МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Для контактной и самостоятельной работы студентов 1-го курса направления подготовки 07.03.01 Архитектура, направленность «Архитектурное проектирование», очной формы обучения

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2021

УДК 512(076)
ББК 22.1
М 34

Составитель: канд. филос. наук, доцент кафедры высшей математики Костромской ГСХА *Л.Б. Рыбина.*

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, д-р экон. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Костромской ГСХА *В.И. Цуриков*, д-р пед. наук, доцент, доцент кафедры физики и автоматики Костромской ГСХА *И.А. Мамаева*.

Рекомендовано методической комиссией архитектурно-строительного факультета в качестве учебно-методического пособия для контактной и самостоятельной работы студентов 1-го курса направления подготовки 07.03.01 Архитектура, направленность «Архитектурное проектирование», очной формы обучения

М 34 **Математика :** учебно-методическое пособие / сост. Л.Б. Рыбина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2021. — 45 с. ; 20 см. — 50 экз. — Текст непосредственный.

Издание содержит задания для контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями, вопросы и задания для самостоятельного изучения учебного материала, список рекомендуемой литературы.

Учебно-методическое пособие предназначено для организации контактной и самостоятельной работы для студентов 1-го курса направления подготовки 07.03.01 Архитектура, направленность «Архитектурное проектирование», очной формы обучения.

УДК 512(076)
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы предназначено для студентов 1-го курса направления подготовки 07.03.01 Архитектура, направленность «Архитектурное проектирование» очной формы обучения.

Издание содержит задания для контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями, вопросы и задания для самостоятельного изучения учебного материала, список рекомендуемой литературы.

Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) являются одной из основных форм текущего контроля самостоятельной работы студентов. ИДЗ содержат комплект заданий, выполняя которые, студенты должны продемонстрировать умение решать типовые задачи и проводить типовые расчеты. Сроки выполнения ИДЗ указываются в рейтинг-плане. Оценка за ИДЗ является существенной компонентой оценки самостоятельной работы студента в течение семестра.

Цель ИДЗ — помочь студентам закрепить и отработать материал, изученный на лекциях и практических занятиях. Для достижения этой цели задания подобраны таким образом, чтобы они охватывали все основные типы задач.

Общие требования к выполнению ИДЗ

Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) должно выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяет преподаватель.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие. Решение задач следует излагать подробно. Все записи, чертежи должны быть аккуратными, четкими и разборчивыми.

На каждой странице тетради необходимо оставить поля шириной 3-5 см для замечаний рецензента. Страницы нумеруются.

Выполненная работа сдается преподавателю в указанный им срок. Рекомендуется внимательно разобрать решения типовых задач, которые приводятся в данном пособии.

Не зачтенная работа возвращается студенту для исправления ошибок. Все исправления ошибок делаются в конце работы. Исправления в тексте прорецензированной работы не допускаются. Работу с выполненными исправлениями следует сдать преподавателю для повторного рецензирования.

1-Й СЕМЕСТР

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Контрольная работа №1 «Элементы линейной и векторной алгебры»

Базовый уровень

Задание 1. Решить систему линейных уравнений (табл. 1):

1) по правилу Крамера, при этом Δ вычислить по правилу треугольников, Δ_1 вычислить, разложив по первой строке, Δ_2 вычислить, разложив по второму столбцу, Δ_3 вычислить, получив нули в каком-либо столбце и разложив по нему,

2) методом Гаусса.

Таблица 1. Исходные данные

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	*2*	*3*	*4*
1	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=7 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ -4x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1-x_3=1, \\ 2x_1+4x_2-x_3=-7, \\ x_1+8x_2-3x_3=12 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=15, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-9, \\ x_1+5x_2+x_3=20 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12, \\ -4x_1-x_2+3x_3=-9 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=12, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=5 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ x_1+5x_2+x_3=-3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3, \\ 3x_1-x_2+x_3=12 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 7x_1-5x_2=24, \\ 4x_1+11x_3=39, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=33 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2+2x_3=11, \\ 4x_1+x_2+4x_3=19 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-37, \\ 3x_1+x_2+x_3=3, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=76 \end{cases}$

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	*2*	*3*	*4*
7	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 23, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -10 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = -6, \\ 4x_1 + 11x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -9, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = -1, \\ 4x_1 + 11x_3 = 52, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 29 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \end{cases}$

Задание 2. Даны координаты вершин пирамиды A, B, C, D (табл. 2). Требуется:

1) координаты векторов $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$, записать их разложение по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$;

2) косинус угла BAC;

3) площадь грани ABC;

4) объем пирамиды $ABCD$.

Таблица 2. Исходные данные

Номер варианта	Координаты точек			
	A	*B*	*C*	*D*
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	$(3; -1; 2)$	$(4; -1; -1)$	$(2; 0; 2)$	$(1; 2; 4)$
2	$(2; -1; 2)$	$(3; -1; -1)$	$(1; 0; 2)$	$(0; 2; 4)$

1	*2*	*3*	*4*	*5*
3	$(3;0;2)$	$(4;0;-1)$	$(2;1;2)$	$(1;3;4)$
4	$(2;-1;3)$	$(3;-1;0)$	$(1;0;3)$	$(0;2;5)$
5	$(3;1;2)$	$(4;1;-1)$	$(2;2;2)$	$(1;4;4)$
6	$(2;1;2)$	$(3;1;-1)$	$(1;2;2)$	$(0;4;4)$
7	$(1;1;2)$	$(2;1;-1)$	$(0;2;2)$	$(-1;4;4)$
8	$(0;1;2)$	$(1;1;-1)$	$(-1;2;2)$	$(-2;4;4)$
9	$(0;2;2)$	$(1;2;-1)$	$(-1;3;2)$	$(-2;5;4)$
10	$(0;2;1)$	$(1;2;-2)$	$(-1;3;1)$	$(-2;5;3)$
11	$(2;1;0)$	$(5;3;1)$	$(0;1;2)$	$(4;3;1)$
12	$(1;1;0)$	$(2;3;1)$	$(1;-1;2)$	$(3;2;1)$
13	$(1;1;0)$	$(3;4;5)$	$(2;3;1)$	$(4;5;1)$
14	$(2;-1;0)$	$(-1;3;4)$	$(1;1;1)$	$(0;3;5)$
15	$(3;-1;2)$	$(7;9;1)$	$(5;1;2)$	$(1;2;0)$
16	$(2;4;-3)$	$(3;5;-4)$	$(4;5;-1)$	$(3;4;0)$
17	$(1;3;-1)$	$(2;0;7)$	$(-2;0;7)$	$(5;5;2)$
18	$(1;-1;1)$	$(4;1;2)$	$(2;0;1)$	$(5;2;8)$
19	$(1;4;-2)$	$(-2;5;0)$	$(3;4;0)$	$(2;5;-1)$
20	$(2;-1;1)$	$(4;-4;1)$	$(1;0;1)$	$(3;4;6)$

Повышенный уровень

Задание №3.

1 вариант:

Найти равнодействующую двух сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, модули которых равны $\left|\overline{F_1}\right| = 5$ и $\left|\overline{F_2}\right| = 7$, угол между ними равен 60°. Определите также углы α и β, образуемые равнодействующей с силами $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$.

2 вариант:

Дана сила $\overline{F} = (3, 4, -2)$ и точка ее приложения $A(2, -1, 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Задание №4.

1 вариант:

Приведите примеры применения методов линейной алгебры для решения профессиональных задач.

2 вариант:

Приведите примеры применения методов векторной алгебры для решения профессиональных задач.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

1) по правилу Крамера, при этом Δ вычислить по правилу треугольников, Δ_1 вычислить, разложив по первой строке, Δ_2 вычислить, разложив по второму столбцу, Δ_3 вычислить, получив нули в каком-либо столбце и разложив по нему,

2) методом Гаусса.

Решение

1. Решим систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Составим определитель системы из коэффициентов при неизвестных и вычислим его по правилу треугольников:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot3+5\cdot(-1)\cdot4-4\cdot1\cdot3-2\cdot5\cdot1-2\cdot(-1)\cdot1=$$

$$=1+12-20-12-10+2=-27.$$

Составим определитель Δ_1, заменив в определителе системы Δ первый столбец столбцом свободных членов, и вычислим его, разложив по первой строке:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}16 & 2 & 4\\ 8 & 1 & 2\\ 10 & -1 & 1\end{vmatrix}=16\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8 & 2\\ 10 & 1\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8 & 1\\ 10 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=16\cdot(1\cdot1-2\cdot(-1))-2\cdot(8\cdot1-2\cdot10)+4\cdot(8\cdot(-1)-1\cdot10)=$$

$$=16\cdot3-2\cdot(-12)+4\cdot(-18)=48+24-72=0.$$

Составим определитель Δ_2, заменив в определителе системы Δ второй столбец столбцом свободных членов, и вычислим его, разложив по второму столбцу:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 16 & 4\\ 5 & 8 & 2\\ 3 & 10 & 1\end{vmatrix}=16\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}+8\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}+10\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-16\cdot(5\cdot1-2\cdot3)+8\cdot(1\cdot1-4\cdot3)-10\cdot(1\cdot2-4\cdot5)=$$

$$=-16\cdot(-1)+8\cdot(-11)-10\cdot(-18)=16-88+180=108.$$

Составим определитель Δ_3, заменив в определителе системы Δ третий столбец столбцом свободных членов, и вычислим его, получив нули в первом столбце и разложив по нему:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 16\\ 5 & 1 & 8\\ 3 & -1 & 10\end{vmatrix}=$$

Умножим элементы первой строки на (-5) и прибавим к соответствующим элементам второй строки; затем умножим элементы первой строки на (-3) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 16\\ 0 & -9 & -72\\ 0 & -7 & -38\end{vmatrix}=$$

Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-9 & -72\\ -7 & -38\end{vmatrix}=-9\cdot(-38)-(-72)\cdot(-7)=342-504=-162\,.$$

Вычислим x_1, x_2 и x_3 по правилу Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{0}{-27}=0\,,$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{108}{-27}=-4\,,$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-162}{-27}=6\,.$$

Итак, $(0,-4,6)$ — решение системы.

Ответ: $(0,-4,6)$.

2. Решим систему $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=16,\\ 5x_1+x_2+2x_3=8,\\ 3x_1-x_2+x_3=10\end{cases}$ методом Гаусса.

Умножим первое уравнение на (-5) и прибавим ко второму уравнению; умножим первое уравнение на (-3) и прибавим к третьему. Получим:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=16,\\ \quad -9x_2-18x_3=-72,\\ \quad -7x_2-11x_3=-38.\end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $\left(-\frac{1}{9}\right)$, получим:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=16,\\ \quad x_2+2x_3=8,\\ \quad -7x_2-11x_3=-38.\end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 7 и прибавим к третьему. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 8, \\ \qquad\qquad 3x_3 = 18. \end{cases}$$

Умножим третье уравнение на $\frac{1}{3}$, получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 8, \\ \qquad\qquad x_3 = 6. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Получили систему ступенчатого вида. Начиная с третьего уравнения, обратным ходом находим неизвестные:

$$x_3 = 6,$$

$$x_2 = 8 - 2x_3 = 8 - 2 \cdot 6 = 8 - 12 = -4,$$

$$x_1 = 16 - 2x_2 - 4x_3 = 16 - 2 \cdot (-4) - 4 \cdot 6 = 16 + 8 - 24 = 0.$$

Итак, $(0, -4, 6)$ — решение системы.

Ответ: $(0, -4, 6)$.

Задание 2. Даны координаты вершин пирамиды $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 4)$.

Найти:

1) координаты векторов $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$, записать их разложение по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$;

2) косинус угла BAC;

3) площадь грани ABC;

4) объем пирамиды $ABCD$.

Решение

1. Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$, зная координаты его начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$, надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты его начала:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тогда

$$\bar{a} = \overline{AB} = (4 - 3; -1 + 1; -1 - 2) = (1; 0; -3),$$

$$\bar{b} = \overline{AC} = (2 - 3; 0 + 1; 2 - 2) = (-1; 1; 0),$$

$$\bar{c} = \overline{AD} = (1 - 3; 2 + 1; 4 - 2) = (-2; 3; 2).$$

Если вектор $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ задан своими координатами, то его можно записать в виде разложения по координатному базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ следующим образом:

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}.$$

Тогда разложение векторов $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$, $\overline{c} = \overline{AD}$ по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ имеет вид:

$$\overline{a} = \overline{i} + 3\overline{k},$$
$$\overline{b} = -\overline{i} + \overline{j},$$
$$\overline{c} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}.$$

2. Косинус угла BAC найдем как косинус угла между векторами $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AC}$ по формуле

$$\cos \angle BAC = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|},$$

где $\overline{a} \cdot \overline{b}$ — скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|$ — произведение длин векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Скалярное произведение векторов $\overline{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ и $\overline{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ находится по формуле

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Тогда

$$\cos \angle BAC = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Получим

$$\cos \angle BAC = \frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2}\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{20}} = -\frac{\sqrt{20}}{20}.$$

3. Площадь треугольника ABC вычислим по формуле

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|,$$

где $\overline{a} \times \overline{b}$ — векторное произведение векторов $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AC}$.

Векторное произведение векторов $\overline{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ и $\overline{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ находится по формуле

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Найдем векторное произведение векторов $\bar{a}=\overline{AB}=(1;0;-3)$ и $\bar{b}=\overline{AC}=(-1;1;0)$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 0 & -3\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}.$$

Тогда

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{3^2+3^2+1^2}=\sqrt{19}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{19}}{2}\ \text{(кв. ед.)}.$$

4. Объем пирамиды $ABCD$ находится по формуле

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|,$$

где $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ — смешанное произведение векторов $\bar{a}=\overline{AB}$, $\bar{b}=\overline{AC}$ и $\bar{c}=\overline{AD}$.

Смешанное произведение векторов $\bar{a}=(a_x;\,a_y;\,a_z)$, $\bar{b}=(b_x;\,b_y;\,b_z)$ и $\bar{c}=(c_x;c_y;c_z)$ находится по формуле

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Найдем смешанное произведение векторов $\bar{a}=\overline{AB}=(1;0;-3)$, $\bar{b}=\overline{AC}=(-1;1;0)$ и $\bar{c}=\overline{AD}=(-2;3;2)$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=2+3=5.$$

Тогда

$$V_{ABCD}=\frac{5}{6}\ \text{(куб. ед.)}.$$

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Индивидуальное домашнее задание №1 «Аналитическая геометрия»

Базовый уровень

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC (табл. 3). Найти:

1) длину стороны AB;
2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол A;
4) уравнение высоты CD и ее длину;
5) длину медианы AE;
6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;
7) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно высоте CD.

Таблица 3. Исходные данные

Номер варианта	A	B	C
1	$(-3;-2)$	$(0;10)$	$(6;2)$
2	$(1;1)$	$(4;13)$	$(10;5)$
3	$(0;3)$	$(3;15)$	$(9;7)$
4	$(-2;0)$	$(1;12)$	$(7;4)$
5	$(2;-1)$	$(5;11)$	$(11;3)$
6	$(3;-3)$	$(6;9)$	$(12;1)$
7	$(-1;2)$	$(2;14)$	$(8;6)$
8	$(5;-4)$	$(8;8)$	$(14;0)$
9	$(-4;5)$	$(-1;17)$	$(5;9)$
10	$(4;4)$	$(7;16)$	$(13;8)$
11	$(-4;2)$	$(4;-4)$	$(6;5)$
12	$(-2;1)$	$(6;-5)$	$(8;4)$
13	$(-3;-3)$	$(5;-9)$	$(7;0)$
14	$(2;2)$	$(10;-4)$	$(12;5)$
15	$(4;-1)$	$(12;-7)$	$(14;2)$
16	$(-6;-2)$	$(2;-8)$	$(4;1)$
17	$(1;2)$	$(13;-7)$	$(11;7)$
18	$(-7;-1)$	$(-5;-10)$	$(3;4)$
19	$(-5;0)$	$(7;9)$	$(5;-5)$
20	$(-7;2)$	$(5;11)$	$(3;-3)$

Задание 2. Дано уравнение эллипса (табл. 4). Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Таблица 4. Исходные данные

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$4x^2 + y^2 = 16$	11	$64x^2 + y^2 = 64$
2	$9x^2 + 4y^2 = 36$	12	$9x^2 + 16y^2 = 144$
3	$4x^2 + y^2 = 36$	13	$25x^2 + 16y^2 = 400$
4	$9x^2 + y^2 = 9$	14	$16x^2 + 25y^2 = 400$
5	$x^2 + 9y^2 = 9$	15	$x^2 + 16y^2 = 16$
6	$x^2 + 4y^2 = 16$	16	$16x^2 + 9y^2 = 144$
7	$16x^2 + y^2 = 16$	17	$4x^2 + 3y^2 = 36$
8	$3x^2 + 4y^2 = 36$	18	$25x^2 + 9y^2 = 225$
9	$x^2 + 9y^2 = 36$	19	$9x^2 + 49y^2 = 441$
10	$9x^2 + y^2 = 36$	20	$49x^2 + 9y^2 = 441$

Задание 3. Дано уравнение гиперболы (табл. 5). Построить гиперболу. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот.

Таблица 5. Исходные данные

№ варианта	Уравнение	№ варианта	Уравнение
1	$64x^2 - y^2 = 64$	11	$4x^2 - y^2 = 16$
2	$9x^2 - 16y^2 = 144$	12	$9x^2 + 4y^2 = 36$
3	$25x^2 - 16y^2 = 400$	13	$4x^2 - y^2 = 36$
4	$16x^2 - 25y^2 = 400$	14	$9x^2 - y^2 = 9$
5	$x^2 - 16y^2 = 16$	15	$x^2 - 9y^2 = 9$
6	$16x^2 - 9y^2 = 144$	16	$x^2 - 4y^2 = 16$
7	$4x^2 - 3y^2 = 36$	17	$16x^2 - y^2 = 16$
8	$25x^2 - 9y^2 = 225$	18	$3x^2 - 4y^2 = 36$
9	$9x^2 - 49y^2 = 441$	19	$x^2 - 9y^2 = 36$
10	$49x^2 - 9y^2 = 441$	20	$9x^2 - y^2 = 36$

Задание 4. Дано уравнение параболы (табл. 6). Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

Таблица 6. Исходные данные

№ варианта	Уравнение	№ варианта	Уравнение
1	$y^2 = -10x$	11	$y^2 = -5x$
2	$x^2 = 10y$	12	$x^2 = -5y$
3	$y^2 = 9x$	13	$y^2 = 3x$
4	$x^2 = -9y$	14	$x^2 = 4y$
5	$y^2 = -8x$	15	$y^2 = -3x$
6	$x^2 = 8y$	16	$x^2 = 3y$
7	$y^2 = 7x$	17	$y^2 = 2x$
8	$x^2 = -7y$	18	$x^2 = -2y$
9	$y^2 = -6x$	19	$y^2 = -11x$
10	$x^2 = 6y$	20	$x^2 = 11y$

Задание 5. Даны координаты точек A, B, C, D (табл. 7).

Требуется:

1) написать уравнение плоскости ABC;

2) написать уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

3) написать канонические и параметрические уравнения прямой AB;

4) написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;

5) найти расстояние от точки D до плоскости ABC.

Таблица 7. Исходные данные

Номер варианта	Координаты точек			
	A	*B*	*C*	*D*
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	$(3; -1; 2)$	$(4; -1; -1)$	$(2; 0; 2)$	$(1; 2; 4)$
2	$(2; -1; 2)$	$(3; -1; -1)$	$(1; 0; 2)$	$(0; 2; 4)$
3	$(3; 0; 2)$	$(4; 0; -1)$	$(2; 1; 2)$	$(1; 3; 4)$
4	$(2; -1; 3)$	$(3; -1; 0)$	$(1; 0; 3)$	$(0; 2; 5)$
5	$(3; 1; 2)$	$(4; 1; -1)$	$(2; 2; 2)$	$(1; 4; 4)$

Номер варианта	Координаты точек			
	A	*B*	*C*	*D*
1	*2*	*3*	*4*	*5*
6	$(2;1;2)$	$(3;1;-1)$	$(1;2;2)$	$(0;4;4)$
7	$(1;1;2)$	$(2;1;-1)$	$(0;2;2)$	$(-1;4;4)$
8	$(0;1;2)$	$(1;1;-1)$	$(-1;2;2)$	$(-2;4;4)$
9	$(0;2;2)$	$(1;2;-1)$	$(-1;3;2)$	$(-2;5;4)$
10	$(0;2;1)$	$(1;2;-2)$	$(-1;3;1)$	$(-2;5;3)$
11	$(2;1;0)$	$(5;3;1)$	$(0;1;2)$	$(4;3;1)$
12	$(1;1;0)$	$(2;3;1)$	$(1;-1;2)$	$(3;2;1)$
13	$(1;1;0)$	$(3;4;5)$	$(2;3;1)$	$(4;5;1)$
14	$(2;-1;0)$	$(-1;3;4)$	$(1;1;1)$	$(0;3;5)$
15	$(3;-1;2)$	$(7;9;1)$	$(5;1;2)$	$(1;2;0)$
16	$(2;4;-3)$	$(3;5;-4)$	$(4;5;-1)$	$(3;4;0)$
17	$(1;3;-1)$	$(2;0;7)$	$(-2;0;7)$	$(5;5;2)$
18	$(1;-1;1)$	$(4;1;2)$	$(2;0;1)$	$(5;2;8)$
19	$(1;4;-2)$	$(-2;5;0)$	$(3;4;0)$	$(2;5;-1)$
20	$(2;-1;1)$	$(4;-4;1)$	$(1;0;1)$	$(3;4;6)$

Повышенный уровень

Задание 6.

Доказать оптическое свойство параболы: луч света, исходящий из фокуса параболы, отразившись от нее, идет по прямой, параллельной оси этой параболы.

Задание №7.

Приведите примеры применения методов аналитической геометрии для решения профессиональных задач.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-2;4)$, $B(6;-2)$, $C(8;7)$.

Найти:

1) длину стороны AB;
2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол A;
4) уравнение высоты CD и ее длину;
5) длину медианы AE;
6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;
7) точку пересечения медиан;
8) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно высоте CD.

Решение

1. Расстояние между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ определяем по формуле

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Подставляя в нее координаты точек $A(-2;4)$ и $B(6;-2)$, найдем длину стороны AB:

$$AB=\sqrt{(6-(-2))^2+(-2-4)^2}=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставив в него координаты точек $A(-2;4)$ и $B(6;-2)$, получим уравнение прямой AB:

$$\frac{y-4}{-2-4}=\frac{x-(-2)}{6-(-2)},$$

$$\frac{y-4}{-6}=\frac{x+2}{8},$$

$$8(y-4)=-6(x+2),$$

$$4(y-4)-3(x+2),$$

$$4y-16=-3x-6,$$

$$3x+4y-10=0.$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой AB разрешим уравнение этой прямой относительно y, то есть запишем в виде $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент:

$$3x + 4y - 10 = 0,$$
$$4y = -3x + 10,$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}.$$

Отсюда определяем угловой коэффициент прямой AB: $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Аналогично по двум точкам $A(-2; 4)$ и $C(8; 7)$ составим уравнение прямой AC:

$$\frac{y-4}{7-4} = \frac{x-(-2)}{8-(-2)},$$
$$\frac{y-4}{3} = \frac{x+2}{10},$$
$$10(y-4) = 3(x+2),$$
$$10y - 40 = 3x + 6,$$
$$3x - 10y + 46 = 0.$$

Найдем угловой коэффициент k_{AC} прямой AC:

$$10y = 3x + 46,$$
$$y = \frac{3}{10}x + \frac{23}{5},$$
$$k_{AC} = \frac{3}{10}.$$

3. Угол φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Искомый внутренний угол A образован прямыми AB и AC, угловые коэффициенты которых $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, $k_{AC} = \frac{3}{10}$. Отмечая на рисунке треугольника ABC в системе координат направление угла A против хода часовой стрелки, определяем порядок прямых: AB — первая, AC — вторая. Следовательно $k_1 = k_{AB} = -\frac{3}{4}$, $k_2 = k_{AC} = \frac{3}{10}$.

Подставляем угловые коэффициенты в формулу угла между прямыми:

$$\operatorname{tg} A=\frac{\frac{3}{10}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{10}}=\frac{\frac{6+15}{20}}{1-\frac{9}{40}}=\frac{\frac{21}{20}}{\frac{31}{40}}=\frac{21\cdot 40}{20\cdot 31}=\frac{42}{31}.$$

Тогда $\angle A=\operatorname{arctg}\frac{42}{31}$.

4. Высота CD перпендикулярна стороне AB, поэтому угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, то есть $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;\, y_1)$ в заданном угловым коэффициентом k направлении, имеет вид:

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Для составления уравнения высоты CD подставим в эту формулу координаты точки $C(8;\,7)$ и угловой коэффициент $k_{CD}=\frac{4}{3}$:

$$y-7=\frac{4}{3}(x-8),$$

$$3(y-7)=4(x-8),$$

$$3y-21=4x-32,$$

$$4x-3y-11=0.$$

Найдем длину высоты CD, то есть расстояние от точки C до прямой AB. Расстояние от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $C(8;\,7)$ и коэффициенты из уравнения прямой AB: $3x+4y-10=0$.

Тогда $CD=\frac{|3\cdot 8+4\cdot 7-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{42}{\sqrt{25}}=\frac{42}{5}=8{,}4$.

5. Точка E — середина отрезка BC. Для определения ее координат применим формулы деления отрезка пополам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Подставляем в них координаты точек $B(6;\,-2)$ и $C(8;\,7)$:

$$x_E = \frac{6+8}{2} = 7, \quad y_E = \frac{-2+7}{2} = \frac{5}{2}.$$

То есть $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$.

Найдем длину медианы AE, то есть расстояние между точками $A(-2; 4)$ и $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$:

$$AE = \sqrt{(7-(-2))^2 + \left(\frac{5}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{9^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{81 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{333}{4}} = \frac{3\sqrt{37}}{2}.$$

6. Точка D — точка пересечения прямых AB и CD. Чтобы найти ее координаты, решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 10 = 0, \\ 4x - 3y - 11 = 0. \end{cases}$$

Применим правило Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 4x - 3y = 11, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 4 \cdot 4 = -9 - 16 = -25,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 11 & -3 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-3) - 4 \cdot 11 = -30 - 44 = -74,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - 10 \cdot 4 = 33 - 40 = -7,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{74}{25}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{25}.$$

Итак, $D\left(\frac{74}{25}; \frac{7}{25}\right)$.

Найдем координаты центра окружности, то есть середину отрезка CD, где $C(8; 7)$, $D\left(\frac{74}{25}; \frac{7}{25}\right)$:

$$x = \frac{8 + \frac{74}{25}}{2} = \frac{274}{50} = \frac{137}{25}, \qquad y = \frac{7 + \frac{7}{25}}{2} = \frac{182}{50} = \frac{91}{25}.$$

Итак, $M\left(\frac{137}{25}; \frac{91}{25}\right)$ — центр окружности.

Радиус окружности R равен половине длины отрезка CD:

$$R=\frac{CD}{2}=\frac{42}{10}=\frac{21}{5}.$$

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где $(a;b)$ — координаты центра окружности; R — ее радиус.

Подставив в него координаты точки $M\left(\frac{137}{25};\frac{91}{25}\right)$ и $R=\frac{21}{5}$, получим уравнение окружности, для которой CD является диаметром:

$$\left(x-\frac{137}{25}\right)^2+\left(y-\frac{91}{25}\right)^2=\left(\frac{21}{5}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{137}{25}\right)^2+\left(y-\frac{91}{25}\right)^2=\frac{441}{25}.$$

7. Составим уравнение прямой l, проходящей через точку A, параллельно высоте CD. Из условия параллельности прямых l и CD следует, что их угловые коэффициенты равны, то есть $k_l=k_{CD}=\frac{4}{3}$. Подставляя в формулу $y-y_1=k(x-x_1)$ координаты точки $A(-2;4)$ и $k_l=\frac{4}{3}$, получим уравнение прямой l:

$$y-4=\frac{4}{3}(x-(-2)),$$

$$3y-12=4x+8,$$

$$4x-3y+20=0.$$

При пересечении данных прямых получается треугольник ABC (рис. 1).

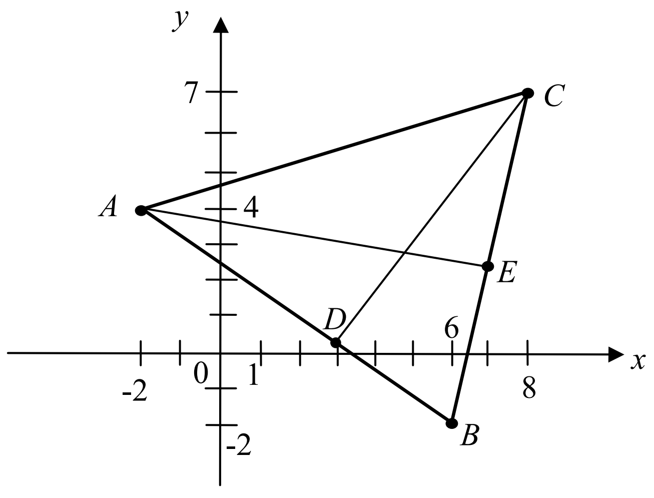

Рис. 1. Треугольник ABC

Задание 2. Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Решение

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1.$$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ — каноническое уравнение эллипса.

Так как $a^2 = 9$, то $a = 3$ — большая полуось, $b^2 = 4$, $b = 2$ — малая полуось.

$A_1(-3;\ 0)$, $A_2(3;\ 0)$, $B_1(0;\ -2)$, $B_2(0;\ 2)$ — вершины эллипса.

Найдем c — расстояние от центра эллипса до каждого фокуса по формуле связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим $c^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$.

Тогда $F_1(-\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(\sqrt{5};\ 0)$ — фокусы эллипса.

Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$, получим $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

По полученным данным можно построить эллипс (рис. 2).

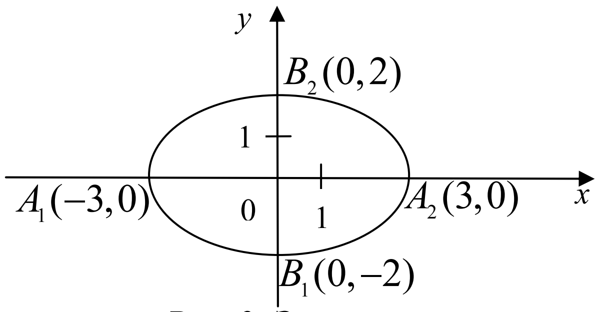

Рис. 2. Эллипс

Задание 3. Дано уравнение гиперболы $2x^2 - y^2 = 24$. Построить гиперболу. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот.

Решение.

Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Для этого обе части уравнения $2x^2-y^2=24$ разделим на 24 и выполним сокращения:

$$\frac{2x^2}{24}-\frac{y^2}{24}=1,$$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Так как $a^2=12$, то $a=2\sqrt{3}$ — действительная полуось, $b^2=24$, $b=2\sqrt{6}$ — мнимая полуось.

$A_1\left(-2\sqrt{3};0\right)$, $A_2\left(2\sqrt{3};0\right)$ — вершины гиперболы.

Найдем c — расстояние от центра гиперболы до каждого фокуса по формуле связи:

$$c^2=a^2+b^2.$$

Получим

$$c^2=12+24=36,\ c=6.$$

Тогда $F_1(-6;0)$, $F_2(6;0)$ — фокусы гиперболы.

Эксцентриситет вычислим по формуле

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Получим

$$\varepsilon=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Подставив $a=2\sqrt{3}$, и $b=2\sqrt{6}$, получим

$$y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}x.$$

После преобразований имеем уравнения асимптот данной гиперболы:

$$y=\pm\sqrt{2}x.$$

Построим гиперболу (рис. 3):

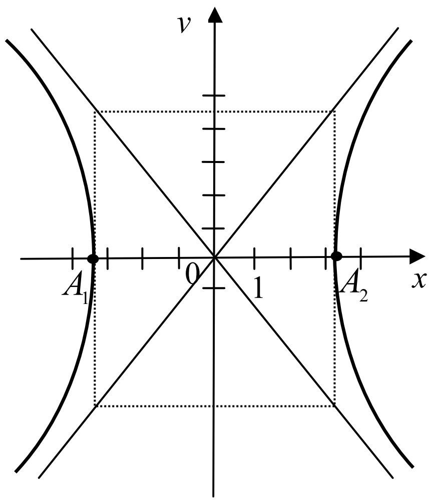

Рис. 3. Гипербола

Задание 4. Дано уравнение параболы $y^2 = 4x$. Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.

Решение

$y^2 = 4x$ — уравнение параболы, с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox, с ветвями, идущими вправо.

$y^2 = 2px$ — общий вид уравнения такой параболы, где p — расстояние между фокусом и директрисой.

Из уравнения находим: $2p = 4$, откуда $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$.

Директрисой параболы $y^2 = 2px$ является прямая, параллельная оси Oy, с уравнением $x = -\frac{p}{2}$, а фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Таким образом, для данной параболы директрисой служит прямая $x = -1$, а точка $F(1; 0)$ — фокусом.

По данным исследования построим параболу (рис. 4).

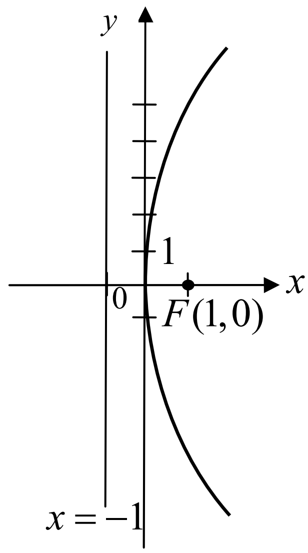

Рис. 4. Парабола

Задание 5. Даны координаты точек $A(4;1;-5)$, $B(-2;3;-4)$, $C(-2;1;3)$, $D(0;-1;2)$.

Требуется:

1) написать уравнение плоскости ABC;

2) написать уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

3) написать канонические и параметрические уравнения прямой AB;

4) написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;

5) найти расстояние от точки D до плоскости ABC.

Решение

1. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим в него координаты точек $A(4;1;-5)$, $B(-2;3;-4)$, $C(-2;1;3)$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+5 \\ -2-4 & 3-1 & -4+5 \\ -2-4 & 1-1 & 3+5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+5 \\ -6 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-4)\cdot 2\cdot 8+(y-1)\cdot 1\cdot(-6)+(z+5)\cdot(-6)\cdot 0-$$
$$-(z+5)\cdot 2\cdot(-6)-(x-4)\cdot 1\cdot 0-(y-1)\cdot(-6)\cdot 8=0,$$

$$16x-64-6y+6+12z+60+48y-48=0,$$

$$16x+42y+12z+46=0,$$

$$8x+21y+6z+23=0.$$

Таким образом, $8x+21y+6z+23=0$ — уравнение плоскости ABC.

2. Для составления уравнения плоскости α, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC, найдем координаты ее нормального вектора, в качестве которого можно взять нормальный вектор плоскости ABC в силу их параллельности.

Если общее уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, то ее нормальный вектор имеет координаты $\overline{n}=(A; B; C)$.

Для плоскости ABC с уравнением $8x+21y+6z+23=0$ нормальным вектором является вектор $\overline{n}=(8; 21; 6)$. Он же служит и нормальным вектором для плоскости α.

Если плоскость проходит через точку $M(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\overline{n}=(A; B; C)$, то ее уравнение имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Подставим в него координаты точки $D(0; -1; 2)$ и нормального вектора $\overline{n}=(8; 21; 6)$:

$$8(x-0)+21(y-(-1))+6(z-2)=0,$$

$$8x+21y+21+6z-12=0,$$

$$8x+21y+6z+9=0.$$

Таким образом, $8x+21y+6z+9=0$ — уравнение плоскости α, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC.

3. Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставив в них координаты точек $A(4;1;-5)$ и $B(-2;3;-4)$, получим канонические уравнения прямой AB:

$$\frac{x-4}{-2-4}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-(-5)}{-4-(-5)},$$

$$\frac{x-4}{-6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{1}.$$

От канонических уравнений прямой AB, введя параметр t, перейдем к ее параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-4}{-6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{1}=t,$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{-6}=t,\\ \dfrac{y-1}{2}=t,\\ \dfrac{z+5}{1}=t;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-6t+4,\\ y=2t+1,\\ z=t-5.\end{cases}$$

4. Составим канонические уравнения прямой l, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC. В качестве направляющего вектора $\overline{s}$ прямой l можно взять нормальный вектор перпендикулярной ей плоскости ABC, то есть $\overline{s}=\overline{n}=(8;21;6)$.

Если прямая проходит через точку $M(x_1;y_1;z_1)$ параллельно направляющему вектору $\overline{s}=(m;n;p)$, то ее канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Подставив в них координаты точки $D(0;-1;2)$ и направляющего вектора $\overline{s}=(8;21;6)$, получим канонические уравнения прямой l, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC:

$$\frac{x-0}{8}=\frac{y-(-1)}{21}=\frac{z-2}{6},$$

$$\frac{x}{8}=\frac{y+1}{21}=\frac{z-2}{6}.$$

5. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ находим по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $D(0; -1; 2)$ и коэффициенты из уравнения плоскости ABC $8x + 21y + 6z + 23 = 0$:

$$d = \frac{|8 \cdot 0 + 21 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 23|}{\sqrt{8^2 + 21^2 + 6^2}} = \frac{14}{\sqrt{541}} = \frac{14\sqrt{541}}{541} \approx 0{,}6.$$

Таким образом, расстояние от точки D до плоскости ABC равно $d = \dfrac{14\sqrt{541}}{541}$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Контрольная работа № 2 «Дифференцирование и интегрирование функций»

Базовый уровень

Задание 1. Найти производные заданных функций (табл. 8).

Таблица 8. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $y = (3x - 4\sqrt[3]{x} + 2)^4$ 2) $y = \dfrac{4x + 7\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+9x^2}}$ 3) $y = \cos 3x \cdot e^{\sin x}$	2	1) $y = (3x - 2\sqrt[3]{x^2} - 1)^2$ 2) $y = \dfrac{\arcsin 3x}{1 - 8x^2}$ 3) $y = 2^{3x}\,\mathrm{tg}2x$
3	1) $y = (x^2 - \dfrac{1}{x^3} + 5\sqrt{x})^4$ 2) $y = \dfrac{\arcsin 7x}{x^4 + e^x}$ 3) $y = e^{tgx}\ln 2x$	4	1) $y = (4x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}} + 4)^3$ 2) $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$ 3) $y = 2^{8x}\,\mathrm{tg}3x$
5	1) $y = (x^5 - \sqrt[3]{x} + 1)^5$ 2) $y = \dfrac{\sqrt{1 - 4x^2}}{2^x + \mathrm{tg}x}$ 3) $y = e^{ctgx} \cdot \sin 4x$	6	1) $y = (6x^2 - \dfrac{2}{x^4} + 5)^2$ 2) $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$ 3) $y = 3^{tgx}\arcsin(x^2)$

1	*2*	*3*	*4*
7	1) $y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3$ 2) $y=\dfrac{\operatorname{arc\,tg}7x}{2-9x^2}$ 3) $y=e^{\mathrm{ctg}x}\cos 6x$	8	1) $y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4$ 2) $y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$ 3) $y=4^{\cos x}\mathrm{arctg}2x$
9	1) $y=(3x^5-\dfrac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\dfrac{\cos 6x}{\sin 3x}$ 3) $y=e^{x^3}\mathrm{tg}7x$	10	1) $y=(x^4+2\sqrt[3]{x}+1)^2$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\mathrm{ctg}x}$ 3) $y=4^{5x}\mathrm{ctg}6x$
11	1) $y=(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\dfrac{5x+7\cos x}{\sqrt{1+4x^2}}$ 3) $y=ctg6x\cdot e^{\cos 2x}$	12	1) $y=(2x-4\sqrt[4]{x^3}-6)^3$ 2) $y=\dfrac{\operatorname{arc}tg4x}{1-7x^3}$ 3) $y=4^{5x}\mathrm{ctg}6x$
13	1) $y=(x^6-\dfrac{1}{x^4}+5\sqrt{x})^5$ 2) $y=\dfrac{\arccos 6x}{x^3+e^{2x}}$ 3) $y=e^{ctgx}\ln 6x$	14	1) $y=(5x^5-\dfrac{7}{\sqrt{x}}+4)^4$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=7^{5x}\mathrm{ctg}2x$
15	1) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=e^{\cos 3x}\cdot\arcsin 4x$	16	1) $y=(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5)^2$ 2) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ 3) $y=3^{tgx}\arcsin(x^2)$
17	1) $y=(3x-3\sqrt[5]{x}+2)^6$ 2) $y=\dfrac{\sin 6x}{\cos\dfrac{x}{3}}$ 3) $y=2^{\sin x}\arcsin 2x$	18	1) $y=(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\mathrm{tg}x}$ 3) $y=4^{\cos x}\mathrm{arctg}2x$
19	1) $y=(3x^5-\dfrac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\mathrm{ctg}x}$ 3) $y=e^{ctgx}\cdot\sin 4x$	20	1) $y=(3x-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+ctg2x}$ 3) $y=4^{5x}\mathrm{ctg}6x$

Задание 2. Найти неопределенные интегралы (табл. 9).

Таблица 9. Исходные данные

№ варианта	Интегралы	№ варианта	Интегралы
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx$ 3) $\int\ln x dx$	2	1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2+x^4}dx$ 3) $\int(8x-2)\sin 5x dx$
3	1) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}$ 3) $\int(2x+1)\sin 3x dx$	4	1) $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$ 3) $\int(x-3)e^{-2x}dx$
5	1) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 3) $\int(x-1)e^{2x}dx$	6	1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ 3) $\int\sqrt{x}\ln 3x dx$
7	1) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ 3) $\int(5x+1)\ln x dx$	8	1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2x^4+5}dx$ 3) $\int x^3\ln x dx$
9	1) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^2}x dx$ 3) $\int x\cos 2x dx$	10	1) $\int\left(4-\frac{1}{x^3}-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ 3) $\int(2x+8)e^{-7x}dx$

1	*2*	*3*	*4*
11	1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2+x^4}dx$ 3) $\int\ln x dx$	12	1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx$ 3) $\int(8x-2)\sin 5x dx$
13	1) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int\left(\ln x\right)^3\frac{dx}{x}$ 3) $\int(x-3)e^{-2x}dx$	14	1) $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$ 3) $\int(2x+1)\sin 3x dx$
15	1) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2x^4+5}dx$ 3) $\int\sqrt{x}\ln 3x dx$	16	1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ 3) $\int x^3\ln x dx$
17	1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ 3) $\int(5x+1)\ln x dx$	18	1) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 3) $\int(x-1)e^{2x}dx$
19	1) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^2}x dx$ 3) $\int(2x+8)e^{-7x}dx$	20	1) $\int\left(4-\frac{1}{x^3}-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ 3) $\int x\cos 2x dx$

Повышенный уровень

Задание 3.

Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $s(t)=4+8t-5t^2$, где высота $s(t)$ измеряется в метрах, а время t – в секундах. Найти: а) скорость тела в начальный момент времени; б) скорость тела в момент соприкосновения с землей; в) наибольшую высоту подъема тела.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Найти производные заданных функций

1) $y=\left(x^4-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^3$;

2) $y=\dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$;

3) $y=e^{ctgx}\arcsin\sqrt{x}$;

Решение

1) $y=\left(x^4-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^3$ — сложная функция.

Применим формулы дифференцирования:

$$\left(u^3\right)'=3u^2u',\ \left(x^n\right)'=nx^{n-1},$$

а также формулы

$$\frac{1}{x^n}=x^{-n},\ \ \sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}.$$

Имеем

$$y'=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)'=.$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-2x^{-3}+x^{\frac{2}{3}}-6\right)'=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+6x^{-4}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+\frac{6}{x^4}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right).$$

2) Для дифференцирования функции $y=\dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$ применим правило производной частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Получим

$$y' = \frac{\left(\cos\frac{x}{4}\right)' x^2 - \cos\frac{x}{4}\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-\sin\frac{x}{4}\left(\frac{1}{4}x\right)' - \cos\frac{x}{4}\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4} - 2x\cos\frac{x}{4}}{x^4}.$$

3) Для дифференцирования функции $y = e^{\operatorname{ctg} x}\arcsin\sqrt{x}$ применим правило производной произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Получим

$$y' = \left(e^{\operatorname{ctg} x}\right)' \arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(\operatorname{ctg} x\right)' \arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right) =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x}\right).$$

Задание 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

2) $\int e^{x^5} x^4 dx$;

3) $\int (4x+1)\sin 3x dx$;

Решение

1) $\int\left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

Применим формулу интегрирования $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=4\int x^{-2}dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{3}}dx+6\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+6\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=-\frac{4}{x}-\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16}+9\sqrt[3]{x^2}+C.$$

2) $\int e^{x^5}x^4dx$.

Применим способ замены переменной:

$$\int e^{x^5}x^4dx=\begin{bmatrix} u=x^5, \\ du=5x^4dx, \\ x^4dx=\frac{1}{5}du \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int e^u du=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{x^5}+C.$$

3) $\int(4x+1)\sin 3xdx$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

$$\int(4x+1)\sin 3xdx=\begin{bmatrix} u=4x+1, & du=4dx \\ dv=\sin 3xdx, & v=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{3}\int\cos 3xdx=-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x+C=$$

$$-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{9}\sin 3x+C.$$

3.2. Индивидуальное домашнее задание №2 «Применение дифференциального и интегрального исчисления»

Базовый уровень

Задание 1. Исследовать данную функцию $y=f(x)$ (табл. 10) методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

8) построить график функции, используя результаты исследования.

Таблица 10. Исходные данные

№ варианта	$y = f(x)$	№ варианта	$y = f(x)$
1	$y = \dfrac{x^2+1}{x}$	2	$y = \dfrac{x^2+9}{x}$
3	$y = \dfrac{x^2}{x-1}$	4	$y = \dfrac{x^2+8}{x+1}$
5	$y = \dfrac{x^2-3}{x+2}$	6	$y = \dfrac{x^2+21}{x-2}$
7	$y = \dfrac{x^2-8}{x-3}$	8	$y = \dfrac{x^2+16}{x+3}$
9	$y = \dfrac{x^2+9}{x+4}$	10	$y = \dfrac{x^2-12}{x-4}$
11	$y = \dfrac{x^2+4}{x}$	12	$y = \dfrac{x^2+25}{x}$
13	$y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$	14	$y = \dfrac{x^2+24}{x+1}$
15	$y = \dfrac{x^2+5}{x+2}$	16	$y = \dfrac{x^2+32}{x-2}$
17	$y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$	18	$y = \dfrac{x^2+27}{x+3}$
19	$y = \dfrac{x^2-15}{x+4}$	20	$y = \dfrac{x^2-7}{x-4}$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (табл. 11). Построить фигуру.

Таблица 11. Исходные данные

Номер варианта	Уравнения линий
1	*2*
1	$y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 1, \quad y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 6$

1	*2*
2	$y=\frac{1}{2}x^2+x+2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$
3	$y=\frac{1}{3}x^2-3x+2,\quad y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$
4	$y=2x^2+6x-3,\quad y=-x^2+x+5$
5	$y=3x^2-5x-1,\quad y=-x^2+2x+1$
6	$y=x^2-3x-1,\quad y=-x^2-2x+5$
7	$y=2x^2-6x+1,\quad y=-x^2+x-1$
8	$y=\frac{1}{3}x^2-2x+4,\quad y=-\frac{2}{3}x^2-x+2$
9	$y=x^2-5x-3,\quad y=-3x^2+2x-1$
10	$y=x^2-2x-5,\quad y=-x^2-x+1$
11	$y=\frac{1}{4}x^2-2x-5,\quad y=-\frac{3}{4}x^2-x+1$
12	$y=\frac{1}{2}x^2+3x-2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$
13	$y=2x^2-6x-2,\quad y=-x^2+x-4$
14	$y=2x^2+3x+1,\quad y=-x^2-2x+9$
15	$y=x^2-2x-4,\quad y=-x^2-x+2$
16	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3$
17	$y=2x^2+4x-7,\quad y=-x^2-x+1$
18	$y=2x^2-6x+3,\quad y=-2x^2+x+5$
19	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-1,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$
20	$y=x^2-3x-4,\quad y=-x^2-x+8$

Повышенный уровень

Задание 3. Приведите примеры применения методов дифференциального исчисления для решения профессиональных задач.

Задание 4. Приведите примеры применения методов интегрального исчисления для решения профессиональных задач.

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Исследовать данную функцию $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность, нечетность;
3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;
4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;
5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;
6) найти асимптоты графика функции, если они имеются;
7) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;
8) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Найдем область определения функции: $D(y)=\left(-\infty;3\right)\cup(3;+\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-6(-x)+13}{-x-3}=\frac{x^2+6x+13}{-x-3};$$

$$y(-x)\neq y(x),\ y(-x)\neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Исследуем функцию на непрерывность: $x=3$ — точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=-\infty,\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=+\infty.$$

Следовательно, $x=3$ — точка разрыва второго рода.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y'=\frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+13)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

Найдем критические точки:

$y'=0$, если $x^2-6x+5=0$, откуда $x_1=1$ и $x_2=5$.

Производная не существует при $x=3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 5).

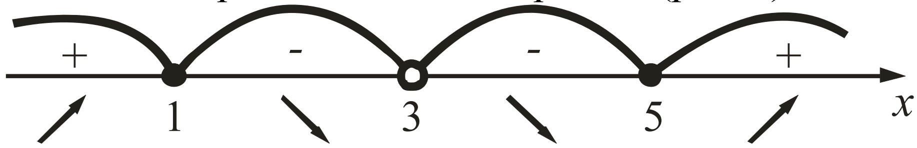

Рис. 5. Исследование на экстремум

Функция возрастает на $(-\infty;1)$ и на $(5;+\infty)$.

Функция убывает на $(1;3)$ и на $(3;5)$.

$x=1$ — точка максимума, $x=5$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max}=y(1)=-4,$$
$$y_{\min}=y(5)=4.$$

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)'=\frac{(x^2-6x+5)'(x-3)^2-(x^2-6x+5)\left((x-3)^2\right)'}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)2(x-3)}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{2(x-3)\left((x-3)^2-x^2+6x-5\right)}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2-6x+9-x^2+6x-5)2(x-3)}{(x-3)^3}=\frac{8}{(x-3)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем вторую производную y'' к нулю и решим уравнение $\frac{8}{(x-3)^3}=0$. Оно не имеет решений.

Вторая производная не существует при $x=3$, но данная точка не является точкой перегиба, так как является точкой разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

На числовую ось нанесем область определения функции. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис.6).

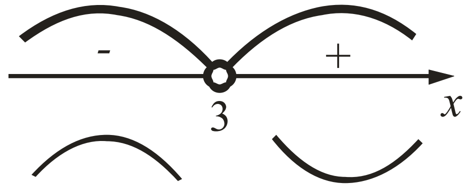

Рис. 6. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на $(-\infty; 3)$ и вогнутый на $(3; +\infty)$.

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как $x=3$ — точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением $x=3$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y=kx+b$. Найдем параметры k и b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x(x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x^2-3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{13}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-6x+13}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13-x^2+3x}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+13}{x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{13}{x}}{1-\frac{3}{x}}=-3.$$

Итак, $y=x-3$ — уравнение наклонной асимптоты.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

При $x=0$ получим $y=\frac{13}{-3}=-4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0; -4\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения с осью Oy.

При $y=0$ получим $\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}=0$, $x^2-6x+13=0$;

$$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot13=36-52=-16<0.$$

Следовательно, точек пресечения с осью Ox нет.

8. По результатам исследования строим график функции (рис. 7).

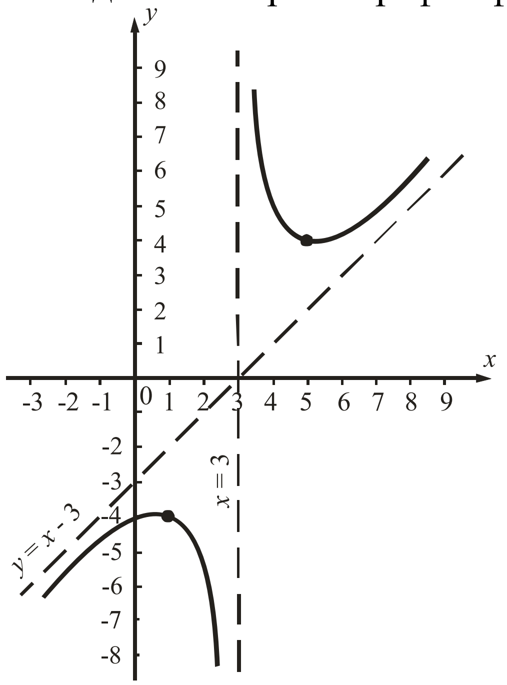

Рис. 7. График функции

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2-x-2$ и $y=-x^2+x-1$. Построить фигуру.

Решение

Построив линии, получим фигуру (рис. 8).

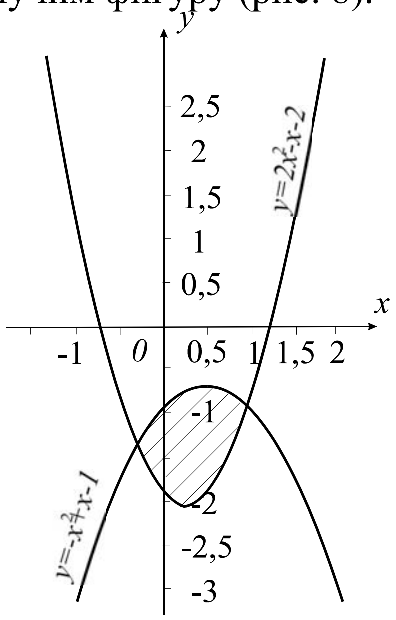

Рис. 8. Фигура

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1, \qquad x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Вычисление площади осуществляем по формуле

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx,$$

где $y = f(x)$, $y = g(x)$ — кривые, ограничивающие фигуру $\left(f(x) \geq g(x) \right)$.

Тогда $S = \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(\left(-x^2 + x - 1 \right) - \left(2x^2 - x - 2 \right) \right) dx = \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-3x^2 + 2x + 1 \right) dx =$

$$= \left(-3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \left(x^3 + x^2 + x \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$= (-1 + 1 + 1) - \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \right) = \frac{34}{27} \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $\frac{34}{27}$ кв. ед.

3.3. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №1 «Основные элементарные функции, их свойства и графики»

Заполните таблицу «Основные элементарные функции» (табл. 12).

Таблица 12. Основные элементарные функции

Обозначение функции	Область определения $D(y)$	Область значений $E(y)$	Четность, нечетность	Моно-тон-ность	Периодич-ность	График функции
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Степенная функция						
$y = x^n$ $n \in N$, n – четное						

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
$y = x^n$ $n \in N$, n – нечетное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n – четное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n – нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n – нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n – четное						
Показательная функция						
$y = a^x$ $0 < a < 1$						
$y = a^x$ $a > 1$						
Логарифмическая функция						
$y = \log_a x$ $0 < a < 1$						
$y = \log_a x$ $a > 1$						
Тригонометрические функции						
$y = \sin x$						
$y = \cos x$						
$y = \mathrm{tg}x$						
$y = \mathrm{ctg}x$						
Обратные тригонометрические функции						
$y = \arcsin x$						
$y = \arccos x$						
$y = \mathrm{arctg}x$						
$y = \mathrm{arcctg}x$						

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основная литература

1. Марусич, А.И. Математика [Текст] : учебник для с.-х. вузов / А.И. Марусич ; Костромская ГСХА. Каф. высшей математики. – Караваево : Костромская ГСХА, 2014. – 218 с.
2. Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Журбенко Л.Н., ред. ; Данилов Ю.М., ред. – М : ИНФРА-М, 2013. – 496 с.
3. Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. – 4-е изд., испр. и доп. – М : Юрайт, 2013. – 607 с.

Дополнительная литература

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. [Текст] . Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – 6-е изд. – М : Айрис-пресс, 2011. – 288 с.

Учебно-методическое издание

Математика : учебно-методическое пособие / сост. Л.Б. Рыбина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2021. — 45 с. ; 20 см. — 50 экз. — Текст непосредственный.

Учебно-методическое пособие издаётся в авторской редакции

Компьютерный набор. Подписано в печать 10/07/2021. Заказ № 611.
Формат 60x84/16. Тираж 50 экз. Усл. печ. л. 2,88. Бумага офсетная.
Отпечатано 10/07/2021. Цена 69,00 руб.

вид издания: первичное (электронная версия)
(редакция от 29.05.2021 № 611)

Отпечатано с готовых оригинал-макетов в академической
типографии на цифровом дубликаторе. Качество соответствует
предоставленным оригиналам.
(Электронная версия издания - I:\подразделения \рио\издания\2021\611.pdf)

2021*611

Цена 69,00 руб.

ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

2021*611

(Электронная версия издания - I:\подразделения \рио\издания\2021\611.pdf)