Лекция

Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях
2. Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка. Теорема Коши.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и производные искомой функции y', y'', y''', …, $y^{(n)}$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 .$$

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной.

Например, $yy' + x = 0$ — дифференциальное уравнение первого порядка; $y'' - 6y' + 8y = 0$ — дифференциальное уравнение второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, функция $y = e^x$ есть решение уравнения $y' - y = 0$, т.к. при подстановке ее в уравнение получаем тождество $e^x - e^x = 0$.

2. Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка. Теорема Коши

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Если это уравнение разрешить относительно производной y', то получим

$$y' = f(x, y),$$

дифференциальное уравнение первого порядка, ***разрешенное относительно производной.***

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в ***дифференциальной форме***

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 .$$

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесчисленное множество решений.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такое его решение $y=\varphi(x,C)$, которое является функцией переменной x и произвольной постоянной C.

Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка найдено в неявном виде $\Phi(x,y,C)=0$, то такое решение называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение $y=\varphi(x,C_0)$, полученное из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

Если частное решение дифференциального уравнения первого порядка найдено в неявном виде $\Phi(x,y,C_0)=0$, то такое решение называется ***частным интегралом*** дифференциального уравнения.

График любого частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***. Общему решению $y=\varphi(x,C)$ соответствует ***семейство интегральных кривых***.

На практике искомое частное решение дифференциального уравнения первого порядка получают из общего решения исходя из ***начальных условий***

$$y(x_0)=y_0.$$

Найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0)=y_0$, геометрически означает выделение из семейства интегральных кривых, которое соответствует общему решению $y=\varphi(x,C)$, единственной кривой, проходящей через точку (x_0,y_0).

Задача отыскания частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши***.

Теорема1 (Коши) (о существовании и единственности решения):

Если в уравнении $y'=f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (x_0,y_0), то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Точки, в которых условия теоремы существования и единственности нарушаются, называются ***особыми точками***.

3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением ***с разделяющимися переменными***, если оно может быть представлено в виде

$$y'=f(x)g(y)$$

или

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Рассмотрим способ решения уравнения $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$.

Его особенность состоит в том, что при дифференциалах dx и dy стоят произведения функций, по отдельности зависящих от *x*, от *y*.

Разделим обе части уравнения на произведение $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$, получим

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0.$$

Интегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0.$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Пример:

Решить уравнение $x(1-y^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на произведение $(1-y^2)(1-x^2)$, получим

$$\frac{x}{1-x^2}dx + \frac{y}{1-y^2}dy = 0.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{x}{1-x^2}dx + \int \frac{y}{1-y^2}dy = 0.$$

Получим:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right| = C.$$

Преобразуя, получим общий интеграл:

$$(1-x^2)(1-y^2) = C.$$

Рассмотрим способ решения уравнения $y' = f(x)g(y)$.

Его особенность состоит в том, что в правой части стоит произведение функций, по отдельности зависящих от *x*, от *y*.

Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy = f(x)g(y)dx.$$

Разделим на $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx .$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Пример:

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = tgx(y+1)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = 0$.

Решение.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение (общий интеграл). Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = tgx(y+1).$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy = tgx(y+1)dx .$$

Разделим обе части уравнения на $(y+1)$:

$$\frac{dy}{y+1} = tgxdx .$$

Интегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int tgxdx .$$

Получим:

$\ln|y+1| = -\ln|\cos x| + C$ — общий интеграл.

Подставим в общий интеграл начальные условия $x = \pi$, $y = 0$ и найдем соответствующее им значение C:

$$\ln 1 = -\ln|\cos \pi| + C ,$$

$$C = 0 .$$

Подставим найденное значение $C = 0$ в общий интеграл и получим частный интеграл, удовлетворяющий заданным начальным условиям:

$$\ln|y+1| = -\ln|\cos x| .$$

Преобразуем:

$$y + 1 = \frac{1}{\cos x} .$$

Тогда $y = \frac{1}{\cos x} - 1$ — частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.