Практическое занятие

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

На занятии рассматриваются вопросы:

1. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.
2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

1. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Примеры решения задач:

Пример № 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(y-1)dx+\frac{1}{3x^2+e^x}dy=0.$$

Решение.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Преобразуем его:

$$(y-1)dx=-\frac{1}{3x^2+e^x}dy.$$

Умножим обе части уравнения на $3x^2+e^x$ и разделим на $y-1$:

$$\frac{(y-1)(3x^2+e^x)}{y-1}dx=-\frac{3x^2+e^x}{(3x^2+e^x)(y-1)}dy,$$

Сократим дроби:

$$(3x^2+e^x)dx=-\frac{1}{y-1}dy.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Интегрируем его обе части:

$$\int(3x^2+e^x)dx=\int\left(-\frac{1}{y-1}\right)dy;$$

$$x^3+e^x=-\ln|y-1|+C;$$

$$\ln|y-1|=-x^3-e^x+C.$$

Получили общий интеграл данного уравнения.

Выразим y:

$$y-1=e^{-x^3-e^x+C};$$

$y=e^{-x^3-e^x+C}+1$ — общее решение данного дифференциального уравнения.

Ответ: $y=e^{-x^3-e^x+C}+1$.

Пример № 2.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y'=ctg(y+1)$.

Решение.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Так как $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то данное уравнение примет вид:

$$\frac{dy}{dx}=ctg(y+1).$$

Умножим обе части на dx:

$$dy=ctg(y+1)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $ctg(y+1)$:

$$\frac{dy}{ctg(y+1)}=dx.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{dy}{ctg(y+1)}=\int dx.$$

Отдельно найдем интеграл, стоящий в левой части уравнения:

$$\int\frac{dy}{ctg(y+1)}=\int\frac{dy}{\frac{\cos(y+1)}{\sin(y+1)}}=\int\frac{\sin(y+1)}{\cos(y+1)}dy=\left|\begin{array}{l}\text{замена}:\\ t=\cos(y+1)\\ dt=-\sin(y+1)dy\\ \sin(y+1)dy=-dt\end{array}\right|=$$

$$=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C_1=-\ln|\cos(y+1)|+C_1.$$

Тогда получим:

$$-\ln|\cos(y+1)|=x+C_2.$$

$$\ln|\cos(y+1)|=-x+C\ -$$

общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Выразим y:

$$\cos(y+1)=e^{-x+C};$$

$$y+1=\arccos\left(e^{-x+C}\right);$$

$$y = \arccos\left(e^{-x+C}\right) - 1 -$$

общее решение данного дифференциального уравнения.

Ответ: $y = \arccos\left(e^{-x+C}\right) - 1$.

Тренажеры:

№ 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

а) $\frac{e^x}{e^y}dx - dy = 0$;

б) $y^2dx + (3x-1)dy = 0$;

в) $3x^2ydx + 2\sqrt{4-x^3}dy = 0$;

г) $e^{x+y}dx + ydy = 0$;

д) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

е) $xy' + 2y = 2xyy'$

ж) $y'e^{-x} = x - 1$

з) $x \cdot \cos^2 ydx + (x^2+1)dy = 0$

и) $\frac{x}{y}dx + \frac{e^{-y^2}}{x^2-4}dy = 0$

к) $y^2 + xy' = y'$

№2. Найти частное решение дифференциальных уравнений:

а) $(1+e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1$;

б) $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx,\ y(1) = 2$.

2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Примеры решения задач:

Пример №3.

15. Найти закон движения тела по оси Ox, если оно начало двигаться из точки M (4; 0) со скоростью $v = 2t + 3t^2$.

○ При прямолинейном движении скорость есть производная от пути по времени. Обозначив путь через x, имеем $v = \frac{dx}{dt}$; тогда

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3t^2, \quad \text{или} \quad dx = (2t + 3t^2)\,dt.$$

Проинтегрировав, получим $x = t^2 + t^3 + C$. Используя начальные условия, найдем C. Так как $x = 4$ прн $t = 0$, то, подставив эти значения в общее решение, находим $C = 4$. Итак, закон движения тела имеет вид $x = t^2 + t^3 + 4$. ●

Тренажеры:

№ 4. Найти кривую, проходящую через точку (1;–1), если известно, что произведение абсциссы любой точки кривой на угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке равно утроенной сумме координат этой точки.

№ 5. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0;3), если угловой коэффициент касательной, проведенной в любой ее точке, меньше ординаты точки касания на 2.