) $y=(x^6-\frac{1}{x^4}+5\sqrt{x})^5$ 2) $y=\frac{\arccos 6x}{x^3+e^{2x}}$ 3) $y=e^{ctgx}\ln 6x$ 4) $y=\sin\sqrt{x^4+8}$	14	1) $y=(5x^5-\frac{7}{\sqrt{x}}+4)^4$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=7^{5x}\operatorname{ctg}2x$ 4) $y=\operatorname{arctg}\ln 6x$
15	1) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=e^{\cos 3x}\cdot\arcsin 4x$ 4) $y=\sin\ln 5x$	16	1) $y=(6x^2-\frac{2}{x^4}+5)^2$ 2) $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ 3) $y=3^{tgx}\arcsin(x^2)$ 4) $y=\ln\sin\frac{3x}{5}$
17	1) $y=(3x-3\sqrt[5]{x}+2)^6$ 2) $y=\frac{\sin 6x}{\cos\frac{x}{3}}$ 3) $y=2^{\sin x}\arcsin 2x$ 4) $y=\sin\ln 5x$	18	1) $y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\operatorname{tg}x}$ 3) $y=4^{\cos x}\operatorname{arctg}2x$ 4) $y=\cos\ln 5x$

1	2	3	4
19	1) $y=(3x^5-\frac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\frac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\text{ctg}x}$ 3) $y=e^{ctgx}\cdot\sin 4x$ 4) $y=\arcsin\ln 4x$	20	1) $y=(3x-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=4^{5x}\text{ctg}6x$ 4) $y=\sin\ln 2x$

Повышенный уровень

Задание 5. Найти производную неявной функции (табл. 4).

Таблица 4. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	$x^3y^3-2xy+3=0$	2	$x^2y^2-\cos x=0$
3	$\cos(xy)-2x=0$	4	$\frac{x}{y}+xy-2=0$
5	$5x^2y^2-7y+4x=0$	6	$x^3y^3-4xy^2+1=0$
7	$x^2+xy+y^2=3$	8	$x^2+y^2-xy=0$
9	$x^3+y^3-3xy=0$	10	$x^4+y^4=x^2y^2$
11	$y=1+x\cos y$	12	$y^3+e^{xy}=0$
13	$xy+e^y=0$	14	$x^2y^3-\sin y+3=0$
15	$\sin x+xy^2=0$	16	$x^3y^2-\cos y+4=0$
17	$\ln y+xy-5=0$	18	$x^2y^3+x\ln y=0$
19	$tgy-xy^2=0$	20	$\sin y-xy^2+4=0$

Задание 6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции (табл. 5).

Таблица 5. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	2	3	4
1	$\begin{cases}x=4\sin 5t,\\ y=\cos 5t\end{cases}$	2	$\begin{cases}x=2\sin 3t,\\ y=5\cos 3t\end{cases}$

1	2	3	4
3	$\begin{cases} x = 2e^{3t} + 1, \\ y = e^{6t} - 4 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = 6e^{2t} + 7, \\ y = e^{2t} - 3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = t^3 - 4, \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = 2e^{3t} + 1 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = 9e^{7t} - 6 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 8t^3 - 9 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = 2\sin 3t + 1, \\ y = \cos 3t - 2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = 7\sin 5t - 3, \\ y = \cos 5t + 4 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 4\sin 2t - 1 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = \sin 5t, \\ y = -3\cos 5t + 7 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = e^{5t} + 2, \\ y = 2\ln t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = e^{-7t} - 4, \\ y = 6\ln t \end{cases}$
17	$\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + 8t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = t^4 - 5t, \\ y = 2t^2 + 3t^3 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x = \sqrt{t} - 2, \\ y = t^3 + 4 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 4\sqrt{t} + 1, \\ y = 2t^2 - 5 \end{cases}$

Задание 7. Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $s(t) = 9t - 2t^2$, где высота $s(t)$ измеряется в метрах, а время t – в секундах. Найти: а) скорость тела в начальный момент времени ($t_0 = 0$ с); б) скорость тела в момент соприкосновения с землей ($s(t) = 0$ м; в) наибольшую высоту подъема тела ($v(t) = 0$ м/с).

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задания 1-4. Найти производные заданных функций

1) $y = \left(x^4 - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 6 \right)^3$;

2) $y=\dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$;

3) $y=e^{ctgx}\arcsin\sqrt{x}$;

4) $y=3^{\cos^2 x}+\operatorname{arctg}5x$.

Решение

1) $y=\left(x^4-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^3$ — сложная функция.

Применим формулы дифференцирования:

$$\left(u^3\right)'=3u^2u',\ \left(x^n\right)'=nx^{n-1},$$

а также формулы

$$\frac{1}{x^n}=x^{-n},\ \ \sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}.$$

Имеем

$$y'=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)'=.$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-2x^{-3}+x^{\frac{2}{3}}-6\right)'=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+6x^{-4}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+\frac{6}{x^4}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right).$$

2) Для дифференцирования функции $y=\dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$ применим правило производной частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Получим

$$y'=\frac{\left(\cos\frac{x}{4}\right)'x^2-\cos\frac{x}{4}\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{-\sin\frac{x}{4}\left(\frac{1}{4}x\right)'-\cos\frac{x}{4}\cdot 2x}{x^4}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}-2x\cos\frac{x}{4}}{x^4}.$$

3) Для дифференцирования функции $y=e^{\operatorname{ctg}x}\arcsin\sqrt{x}$ применим правило производной произведения:

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Получим

$$y'=\left(e^{\operatorname{ctg}x}\right)'\arcsin\sqrt{x}+e^{\operatorname{ctg}x}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)'=$$

$$=e^{\operatorname{ctg}x}\left(\operatorname{ctg}x\right)'\arcsin\sqrt{x}+e^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\left(\sqrt{x}\right)'=$$

$$=e^{\operatorname{ctg}x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\arcsin\sqrt{x}+e^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=e^{\operatorname{ctg}x}\left(-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x}+\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)=$$

$$=e^{\operatorname{ctg}x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x}\right).$$

4) Для дифференцирования функции $y=3^{\cos^2 x}+\operatorname{arctg}5x$ применяем правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$y'=3^{\cos^2 x}\ln 3\left(\cos^2 x\right)'+\frac{1}{1+(5x)^2}(5x)'=$$

$$=3^{\cos^2 x}\ln 3\cdot 2\cos x(\cos x)'+\frac{1}{1+25x^2}5=$$

$$=3^{\cos^2 x}\ln 3\cdot 2\cos x(-\sin x)+\frac{5}{1+25x^2}=$$

$$=-3^{\cos^2 x}\ln 3\sin 2x+\frac{5}{1+25x^2}.$$

Повышенный уровень

Задание 5. Найти производную неявной функции $x^4+x^2y^3-\cos y=0$.

Решение

Дифференцируем по переменной x обе части равенства, рассматривая y, как функцию от x:

$$4x^3 + \left(x^2\right)' \cdot y^3 + x^2 \cdot \left(y^3\right)' - \left(-\sin y\right) \cdot y' = 0,$$

$$4x^3 + 2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 y' + y' \cdot \sin y = 0,$$

$$3x^2 y^2 y' + y' \cdot \sin y = -4x^3 - 2xy^3,$$

Выразим из полученного уравнения искомую производную y':

$$y'\left(3x^2y^2 + \sin y\right) = -2x\left(2x^2 + y^3\right),$$

$$y' = \frac{-2x\left(2x^2 + y^3\right)}{3x^2y^2 + \sin y}.$$

Задание 6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{t}\cos t. \end{cases}$

Решение

Производная параметрически заданной функции $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем y'_t:

$$y'_t = \left(e^{-t}\cos t\right)' = \left(e^{-t}\right)'\cos t + e^{-t}\left(\cos t\right)' =$$
$$= -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -e^{-t}\left(\cos t + \sin t\right).$$

Найдем x'_t:

$$x'_t = \left(e^{t}\cos t\right)' = \left(e^{t}\right)'\cos t + e^{t}\left(\cos t\right)' =;$$
$$= e^{t}\cos t - e^{t}\sin t = e^{t}\left(\cos t - \sin t\right).$$

Тогда

$$y'_x = \frac{-e^{-t}\left(\cos t + \sin t\right)}{e^{t}\left(\cos t - \sin t\right)} = \frac{\cos t + \sin t}{e^{2t}\left(\sin t - \cos t\right)}.$$

2.2. Расчетно-графическая работа №1
«Исследование функций одной переменной и построение графиков»

Базовый уровень

Задание 1. Исследовать данную функцию $y = f(x)$ (табл. 6) методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Таблица 6. Исходные данные

№ варианта	$y = f(x)$
1	*2*
1	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
2	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
3	$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$
4	$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
5	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$
6	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
7	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$
8	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$
9	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$
10	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$
11	$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$

1	*2*
12	$y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$
13	$y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$
14	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$
15	$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$
16	$y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$
17	$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$
18	$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$
19	$y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$
20	$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения данной функции $y = f(x)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$ (табл. 7).

Таблица 7. Исходные данные

№ варианта	$y = f(x)$	α	β
1	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$	–1	3
2	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$	–1	2
3	$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$	2	4
4	$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	–1	2
5	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	0	4
6	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$	–2	3
7	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$	–3	0
8	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$	–3	1
9	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$	1	4
10	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$	–1	4
11	$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$	–4	1
12	$y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$	–4	0
13	$y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$	–5	0
14	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$	0	3
15	$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$	–3	5
16	$y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$	–5	3
17	$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$	–5	–1
18	$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$	–5	2
19	$y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$	–2	3
20	$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$	1	5

Задание 3. Исследовать данную функцию $y = f(x)$ методами дифференциального исчисления и построить ее график (табл. 8).

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению *x* ряд значений и вычисляя соответствующие значения *y*;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Таблица 8. Исходные данные

№ варианта	$y = f(x)$	№ варианта	$y = f(x)$
1	$y = \dfrac{x^2+1}{x}$	2	$y = \dfrac{x^2+9}{x}$
3	$y = \dfrac{x^2}{x-1}$	4	$y = \dfrac{x^2+8}{x+1}$
5	$y = \dfrac{x^2-3}{x+2}$	6	$y = \dfrac{x^2+21}{x-2}$
7	$y = \dfrac{x^2-8}{x-3}$	8	$y = \dfrac{x^2+16}{x+3}$
9	$y = \dfrac{x^2+9}{x+4}$	10	$y = \dfrac{x^2-12}{x-4}$
11	$y = \dfrac{x^2+4}{x}$	12	$y = \dfrac{x^2+25}{x}$
13	$y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$	14	$y = \dfrac{x^2+24}{x+1}$
15	$y = \dfrac{x^2+5}{x+2}$	16	$y = \dfrac{x^2+32}{x-2}$
17	$y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$	18	$y = \dfrac{x^2+27}{x+3}$
19	$y = \dfrac{x^2-15}{x+4}$	20	$y = \dfrac{x^2-7}{x-4}$

Повышенный уровень

Задание 4. Вычислить предел (табл. 9) по правилу Лопиталя.

Таблица 9. Исходные данные

№ варианта	Предел	№ варианта	Предел
1	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$	2	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$
3	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tgx}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^{x^3+1}-e}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$
7	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\cdot\ln\cos 5x}$	10	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{tgx-tga}{\ln x-\ln a}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x\cdot\sin 3x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$
13	$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$
15	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln tgx}$	16	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$
19	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$

Задание 5. Решить задачу (табл. 10).

Таблица 10. Исходные данные

№ варианта	Задача
1	*2*
1	Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием и вертикальной боковой поверхностью заданного объёма, $V=25\ м^3\left(\approx 8\pi\right)$. Каковы, должны быть линейные размеры ямы (радиус R и высота H), чтобы на облицовку её дна и боковой поверхности пошло наименьшее количество материала?

1	*2*
2	Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), если на его изготовление имеется $S = 18{,}84\ м^2 \left(\approx 6\pi\right)$ материала?
3	В эллипс $\frac{x^2}{128} + \frac{y^2}{32} = 1$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти стороны этого прямоугольника, если они параллельны осям эллипса.
4	Требуется вырыть яму конической формы (воронку) с образующей $a = 3\ м$. При какой глубине объём воронки будет наибольшим?
5	Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак с заданным объёмом *V*. Каковы должны быть линейные размеры бака, чтобы его полная поверхность была наименьшей?
6	Проволокой длиной $20\ м$ требуется огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?
7	Среди цилиндров, полная поверхность которых равна, $S = 6\pi\ м^2$. Найти цилиндр, имеющий наибольший объём.
8	Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью $294\ м^2$ и разделить, затем этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?
9	Огород прямоугольной формы огорожен изгородью, длина которой $72\ м$. Какова должна быть размеры огорода, чтобы его площадь была наибольшей?
10	Деталь из листового железа имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной $10\ см$. Каким должно быть основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?
11	Какое положительное число, будучи сложенным, с обратным ему числом, даёт наименьшую сумму?
12	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.
13	Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
14	Найти прямоугольник наибольшей площади, если сумма длин его катета и гипотенузы постоянна и равна $4\ см$.
15	Из прямоугольного листа жести размером $24\ см \times 9\ см$ требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

1	2
16	Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь наибольшую площадь.
17	Требуется изготовить полотняный шатёр, имеющий форму прямого кругового конуса заданной вместимости, $V=\frac{9\pi}{2}$ $м^3$. Каковы должны быть размеры конуса (высота и радиус основания), чтобы на шатёр ушло наименьшее количество полотна?
18	Требуется изготовить ящик с крышкой, объём которого был бы равен, 72 $см^3$, причём стороны основания, относились бы как $1:2$. Каковы, должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?
19	Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной $20 см.$ Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольший?
20	Открытый чан имеет форму цилиндра объёма, $V=27\pi$ $м^3$. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Повышенный уровень

Задание 6. При производстве первых 20 единиц продукции издержки имеют вид $C(x)=px$. Далее при производстве каждой последующей единицы продукции издержки возрастают на 2 ден. ед. Цена единицы продукции равна a денежных единиц (табл. 11). Найти оптимальное значение выпуска продукции.

Таблица 11. Исходные данные

№ варианта	p	a	№ варианта	p	a
1	5	40	11	6	76
2	6	23	12	8	65
3	8	281	13	11	78
4	7	45	14	12	43
5	9	57	15	13	59
6	10	29	16	7	38
7	11	36	17	9	48
8	7	47	18	10	56
9	5	53	19	16	203
10	8	30	20	17	114

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Область определения функции: $D(y)=R$.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения.

3. Исследуем функцию на четность:

$$y(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-(-x)^2-3(-x)+5=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+5.$$

Так как $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, то есть это функция общего вида. Ее график не будет обладать симметрией относительно начала координат и оси Oy.

4. Найдем первую производную:

$$y'=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5\right)'=x^2-2x-3.$$

Найдем критические точки функции. Приравняем производную к нулю и решим уравнение:

$$x^2-2x-3=0;$$

$$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16;$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1},$$

$$x_1=-1,\; x_2=3.$$

Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критические точки. Эти точки разбивают область определения на три интервала: $(-\infty;-1)$, $(-1;3)$, $(3;+\infty)$. В полученных интервалах расставляем знак производной y' (рис. 1).

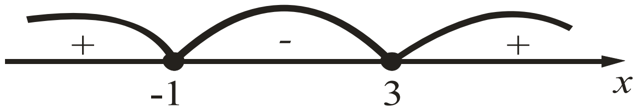

Рис. 1. Исследование на экстремум

Данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$, $(3;+\infty)$ и убывает на интервале $(-1;3)$.

$x=-1$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max}=y(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)+5=6\frac{2}{3},$$

$$y_{\min}=y(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3+5=-4.$$

5. Найдем вторую производную:

$$y''=\left(x^2-2x-3\right)''=2x-2.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем производную y'' к нулю и решим уравнение:

$$2x-2=0,$$
$$x=1.$$

Точек, в которых вторая производная y'' не существует, нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критическую точку второго рода. Область определения разбивается на два интервала: $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис. 2).

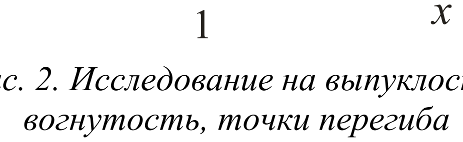

Рис. 2. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на интервале $(-\infty;1)$ и вогнутый на интервале $(1;+\infty)$.

При переходе через критическую точку второго рода $x=1$ вторая производная меняет знак, следовательно, $x=1$ – абсцисса точки перегиба.

Вычислим значение функции в точке $x=1$:

$$y(1)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-1^2-3\cdot 1+5=\frac{1}{3}-1-3+5=1\frac{1}{3}.$$

$y=1\frac{1}{3}$ — ордината точки перегиба.

Итак, $\left(1;1\frac{1}{3}\right)$ — точка перегиба.

6. Для нахождения точки пересечения графика функции с осью Oy подставим в уравнение функции значение $x=0$. Тогда $y=5$. Значит, график функции пересекает ось Oy в точке $(0;5)$.

Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью Ox следует решить кубическое уравнение $\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5=0$. Оно имеет не более трех решений. Следовательно, график функции пересекает ось Ox не более чем в трех точках.

7. По результатам исследования построим график функции (рис. 3).

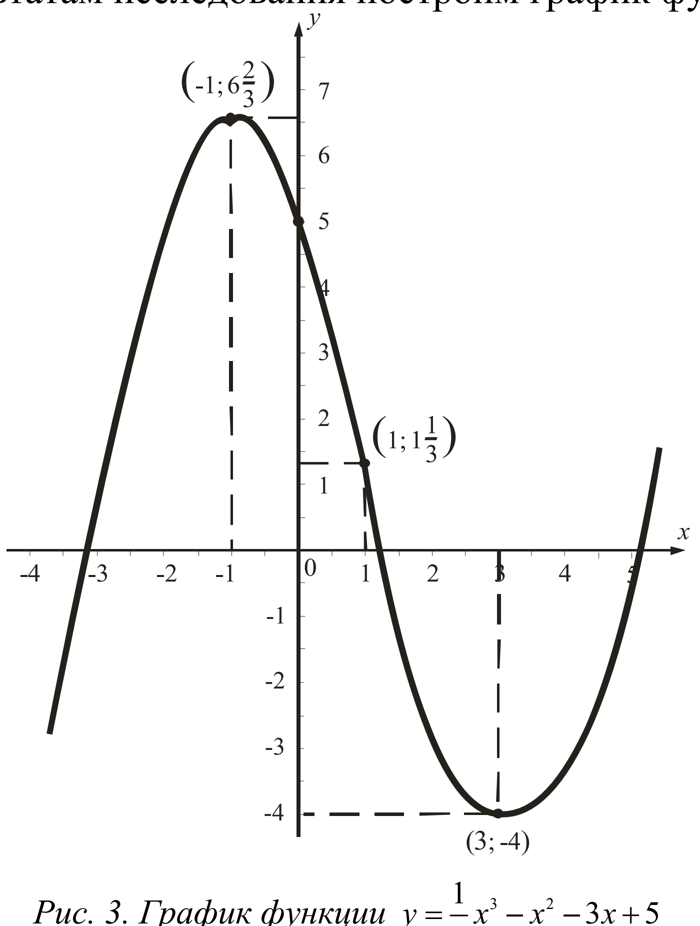

Рис. 3. График функции $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение

Найдем производную функции:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right).$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0,\ 4x\left(x^2 - 1\right) = 0,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$$

Все критические точки принадлежат отрезку $[-2; 3]$.

Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$y(0) = 5,$$

$$y(-1) = 4,$$

$$y(1) = 4,$$

$$y(-2) = 12,$$

$$y(3) = 68.$$

Итак, $y_{наиб} = y(3) = 68$, $y_{наим} = y(-1) = y(1) = 4$.

Ответ: $y_{наиб} = y(3) = 68$, $y_{наим} = y(-1) = y(1) = 4$.

Задание 3. Исследовать данную функцию $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика

функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Найдем область определения функции: $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - 6(-x) + 13}{-x-3} = \frac{x^2 + 6x + 13}{-x-3};$$

$$y(-x) \neq y(x), \; y(-x) \neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Исследуем функцию на непрерывность: $x = 3$ — точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} = -\infty, \; \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 3$ — точка разрыва второго рода.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y' = \frac{(2x-6)(x-3) - (x^2 - 6x + 13)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}.$$

Найдем критические точки:

$y' = 0$, если $x^2 - 6x + 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$.

Производная не существует при $x = 3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 4).

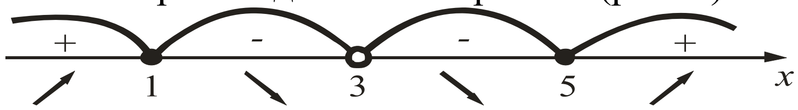

Рис. 4. Исследование на экстремум

Функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и на $(5; +\infty)$.

Функция убывает на $(1; 3)$ и на $(3; 5)$.

$x = 1$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(1) = -4,$$

$$y_{\min} = y(5) = 4.$$

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} \right)' = \frac{\left(x^2 - 6x + 5\right)'(x-3)^2 - \left(x^2 - 6x + 5\right)\left((x-3)^2\right)'}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - \left(x^2 - 6x + 5\right)2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2(x-3)\left((x-3)^2 - x^2 + 6x - 5\right)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2\left(x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x - 5\right)2(x-3)}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем вторую производную y'' к нулю и решим уравнение $\frac{8}{(x-3)^3} = 0$. Оно не имеет решений.

Вторая производная не существует при $x = 3$, но данная точка не является точкой перегиба, так как является точкой разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

На числовую ось нанесем область определения функции. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис. 5).

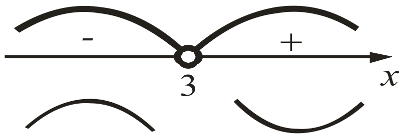

Рис. 5. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на $(-\infty; 3)$ и вогнутый на $(3; +\infty)$.

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как $x = 3$ — точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением $x = 3$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$. Найдем параметры k и b:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x(x-3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x^2 - 3x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{13}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty}(y - kx) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13 - x^2 + 3x}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+13}{x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3+\frac{13}{x}}{1-\frac{3}{x}} = -3.$$

Итак, $y = x - 3$ — уравнение наклонной асимптоты.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

При $x = 0$ получим $y = \frac{13}{-3} = -4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0; -4\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения с осью Oy.

При $y = 0$ получим $\frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} = 0$, $x^2 - 6x + 13 = 0$;

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0.$$

Следовательно, точек пресечения с осью Ox нет.

8. По результатам исследования строим график функции (рис. 6).

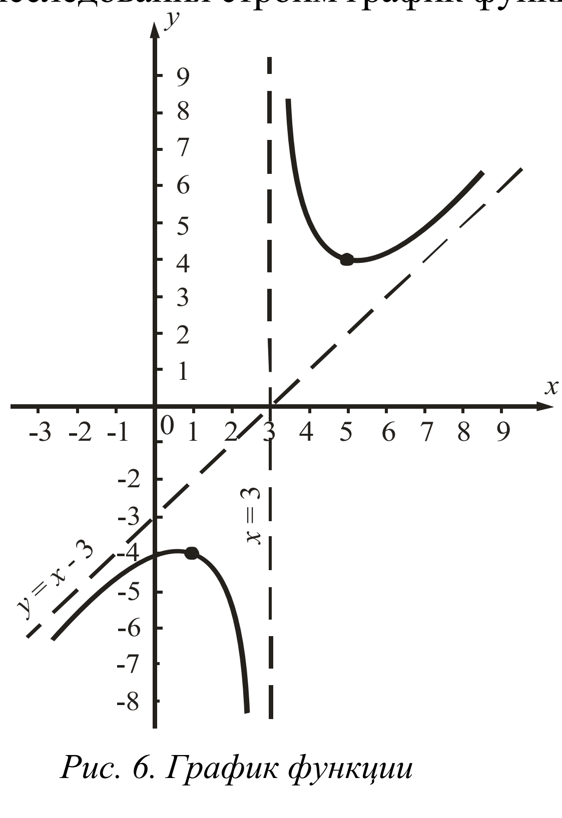

Рис. 6. График функции

Задание 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$ по правилу Лопиталя.

Решение

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{(1-2\cos x)'}{(\sin(\pi-3x))'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{-3\cos(\pi-3x)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задание 5. Определить размеры силосного сооружения, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, объемом 108 м^3, чтобы суммарная площадь поверхности дна и стенок была минимальной.

Решение

Пусть x (м) — сторона основания силосного сооружения, а y (м) — его глубина. Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x,\ y) = x^2 + 4xy.$$

Так как объем сооружения 108 м^3 и $V = x^2 y$, то $y = \dfrac{108}{x^2}$.

Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}, \text{ где } x > 0.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое значение x, при котором функция $S(x)$ принимает наименьшее значение.

Найдем производную:

$$S' = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0.$$

Решая это уравнение относительно x, получим $x = 6$.

На числовую ось нанесем область определения функции $S(x)$ и критическую точку $x = 6$. В полученных промежутках расставляем знак производной S' (рис. 7).

Рис. 7. Знаки производной

По достаточному условию экстремума в точке $x = 6$ функция $S(x)$ имеет минимум. Так как функция $S(x)$ непрерывна при $x > 0$ и имеет единственную точку экстремума $x = 6$ и это точка минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение, то есть $S_{наим} = S(6)$. Тогда глубина сооружения $y = \dfrac{108}{x^2} = \dfrac{108}{36} = 3$ (м).

Ответ: длина основания 6 м, глубина 3 м.

2.3. Защита расчетно-графической работы №1 «Исследование функций одной переменной и построение графиков»

Базовый уровень

Задание 1. Дайте ответ на один из предложенных теоретических вопросов.

1. Сформулируйте теорему Ферма. В чем состоит ее геометрический смысл?
2. Сформулируйте теорему Ролля. В чем состоит ее геометрический смысл?
3. Сформулируйте теорему Лагранжа. В чем состоит ее геометрический смысл?
4. В чем заключается правило Лопиталя?
5. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на промежутке X? Сформулируйте необходимое условие возрастания (убывания) функции на промежутке X.
6. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии возрастания функции.
7. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии убывания функции.
8. Дайте определения точки максимума функции, точки минимума функции, точки экстремума функции, максимума функции, минимума функции, экстремума функции. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
9. Сформулируйте и докажите теорему: первое достаточное условие экстремума.
10. Изложите схему исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью первого достаточного условия экстремума.
11. Сформулируйте и докажите теорему: второе достаточное условие экстремума.
12. Изложите схему исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью второго достаточного условия экстремума.
13. Дайте определение выпуклой на промежутке X функции, вогнутой на промежутке X функции. Сформулируйте необходимое условие выпуклости функции, необходимое условие вогнутости функции.
14. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии выпуклости функции.
15. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии выпуклости функции.

16. Дайте определение точки перегиба графика функции. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба графика функции. Сформулируйте достаточное условие точки перегиба графика функции.

17. Изложите схему исследования функции $y = f(x)$ на выпуклость, вогнутость, наличие точек перегиба.

18. Дайте определение асимптоты графика функции. Как найти уравнения асимптот: вертикальных, горизонтальных, наклонных?

19. Изложите общую схему исследования функции и построения ее графика.

20. Изложите схему отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$

Задание 2. Решите одну из предложенных задач.

№1. Вычислите предел по правилу Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2x-1}{1-\cos 3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\cos x - x}{\ln(1+x)-x}$.

№2. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции:

1) $y=\dfrac{4x^2+9}{x+3}$;

2) $y=\ln(x^2+2x+2)$;

3) $y=4xe^{-x}$.

№3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции:

1) $y=\dfrac{4x^3}{9(3-x^2)}$;

2) $y=\dfrac{3\ln x}{x}$.

№4. Найти асимптоты графика функции:

1) $y=\dfrac{2x^2}{2x-1}$;

2) $y=\dfrac{x^2}{3(x^2-3)}$.

№5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{3x+4}{x^2+1}$ на отрезке $[-1;4]$.

№6. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом *V*. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Повышенный уровень

Задание 3. Приведите пример экономического процесса, для изучения которого применяются теоремы о исследовании функции с помощью производной.

Задание 4. Решите одну из предложенных задач.

№1. Исследовать функцию $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$ и по результатам исследования построить график.

№2. Исследовать функцию $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ $(\sigma>0)$ и по результатам исследования построить график.

№3. Для функции спроса $q=\frac{1}{3}(100-5p)$ найти значение стоимости единицы продукции *p*, при которой спрос является эластичным.

№4. Функция издержек имеет вид

$$C(x)=\begin{cases}\frac{x}{5} \text{ при } x\le 20,\\ \frac{x}{5}+\frac{1}{8}(x-20)^2 \text{ при } x>20.\end{cases}$$

При какой цене р единицы товара оптимальное значение выпуска $x_{\text{опт}}=30$?

№5. Определить оптимальное для производства значение выпуска $x_{\text{опт}}$ при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене $p=14$ ден. едениц за единицу и известен вид функции издержек $C(x)=13+2x+x^3$.

№6. Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма-производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене $p=10,5$ ден. единиц за единицу и известен вид функции издержек $C(x)=10+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}$.

2.4. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект № 2 «Применение производной в экономике»

Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 371–378, 389–393.

Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 389–390. – № 7.142, 7.143.

Ответьте письменно на вопросы и выполните задание:

1. В каких задачах экономики используется понятие производной?
2. Как с помощью производной можно выразить предельные издержки производства?
3. Рассмотрите пример соотношения между средним и предельным доходами в условиях монопольного и конкурентного рынков.
4. Что называют эластичностью функции? Что показывает эластичность спроса относительно цены?
5. Рассмотрите пример использования производной для оценки соотношения потребления и сбережения.
6. Решите: № 7.148, 7.149.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Индивидуальное домашнее задание №1 «Дифференциальное исчисление функций двух переменных»

Базовый уровень

Задание 1. Дана функция $u(x, y)$. Проверить, удовлетворяет ли она заданному уравнению (табл. 12).

Таблица 12. Исходные данные

Номер варианта	Функция	Уравнение
1	$u=\dfrac{y}{x}$	$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x dy}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
2	$u=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$	$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

1	2	3
3	$u = x^y$	$y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$
4	$u = \dfrac{xy}{x+y}$	$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$
5	$u = e^{xy}$	$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
6	$u = \sin^2(x - 2y)$	$4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
7	$u = \ln\left(x^2 + (y+1)^2\right)$	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
8	$u = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$	$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x+y}{x-y}$
9	$u = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$	$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3\left(x^3 - y^3\right)$
10	$u = \dfrac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$	$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0$
11	$u = x\ln\dfrac{y}{x}$	$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$
12	$u = \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}$	$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$
13	$u = \ln\left(x^2 + y^2 + 2x + 1\right)$	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
14	$u = \dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$	$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{y^2}$
15	$u = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$	$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
16	$u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$	$y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
17	$u = \mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
18	$u = e^{-(x+3y)}\sin(x + 3y)$	$9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
19	$u = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

1	2	3
20	$u=\sqrt{2xy+y^2}$	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{u}$

Задание 2. Исследовать функцию $z=f(x,y)$ (табл. 13) на экстремум.

Таблица 13. Исходные данные

Номер варианта	$z=f(x,y)$
1	*2*
1	$z=(x-1)^2+2y^2$
2	$z=2xy-2x^2-4y^2$
3	$z=x^2+xy+y^2+x-y+1$
4	$z=x^2+y^2-xy+x+y$
5	$z=xy(6-x-y)$
6	$z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$
7	$z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$
8	$z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$
9	$z=2xy-4x-2y$
10	$z=2xy-3x^2-2y^2+10$
11	$z=xy-x^2-y^2+9$
12	$z=x^2+xy+y^2-2x-y$
13	$z=3xy-x^2-y^2+11$
14	$z=2xy-5x^2-3y^2+2$
15	$z=(x-1)^2-2y^2$
16	$z=1+6x-x^2-xy-y^2$
17	$z=x^3+y^3-3xy$
18	$z=2x^3+2y^3-6xy+5$
18	$z=(x-2)^2+2y^2-10$
19	$z=x^2+xy+y^2-6x-9y$
20	$z=x^2+xy+y^2-6x-9y$

Задание 3. Найти производную функции $z=f(x,y)$ (табл. 13) в точке $M(2;\ 1)$ по направлению в направлении вектора $\bar{l}=(12;\ -5)$.

Задание 4. Найти градиент функции $z = f(x, y)$ (табл. 13) и его модуль в точке $M\left(-1;\ 2\right)$.

Повышенный уровень

Задание 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области, ограниченной осью Oy, прямой $y = 2$ и параболой $y = \frac{x^2}{2}$ при $x \geq 0$.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Дана функция $u = \frac{y}{x}$. Проверить, удовлетворяет ли она уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x dy} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение

Находим частные производные первого порядка функции $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Находим частные производные второго порядка функции $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2};\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Подставляем частные производные в левую часть данного уравнения:

$$x^2 \cdot \frac{2y}{x^3} + 2xy\left(-\frac{1}{x^2}\right) + y^2 \cdot 0 = 0;$$

$$\frac{2y}{x} - \frac{2y}{x} = 0.$$

Поскольку левая часть равна правой, то функция $u = \frac{y}{x}$ удовлетворяет заданному уравнению.

Задание 2. Исследовать функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy + 5$ на экстремум.

Решение

1. Область определения функции: $D(z) = R^2$.

2. Частные производные первого порядка:

$$z'_x = 3x^2 - 3y;$$

$$z'_y = 3y^2 - 3x.$$

3. Найдем критические точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x\left(x^3 - 1\right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Итак, $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$ — критические точки.

4. Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(3x^2 - 3y\right)'_x = 6x;$$

$$z''_{xy} = \left(3x^2 - 3y\right)'_y = -3;$$

$$z''_{yy} = \left(3y^2 - 3x\right)'_y = 6y.$$

5. Проверим выполнение достаточных условий экстремума в точке $M_1(0;0)$:

$$A = z''_{xx}(M_1) = 0,$$

$$B = z''_{xy}(M_1) = -3,$$

$$C = z''_{yy}(M_1) = 0,$$

$$\Delta = AC - B^2 = -3 < 0.$$

Следовательно, точка $M_1(0;0)$ не является точкой экстремума.

6. Проверим выполнение достаточных условий экстремума в точке $M_2(1;1)$:

$$A = z''_{xx}(M_2) = 6,$$

$$B = z''_{xy}(M_2) = -3,$$

$$C = z''_{yy}(M_2) = 6.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$, то точка $M_2(1;1)$ является точкой экстремума. Так как $A = 6 > 0$, то точка $M_2(1;1)$ — точка минимума.

7. Найдем экстремум функции.

$z(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 = 4$ — минимум функции.

Ответ: 4 — минимум функции.

Задание 3. Найти производную функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ в точке $M(2;\ 5)$ по направлению в направлении вектора $\bar{l} = (-3;\ 4)$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6xy - 3x^2,\ z'_y = 3x^2 - 4y^3.$$

Найдем их значение в точке $M(2;5)$:

$$z'_x(M) = 6 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2^2 = 48,$$

$$z'_y(M) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 5^3 = -488.$$

Найдем длину вектора $\bar{l} = (-3;4)$:

$$|\bar{l}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{l}$:

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5},\ \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

Тогда производная z'_l в точке $M(2;5)$:

$$z'_l(M) = 48 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + (-488) \cdot \frac{4}{5} = -419{,}2.$$

Задание 4. Найти градиент функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ и его модуль в точке $M(-2;\ 3)$.

Решение

Частные производные первого порядка (см. задание 3):

$$z'_x = 6xy - 3x^2,\ z'_y = 3x^2 - 4y^3.$$

Найдем их значение в точке $M(-2;\ 3)$:

$$z'_x(M) = 6 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot (-2)^2 = -48,$$

$$z'_y(M) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot 3^3 = -96$$

Тогда градиент функции в точке $M(-2;\ 3)$:

$$\overline{gradz}(M)=(-48;-96)$$

или

$$\overline{gradz}(M)=-48\bar{i}-96\bar{j}\,.$$

Найдем модуль градиента функции в точке $M(-2;\ 3)$:

$$\left|\overline{gradz}(M)\right|=\sqrt{(-48)^2+(-96)^2}=\sqrt{48^2(1+4)}=48\sqrt{5}\,.$$

3.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект № 3 «Функции нескольких переменных в экономической теории»

Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 505–509, 525–526.

Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 525–526. – № 9.113.

Ответьте письменно на вопросы и выполните задание:

1. Какие линии называются изоквантами?
2. Что называется экономической областью? Как она изображается?
3. Приведите пример использования изоквант для геометрического иллюстрирования решения какой-либо экономической задачи.
4. В каких понятиях экономической теории используются частные производные? Приведите примеры.
5. Решите № 9.116.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Контрольная работа №3 «Неопределенный интеграл»

Базовый уровень

Задание 1. Найдите неопределенные интегралы. В пунктах 1) и 2) сделайте проверку дифференцированием (табл. 14):

Таблица 14. Исходные данные

№ варианта	Интегралы	№ варианта	Интегралы
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx$ 3) $\int \ln x dx$ 4) $\int\frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$	2	1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2+x^4}dx$ 3) $\int(8x-2)\sin 5x dx$ 4) $\int\frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx$
3	1) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}$ 3) $\int(2x+1)\sin 3x dx$ 4) $\int\frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$	4	1) $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$ 3) $\int(x-3)e^{-2x}dx$ 4) $\int\frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx$
5	1) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 3) $\int(x-1)e^{2x}dx$ 4) $\int\frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx$	6	1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ 3) $\int\sqrt{x}\ln 3x dx$ 4) $\int\frac{3x+7}{x^2+8x+17}dx$
7	1) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ 3) $\int(5x+1)\ln x dx$ 4) $\int\frac{8x-3}{x^2+6x+10}dx$	8	1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2x^4+5}dx$ 3) $\int x^3\ln x dx$ 4) $\int\frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx$

1	*2*	*3*	*4*
9	1) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^2}xdx$ 3) $\int x\cos 2xdx$ 4) $\int\frac{5x-2}{x^2-2x+5}dx$	10	1) $\int\left(4-\frac{1}{x^3}-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ 3) $\int(2x+8)e^{-7x}dx$ 4) $\int\frac{7x+3}{x^2-4x+5}dx$
11	1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2+x^4}dx$ 3) $\int\ln xdx$ 4) $\int\frac{7x-3}{x^2+6x+13}dx$	12	1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\cos x}\sin xdx$ 3) $\int(8x-2)\sin 5xdx$ 4) $\int\frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$
13	1) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}$ 3) $\int(x-3)e^{-2x}dx$ 4) $\int\frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$	14	1) $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$ 3) $\int(2x+1)\sin 3xdx$ 4) $\int\frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx$
15	1) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2x^4+5}dx$ 3) $\int\sqrt{x}\ln 3xdx$ 4) $\int\frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx$	16	1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ 3) $\int x^3\ln xdx$ 4) $\int\frac{3x+7}{x^2+8x+17}dx$

1	2	3	4
17	1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ 3) $\int(5x+1)\ln x dx$ 4) $\int\frac{7x-3}{x^2+6x+13}dx$	18	1) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 3) $\int(x-1)e^{2x}dx$ 4) $\int\frac{5x-2}{x^2-2x+5}dx$
19	1) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^2}xdx$ 3) $\int(2x+8)e^{-7x}dx$ 4) $\int\frac{7x+3}{x^2-4x+5}dx$	20	1) $\int\left(4-\frac{1}{x^3}-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ 3) $\int x\cos 2xdx$ 4) $\int\frac{8x-3}{x^2+6x+10}dx$

Повышенный уровень

Задание 2. Найдите неопределенные интегралы (табл. 15):

Таблица 15. Исходные данные

№ варианта	Интегралы	№ варианта	Интегралы
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $\int\frac{x}{x^3+1}dx$ 2) $\int\cos^2 x\sin^3 xdx$	2	1) $\int\frac{x+20}{x^3-8}dx$ 2) $\int\cos^4 2xdx$
3	1) $\int\frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$ 2) $\int\sin^3 5xdx$	4	1) $\int\frac{2x+5}{x^3+2x}dx$ 2) $\int\sin^2 x\cos^3 xdx$
5	1) $\int\frac{3x-1}{x^3+3x}dx$ 2) $\int\sin^4 3xdx$	6	1) $\int\frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}dx$ 2) $\int\cos^3 2xdx$
7	1) $\int\frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx$ 2) $\int\cos^2 x\sin^2 xdx$	8	1) $\int\frac{5x-11}{x(x^2+4)}dx$ 2) $\int\cos^3 x\sin^3 xdx$

1	2	3	4
9	1) $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2+3)}dx$ 2) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos^2 x}$	10	1) $\int \frac{2x}{x^3-1}dx$ 2) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}$
11	1) $\int \frac{x}{x^3+1}dx$ 2) $\int \sin^3 5xdx$	12	1) $\int \frac{2x+5}{x^3+2x}dx$ 2) $\int \cos^4 2xdx$
13	1) $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$ 2) $\int \sin^2 x\cos^3 xdx$	14	1) $\int \frac{x+20}{x^3-8}dx$ 2) $\int \cos^2 x\sin^3 xdx$
15	1) $\int \frac{3x-1}{x^3+3x}dx$ 2) $\int \sin^4 3xdx$	16	1) $\int \frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}dx$ 2) $\int \cos^3 2xdx$
17	1) $\int \frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx$ 2) $\int \cos^2 x\sin^2 xdx$	18	1) $\int \frac{5x-11}{x(x^2+4)}dx$ 2) $\int \cos^3 x\sin^3 xdx$
19	1) $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2+3)}dx$ 2) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos^2 x}$	20	1) $\int \frac{2x}{x^3-1}dx$ 2) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}$

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

2) $\int e^{x^5}x^4dx$;

3) $\int(4x+1)\sin 3xdx$;

4) $\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx$.

Решение

1) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

Применим формулу интегрирования $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=4\int x^{-2}dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{3}}dx+6\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+6\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=-\frac{4}{x}-\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16}+9\sqrt[3]{x^2}+C.$$

2) $\int e^{x^5}x^4dx$.

Применим способ замены переменной:

$$\int e^{x^5}x^4dx=\begin{bmatrix} u=x^5, \\ du=5x^4dx, \\ x^4dx=\frac{1}{5}du \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int e^u du=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{x^5}+C.$$

3) $\int(4x+1)\sin 3xdx$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

$$\int(4x+1)\sin 3xdx=\begin{bmatrix} u=4x+1, & du=4dx \\ dv=\sin 3xdx, & v=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{3}\int\cos 3xdx=-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x+C=$$

$$-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{9}\sin 3x+C.$$

4) $\int\frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx$.

Подынтегральная функция является простейшей рациональной дробью третьего типа. В ее знаменателе выделим полный квадрат и сделаем замену переменных:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx = \begin{bmatrix} x^2-6x+13= \\ =x^2-6x+9+4= \\ =(x-3)^2+4, \\ x-3=t, \\ x=t+3, dx=dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{2(t+3)-2}{t^2+4}dt = \int \frac{2t+4}{t^2+4}dt = \int \frac{2tdt}{t^2+4} +$$

$$+4\int \frac{dt}{4+t^2} = \int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + 4\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$$

$$= \ln\left|t^2+4\right| + 4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \ln\left|x^2-6x+13\right| + 2\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C.$$

Повышенный уровень

Задание 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{3x-4}{x^3+x^2-2x}dx$;

2) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$.

Решение

1) $\int \frac{3x-4}{x^3+x^2-2x}dx$.

Разложим подынтегральную дробь $\frac{3x-4}{x^3+x^2-2x}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{3x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{3x-4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} =$$

$$\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

Приравниваем числители данной и полученной дроби:

$$3x-4 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

Найдем коэффициенты A, B, C методом частных значений:

$$\begin{array}{l|} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array} \begin{cases} -2A=-4, \\ 3B=-1, \\ 6C=-10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2, \\ B = -\dfrac{1}{3}, \\ C = -\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Тогда

$$\int \frac{3x-4}{x^3+x^2-2x}dx = 2\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{5}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2} = 2\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{5}{3}\ln|x+2| + C.$$

2) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$.

Применим основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Получим:

$$\int \cos^3 x \sin^4 x dx = \int \cos^2 x \cos x \sin^4 x dx = \int (1-\sin^2 x)\sin^4 x \cos x dx =$$

$$\left[\begin{aligned} t &= \sin x, \\ dt &= \cos x dx \end{aligned}\right]$$

$$= \int (1-t^2)t^4 dt = \int (t^4 - t^6)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

4.2. Индивидуальное домашнее задание №2 «Определенный интеграл и его применение»

Базовый уровень

Задание 1. Вычислить определенный интеграл (табл. 16):

Таблица 16. Исходные данные

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	*2*	*3*	*4*
1	$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx$	2	$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$
3	$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}}$	4	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	*2*	*3*	*4*
5	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$	6	$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$
7	$\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$	8	$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$
9	$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$	10	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$
11	$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$	12	$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
13	$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}$	14	$\int_1^e \frac{\ln^2 xdx}{x}$
15	$\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$	16	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$
17	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$	18	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3-\sin x} dx$
19	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	20	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x}{4-\cos x} dx$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл (табл. 17):

Таблица 17. Исходные данные

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	*2*	*3*	*4*
1	$\int_2^3 x\ln(x-1)dx$	2	$\int_1^2 \ln(3x+2)dx$
3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$	4	$\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx$

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	*2*	*3*	*4*
5	$\int_1^2 (x-1)\ln x dx$	6	$\int_0^2 xe^{-x}dx$
7	$\int_{-\frac{1}{2}}^0 xe^{-2x}dx$	8	$\int_1^e x\ln x dx$
9	$\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}} \frac{x}{e^{3x}}dx$	10	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x-2)\cos x dx$
11	$\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$	12	$\int_1^{e^3} \ln x dx$
13	$\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$	14	$\int_0^{\pi} x\sin 7x dx$
15	$\int_1^2 x^2\ln x dx$	16	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (3x+5)\cos x dx$
17	$\int_{-3}^0 (x-2)e^{-\frac{x}{3}}dx$	18	$\int_1^e \frac{\ln x dx}{x^2}$
19	$\int_{-1}^0 x\ln(1-x)dx$	20	$\int_0^{\pi} (2x-4)\sin x dx$

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (табл. 18). Построить фигуру.

Таблица 18. Исходные данные

Номер варианта	Уравнения линий
1	*2*
1	$y=\frac{1}{2}x^2-x+1,\quad y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$
2	$y=\frac{1}{2}x^2+x+2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$
3	$y=\frac{1}{3}x^2-3x+2,\quad y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$

1	*2*
4	$y = 2x^2 + 6x - 3, \quad y = -x^2 + x + 5$
5	$y = 3x^2 - 5x - 1, \quad y = -x^2 + 2x + 1$
6	$y = x^2 - 3x - 1, \quad y = -x^2 - 2x + 5$
7	$y = 2x^2 - 6x + 1, \quad y = -x^2 + x - 1$
8	$y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4, \quad y = -\frac{2}{3}x^2 - x + 2$
9	$y = x^2 - 5x - 3, \quad y = -3x^2 + 2x - 1$
10	$y = x^2 - 2x - 5, \quad y = -x^2 - x + 1$
11	$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5, \quad y = -\frac{3}{4}x^2 - x + 1$
12	$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3$
13	$y = 2x^2 - 6x - 2, \quad y = -x^2 + x - 4$
14	$y = 2x^2 + 3x + 1, \quad y = -x^2 - 2x + 9$
15	$y = x^2 - 2x - 4, \quad y = -x^2 - x + 2$
16	$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3$
17	$y = 2x^2 + 4x - 7, \quad y = -x^2 - x + 1$
18	$y = 2x^2 - 6x + 3, \quad y = -2x^2 + x + 5$
19	$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1, \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$
20	$y = x^2 - 3x - 4, \quad y = -x^2 - x + 8$

Задание 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой, прямой и осью Ox (табл. 19). Сделать рисунок фигуры вращения.

Таблица 19. Исходные данные

Номер варианта	Уравнения линий	Номер варианта	Уравнения линий
1	*2*	*3*	*4*
1	$y=2x^2, \quad y=-2x+4$	2	$y=4x^2, \quad y=-2x+6$
3	$y=x^2, \quad y=-x+2$	4	$y=x^2, \quad y=-x+3$
5	$y=3x^2, \quad y=-x+4$	6	$y=2x^2, \quad y=-3x+14$
7	$y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=-x+3$	8	$y=\frac{1}{3}x^2, \quad y=-x+6$
9	$y=\frac{1}{2}x^2, \quad y=-3x+8$	10	$y=3x^2, \quad y=-2x+5$
11	$y=\frac{1}{3}x^2, \quad y=-3x+12$	12	$y=\frac{1}{3}x^2, \quad y=-2x+9$
13	$y=4x^2, \quad y=-2x+2$	14	$y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=-2x+6$
15	$y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=-\frac{1}{2}x+2$	16	$y=2x^2, \quad y=-x+10$
17	$y=3x^2, \quad y=-3x+6$	18	$y=\frac{1}{2}x^2, \quad y=-x+3$
19	$y=x^2, \quad y=-2x+5$	20	$y=3x^2, \quad y=-5x+8$

Повышенный уровень

Задание 5. Вычислить длину дуги кривой (табл. 20):

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad t_1 \le t \le t_2 .$$

Таблица 20. Исходные данные

Номер варианта	$x(t)$	$y(t)$	t_1	t_2
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	$a\sin^3 t$	$b\cos^3 t$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	$2t$	$\frac{4}{3}\sqrt{t^3}$	-1	0
3	$2(t-\sin t)$	$2(1-\cos t)$	0	2π

Номер варианта	$x(t)$	$y(t)$	t_1	t_2
1	*2*	*3*	*4*	*5*
4	$\frac{1}{3}t^3 - t$	$t^2 + 2$	0	3
5	$e^t \cos t$	$e^t \sin t$	0	$\ln \pi$
6	$8\sin t + 6\cos t$	$6\sin t - 8\cos t$	0	$\frac{\pi}{2}$
7	$\cos^3 t$	$\sin^3 t$	0	$\frac{\pi}{2}$
8	$4(t - \sin t)$	$4(1 - \cos t)$	0	2π
9	$2(\cos t + t\sin t)$	$2(\sin t - t\cos t)$	0	π
10	t^2	$t - \frac{1}{3}t^3$	0	1
11	$b\cos^3 t$	$a\sin^3 t$	0	$\frac{\pi}{2}$
12	$\cos t + t\sin t$	$\sin t - t\cos t$	0	$\frac{\pi}{4}$
13	$3(t - \sin t)$	$3(1 - \cos t)$	π	2π
14	$2\cos t$	$2\sin t$	0	$\frac{\pi}{3}$
15	$e^t \sin t$	$e^t \cos t$	0	π
16	$\frac{1}{6}t^6$	$2 - \frac{t^4}{4}$	0	1
17	$4\cos t$	$4\sin t$	0	$\frac{\pi}{3}$
18	$3\sin t + 4\cos t$	$4\sin t - 3\cos t$	0	π
19	$2\cos t - \cos 2t$	$2\sin t - \sin 2t$	0	$\frac{\pi}{2}$
20	$\frac{1}{3}t^3 - t$	$t^2 + 1$	0	1

Задание 6. Стоимость перевозки 1 т груза на 1 км (тариф перевозки) задается функцией $f\left(x\right)=\dfrac{10}{x+2}$ (ден. ед/км). Определить затраты на перевозку 1 т груза на расстояние 20 км.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx$.

Решение

Выполним замену переменной. Пусть $t=1+x^2$, тогда $dt=2xdx$, откуда $xdx=\dfrac{1}{2}dt$. Находим новые пределы интегрирования. Если $x=0$, то $t=1$. Если $x=\sqrt{3}$, то $t=4$, что следует из зависимости $t=1+x^2$.

Тогда

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^4\sqrt[3]{t}dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 t^{\frac{1}{3}}dt=$$

Применим формулу интеграла от степенной функции $\int u^n du=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C$ и формулу Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=F\left(x\right)\Big|_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right)$:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4}\Bigg|_1^4=\frac{3\sqrt[3]{t^4}}{8}\Bigg|_1^4=\frac{3}{8}\sqrt[3]{4^4}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{1^4}=\frac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4}-1\right).$$

Ответ: $\dfrac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4}-1\right)$.

Задание 2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_2^3 x\ln\left(x-1\right)dx$.

Решение

Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Пусть $u = \ln(x-1)$, $dv = xdx$.

Находим $du = \dfrac{dx}{x-1}$, $v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}$.

Тогда

$$\int_2^3 x\ln(x-1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x-1)\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}dx = \frac{9}{2}\ln 2 - 2\ln 1 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2-1+1}{x-1}dx =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}dx = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_2^3 \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\int_2^3 xdx + \int_2^3 dx + \int_2^3 \frac{d(x-1)}{x-1}\right) = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 + x\Big|_2^3 + \ln(x-1)\Big|_2^3\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 2 + 3 - 2 + \ln 2 - \ln 1\right) = 4\ln 2 - \frac{7}{4}.$$

Ответ: $4\ln 2 - \dfrac{7}{4}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 - x - 2$ и $y = -x^2 + x - 1$. Построить фигуру.

Решение

Построив линии, получим фигуру (рис. 8).

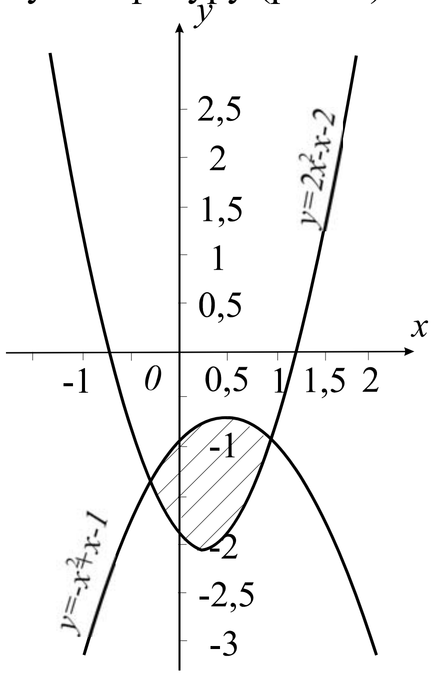

Рис. 8. Фигура

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1, \qquad x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Вычисление площади осуществляем по формуле

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx,$$

где $y = f(x)$, $y = g(x)$ — кривые, ограничивающие фигуру $\left(f(x) \geq g(x)\right)$.

Тогда

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(\left(-x^2 + x - 1\right) - \left(2x^2 - x - 2\right)\right) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-3x^2 + 2x + 1\right) dx =$$

$$= \left(-3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \left(x^3 + x^2 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$= (-1 + 1 + 1) - \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{34}{27} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\frac{34}{27}$ кв. ед.

Задание 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой $y = 8x^2$, прямой $y = -6x + 14$ и осью Ox. Сделать рисунок фигуры вращения.

Решение

Построив линии, получим фигуру вращения (рис. 9).

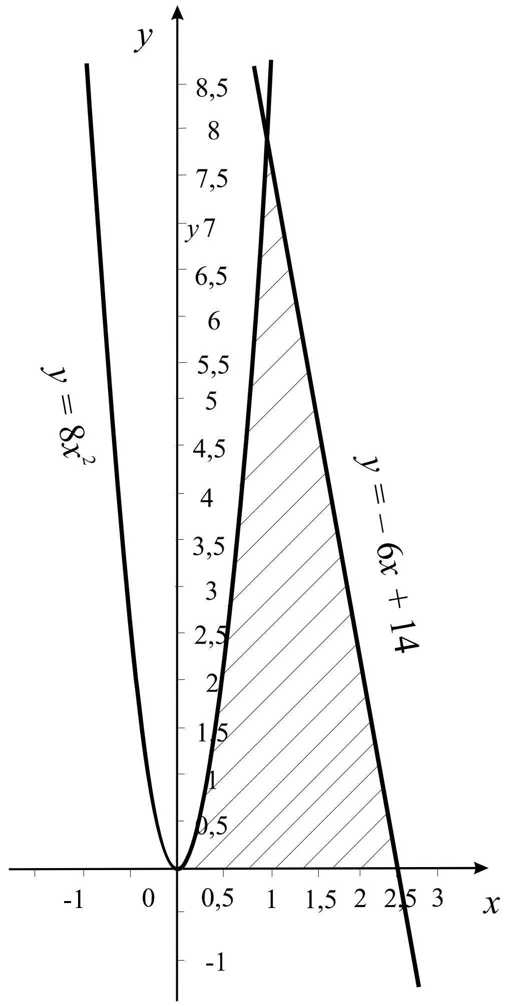

Рис. 9. Фигура вращения

Найдем абсциссу точки пересечения параболы и прямой в первом квадранте. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$8x^2 = -6x + 14.$$

Решим полученное квадратное уравнение.

$$4x^2 + 3x - 7 = 0,$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot (-7) = 121,$$

$$x_1 = \frac{-3-11}{8} = -\frac{7}{4}, \qquad x_2 = \frac{-3+11}{8} = 1.$$

Первому квадранту соответствует корень $x_2 = 1$.

Найдем абсциссу точки пересечения прямой $y = -6x + 14$ с осью Ox, решив уравнение $-6x + 14 = 0$, откуда $x = \frac{7}{3}$.

Таким образом, тело ограничено при $0 \le x \le 1$ поверхностью, образованной вращением параболы $y = 8x^2$ вокруг оси Ox, а при $1 \le x \le \frac{7}{3}$ — вращением прямой $y = -6x + 14$.

Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

где $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ — уравнения линий, ограничивающих криволинейную трапецию, которая вращается вокруг оси Ox.

Тогда искомый объем:

$$V=\pi\int_0^1\left(8x^2\right)^2dx+\pi\int_1^{\frac{7}{3}}(-6x+14)^2\,dx.$$

Для вычисления второго интеграла применим метод подведения под знак дифференциала:

$$V=64\pi\int_0^1 x^4dx-\frac{\pi}{6}\int_1^{\frac{7}{3}}(-6x+14)^2\,d(-6x+14)=$$

$$=64\pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1-\frac{\pi}{6}\cdot\frac{(-6x+14)^3}{3}\Bigg|_1^{\frac{7}{3}}=\frac{64\pi}{5}+\frac{256\pi}{9}=\frac{1\,856}{45}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $\frac{1856}{45}\pi$ куб. ед.

Повышенный уровень

Задание 5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t \\ y=\left(t^2-2\right)\cos t-2t\sin t \end{cases}$, где $0\le t\le\pi$.

Решение

Если уравнение кривой задано в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},$$

где $t_1\le t\le t_2$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Найдем $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t)=\left(t^2-2\right)'\sin t+\left(t^2-2\right)(\sin t)'+(2t)'\cos t+2t(\cos t)'=$$

$$=2t\sin t+\left(t^2-2\right)\cos t+2\cos t-2t\sin t=t^2\cos t,$$

$$y'(t)=\left(t^2-2\right)'\cos t+\left(t^2-2\right)(\cos t)'-(2t)'\sin t-2t(\sin t)'=$$

$$=2t\cos t-\left(t^2-2\right)\sin t-2\sin t-2t\cos t=-t^2\sin t.$$

Тогда

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(t^2\cos t\right)^2+\left(-t^2\sin t\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{t^4\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt=\int_0^{\pi}t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}\text{ (ед.).}$$

Ответ: $\frac{\pi^3}{3}$ ед.

4.3. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №4 «Применение интеграла в экономике»

Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 623–626, 652–653.

Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 626, № 11.20; с. 652, № 11.142.

Ответьте письменно на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Пусть функция $z=f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Объясните, как с помощью определенного интеграла можно найти объем продукции *u,* произведенной за промежуток времени $[0;T]$.
2. Решите № 11.146.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Индивидуальное домашнее задание №3 «Дифференциальные уравнения»

Базовый уровень

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 21):

Таблица 21. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$y - xy = \left(1 + x^2\right) y'$
2	$x\left(1 + y^2\right) + y\left(1 - x^2\right)y' = 0$
3	$y' = \left(2y + 1\right)ctgx$
4	$\left(1 + x^2\right)y' = y\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$
5	$\left(1 + x^2\right)y^3 + \left(1 - y^2\right)x^3 y' = 0$
6	$x\left(1 + y^2\right) + \left(1 + y^3\right)y' = 0$
7	$y' \cos x = \left(y + 1\right)\sin x$
8	$\left(2 + y\right)dx - \left(2 - x\right)dy = 0$
9	$\left(e^{2x} + 1\right)dy + ye^{2x}dx = 0$
10	$y' tgx - y = 0$
11	$y' \sin x - y \ln y = 0$
12	$y' = e^{x-y}$
13	$\left(e^x + 2\right)y' = ye^x$
14	$\left(e^x + 1\right)dy + e^x dx = 0$
15	$x^2 dy + \left(y - 1\right)dx = 0$
16	$y' \cos x - y \sin x = 0$
17	$\left(1 + x^2\right)y' = 1 + y^2$
18	$e^y\left(1 + x^2\right)y' - 2x\left(1 + e^y\right) = 0$
19	$\left(x^2 - 1\right)y' + 2xy^2 = 0$
20	$xy\left(1 + x^2\right)y' = 1 + y^2$

Задание 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 22).

Таблица 22. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$xye^{\frac{x}{y}} + y^2 = x^2 y' e^{\frac{x}{y}}$
2	$(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$
3	$x \ln \frac{x}{y} dy - ydx = 0$
4	$xyy' = y^2 + 8x^2$
5	$y' = \frac{x - y}{x + y}$
6	$2x^2 y' + x^2 + y^2 = 0$
7	$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$
8	$4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$
9	$y' = \frac{8x + 5y}{5x - 2y}$
10	$x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$
11	$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
12	$xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$
13	$xy' = y \ln \frac{y}{x}$
14	$(x^2 - y^2)y' = 2xy$
15	$y' = \frac{x + y}{x - y}$
16	$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$
17	$xy' - y = xtg \frac{y}{x}$
18	$xy' - y - \sqrt{xy} = 0$
19	$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$
20	$y' = \frac{y^2}{x^2 + xy}$

Задание 3.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (табл. 23).

Таблица 23. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	$(1+x^2)y' + y = arctgx$
2	$y'\cos^2 x + y = tgx$
3	$xy' + y - x - 1 = 0$
4	$x^2 y' = 2xy + 3$
5	$xy' + y - 3 = 0$
6	$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
7	$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$
8	$x^3 y' + 3x^2 y = 2$
9	$xy' - y = -2\ln x$
10	$xy' - y = x^3$
11	$y' - y = e^x$
12	$2xy' + y = 2x^3$
13	$y'x\ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$
14	$xy' - y = -\ln x$
15	$y' - y\cos x = -\sin 2x$
16	$xy' + y = x + 1$
17	$y'\cos x + y\sin x = 2x\cos^2 x$
18	$xy' - 3y = x^4 \ln x$
19	$xy' - 2y = 4x^3 \cos^2 x$
20	$xy' - 5y = e^x x^7$

Повышенный уровень

Задание 4. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка, при указанных начальных условиях (табл. 24).

Таблица 24. Исходные данные

№ варианта	Уравнение	Начальные условия
1	2	3
1	$(y-2)y'' = 2(y')^2$	$y(0) = 3$, $y'(0) = 1$
2	$y'y'' = 2y$	$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
3	$y'' - e^y y' = 0$	$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

1	2	3
4	$x^3y'' = 4\ln x$	$y(1) = 4$, $y'(1) = 0$
5	$y'' + y'tgx = \cos x$	$y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{\pi}{2}$
6	$xy'' = \ln x + 1$	$y(1) = 0$, $y'(1) = 0$
7	$xy'' - 2y' = 2x^4$	$y(1) = \dfrac{1}{5}$, $y'(1) = 4$
8	$y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	$y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
9	$y'' - y'ctgx = \sin x$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
10	$xy'' - y' - x^2 = 0$	$y(1) = \dfrac{4}{3}$, $y'(1) = 3$
11	$2y'' = e^{4y}$	$y(0) = 0$, $y'(0) = \dfrac{1}{2}$
12	$y''y^3 = 1$	$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
13	$y'y'' = 1$	$y(0) = \dfrac{1}{3}$, $y'(0) = 1$
14	$yy'' = (y')^2$	$y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
15	$2(y')^2 = (y-1)y''$	$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
16	$y'' = xe^x$	$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
17	$(x^2+1)y'' = 2xy'$	$y(0) = 1$, $y'(0) = 3$
18	$2y'' - 3y^2 = 0$	$y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$
19	$2yy'' = (y')^2$	$y(0) = 4$, $y'(0) = 2$
20	$2yy'' = 1 + (y')^2$	$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения (табл. 25).

Таблица 25. Исходные данные

№ варианта	Уравнение
1	*2*
1	$y'' + 2y' - 3y = 6x$
2	$y'' - 4y' = 4x^2 - 8x$
3	$y'' + 2y' + 2y = x^2 + 1$
4	$y'' - 4y' = 8x + 4$

1	*2*
5	$y'' - 4y' = x^2 + x$
6	$y'' + 2y' + 2y = 3x^2 + x$
7	$y'' + 2y' + 2y = x + 2$
8	$y'' + 2y' + 2y = x^3 + x + 1$
9	$y'' - 4y' = 12x^2$
10	$y'' - 3y' = 2 - 6x$
11	$y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$
12	$y'' + 2y' + 2y = x^3 + 2x^2 + 3$
13	$y'' + 2y' + 2y = x^2 - 1$
14	$y'' - 4y' = x^2 + x - 4$
15	$y'' + 2y' + 2y = x^2 + 2x + 1$
16	$y + 2y' + 2y = 2x^3 + 2x^2$
17	$y'' + 2y' - 3y = 6x$
18	$y'' + 2y' - 3y = 6x$
19	$y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$
20	$y'' - y = x^2$

Задание 6. Рост объема реализованной продукции некоторой отрасли в условиях конкурентного рынка имеет вид $y' = mlp(y)y$, где $y(t)$ – объем продукции, реализованной к моменту времени *t*, $p(y) = \left(5 + 3e^{-y}\right)y^{-1}$ – уравнение кривой спроса, то есть зависимости цены *p* реализованной продукции от ее объема *y*, $m = 0{,}6$ – норма инвестиций ($m = \dfrac{I(t)}{Y(t)}$, где $Y(t)$ – доход к моменту времени *t*, $I(t)$ – величина инвестиций к моменту времени *t*), $\dfrac{1}{l} = 2{,}5$ – норма акселерации $\left(\dfrac{1}{l} = \dfrac{I(t)}{y'(t)}\right)$. Найдите зависимость $y = y(t)$ объема реализованной продукции от времени, если известно, что $y(0) = 1$.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$.

Решение

Уравнение $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$ является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, деля обе части уравнения на $\left(1+x^2\right)\sqrt{1+y^2}$, получим:

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = 0.$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = C,$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1+y^2\right) = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \sqrt{1+y^2} = C.$$

Получили общий интеграл данного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \sqrt{1+y^2} = C$.

Задание 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\left(xy + y^2\right)dx - x^2 dy = 0$.

Решение

Уравнение $\left(xy + y^2\right)dx - x^2 dy = 0$ является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части уравнения на dx:

$$\left(xy + y^2\right) - x^2\frac{dy}{dx} = 0.$$

Так как $\frac{dy}{dx} = y'$, получим:

$$\left(xy + y^2\right) - x^2 y' = 0,$$

$$x^2 y' = xy + y^2,$$

$$y' = \frac{xy + y^2}{x^2},$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}.$$

Сделаем замену $u = \dfrac{y}{x}$, где u — некоторая функция переменной x. Тогда $y = ux$. Дифференцируя, получим $y' = u'x + u$.

В результате замены заданное уравнение примет вид:

$$u'x + u = u + u^2$$

или

$$u'x = u^2,$$

$$x\frac{du}{dx} = u^2.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные, проинтегрируем и получим его общий интеграл:

$$xdu = u^2 dx,$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C,$$

Так как $u = \dfrac{y}{x}$, то имеем:

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C,$$

откуда

$$y = -\frac{x}{\ln|x| + C}.$$

Получили общее решение данного однородного дифференциального уравнения.

Ответ: $y = -\dfrac{x}{\ln|x| + C}$.

Задание 3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x^2 y' - 5xy - 1 = 0$.

Решение

Уравнение $x^2 y' - 5xy - 1 = 0$ является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части уравнения на x^2:

$$y' - \frac{5}{x} y = \frac{1}{x^2}.$$

Сделаем замену $y = uv$, где u и v — некоторые функции переменной x. Дифференцируя, получим $y' = u'v + uv'$.

В результате замены заданное уравнение примет вид:

$$u'v + uv' - \frac{5}{x} uv = \frac{1}{x^2}$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{5}{x} v\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Выберем функцию v так, чтобы имело место равенство

$$v' - \frac{5}{x} v = 0.$$

Найдем из него функцию v, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{5v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{5dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = 5\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = 5\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\left|x^5\right|,$$

$$v = x^5.$$

Найдем из него функцию v, как частное решение:

$$u'v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v = x^5$, получим уравнение:

$$x^5 u' = \frac{1}{x^2}.$$

Найдем из него функцию u, как общее решение:

$$x^5\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2},$$

$$x^5du=\frac{dx}{x^2},$$

$$du=\frac{dx}{x^7},$$

$$\int du=\int\frac{dx}{x^7},$$

$$u=-\frac{1}{6x^6}+C.$$

Тогда

$$y=uv=\left(-\frac{1}{6x^6}+C\right)x^5=Cx^5-\frac{1}{6x}.$$

Итак, $y=Cx^5-\frac{1}{6x}$ — общее решение данного линейного дифференциального уравнения.

Ответ: $y=Cx^5-\frac{1}{6x}$.

Повышенный уровень

Задание 4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=\frac{1}{x^2}-\frac{y'}{x}$, если $y(1)=1$, $y'(1)=2$.

Решение

Уравнение $y''=\frac{1}{x^2}-\frac{y'}{x}$ не содержит явным образом функцию y, поэтому является дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка с помощью замены $y'=p$, где $p=p(x)$. Тогда $y''=p'$.

В результате замены уравнение примет вид:

$$p'=\frac{1}{x^2}-\frac{p}{x}$$

или

$$p'+\frac{p}{x}=\frac{1}{x^2}.$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения применим замену $p=uv$, $p'=u'v+uv'$. В результате которой уравнение примет вид:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2}$$

или

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Выберем функцию v так, чтобы имело место равенство

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

Найдем из него функцию v, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

При таком выборе функции v функция u находится из уравнения

$$u'v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v = \frac{1}{x}$, получим уравнение:

$$\frac{1}{x}u' = \frac{1}{x^2}.$$

Найдем из него функцию u, как общее решение:

$$\frac{du}{xdx} = \frac{1}{x^2},$$

$$du = \frac{dx}{x},$$

$$\int du = \int \frac{dx}{x},$$

$$u = \ln|x| + C_1.$$

Тогда

$$p = uv = \left(\ln|x| + C_1\right)\frac{1}{x} = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{C_1}{x}.$$

Так как $p = y'$, то имеем:

$$y' = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{C_1}{x}.$$

Используем начальное условие $y'(1) = 2$. Подставляя в последнее равенство $x = 1$, $y' = 2$, найдем C_1:

$$2 = \frac{\ln 1}{1} + \frac{C_1}{1},$$

$$C_1 = 2.$$

Тогда

$$y' = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{2}{x}.$$

Интегрированием найдем из полученного уравнения функцию y:

$$y = \int\left(\frac{\ln|x|}{x} + \frac{2}{x}\right)dx = \int \ln|x| d(\ln|x|) + 2\int\frac{dx}{x} = \frac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + C_2.$$

Итак, получили:

$$y = \frac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + C_2.$$

Используем начальное условие $y(1) = 1$. Подставляя в последнее равенство $x = 1$, $y = 1$, найдем C_2:

$$1 = \frac{\ln^2 1}{2} + 2\ln 1 + C_2,$$

$$C_2 = 1.$$

Следовательно,

$$y = \frac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + 1.$$

Получили частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

Ответ: $y = \dfrac{\ln^2|x|}{2} + 2\ln|x| + 1$.

Задание 5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1$.

Решение

Уравнение $y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k = 0.$$

Его корни: $k_1 = 0$ и $k_2 = -2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x}$$

или

$$y_{оо} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой многочлен второй степени и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y''_{чн} = 6Ax + 2B.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$6Ax + 2B + 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = x^2 + 2x - 1$$

или

$$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2 + 2x - 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 2, \\ 2B + 2C = -1. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$A = \frac{1}{6},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{3}{4}.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$

5.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №5 «Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике»

Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 690–694, 723–728.

Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 692–693. – № 2.23.

Ответьте письменно на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Приведите пример использования дифференциальных уравнений в в экономической динамике.
2. Решите № 12.122.

6. РЯДЫ

6.1. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №6 «Применение рядов в приближенных вычислениях»

Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. –

М. : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 783–788, 798–801, 805–812.

Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 799–800. – № 14.36, 14.37; С 805–812. – № 14.72, 14.73, 14.74.

Ответьте письменно на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Запишите ряд Тейлора.
2. Запишите ряд Маклорена.
3. Составьте таблицу «Разложения в ряд Маклорена некоторых функций» (табл. 26).

Таблица 26. Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

Функция	Разложение функции в ряд Маклорена
$y = e^x$	
$y = \sin x$	
$y = \cos x$	
$y = (1+x)^m$, $m \in R$	
$y = \ln(1+x)$	
$y = \operatorname{arctg} x$	

4. В каких приближенных вычислениях используются ряды?
5. Решите: № 14.41, 14.42, 14.44, 14.46, 14.76, 14.89, 14.96.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основная литература

1. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н.Ш., ред. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2012. - 909 с. - (Бакалавр. Углубленный курс).

Дополнительная литература

1. Ведина, О.И. Математический анализ для экономистов [Текст] : учебник / О. И. Ведина, В. Н. Десницкая, Г. Б. Варфоломеева. - 2-е изд., перераб. и доп. - СПб : Лань, 2004. - 344 с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Малыхин, В.И. Математика в экономике [Текст] : учеб. пособие. - М. : ИНФРА-М, 2002. - 352 с. - (Высшее образование).
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. [Текст] . Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – 6-е изд. – М : Айрис-пресс, 2011. – 288 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. [Текст] : тридцать пять лекций. Ч. 2. – 5-е изд. – Москва : Айрис-Пресс, 2008. – 256 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Правила и формулы дифференцирования

Функция простого аргумента	*Сложная функция*
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(\mathrm{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\mathrm{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\left(\mathrm{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\mathrm{ctg} u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\mathrm{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
Основные правила дифференцирования	
$C' = 0$	$\left(u+v\right)' = u' + v'$
$\left(Cu\right)' = Cu'$	$\left(u-v\right)' = u' - v'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Приложение 2

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int u^a du = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$

2. $\int du = u + C$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u du = e^u + C$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u du = \sin u + C$

8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C$

10.1. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C$

12.1. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$

13. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

Дополнительные формулы

1. $\int tg\, u du = -\ln|\cos u| + C$

2. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$

3. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{u}{2}\right| + C$

4. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| + C$

Учебно-методическое издание

Математический анализ : учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы и выполнению расчетно-графической работы / сост. Л.Б. Рыбина, А.Е. Березкина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2021. — 79 с. ; 20 см. — 50 экз. — Текст непосредственный.

Компьютерная вёрстка Е.В. Рябикова
Корректор Т.В. Кулинич