Определители, их свойства.

О: Квадратной матрицей n-го порядка называется таблица чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Числа (a_{ij}), $i,j=\overline{1,n}$ — элементы матрицы; i — номер строки; j — номер столбца.

Определителем (детерминантом) II порядка, соответствующим квадратной матрице II порядка, называется число, обозначаемое символом

$$\Delta \equiv \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по правилу $\Delta = a_{11}\,a_{22}-a_{21}\,a_{12}$.

Определителем III порядка, соответствующим квадратной матрице III порядка, называется число, вычисляемое по правилу

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.1)$$

Примеры:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-(-1)\cdot 3=13.$

2) $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2+0) + 2(4-6) + 1(0-2) = -12.$$

О: Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Например, для определителя III порядка (1.1)

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = -M_{21}.$$

Свойства определителей следуют из определения (1.1).

1^0. Транспонирование: определитель не изменится, если все его строки заменить на соответствующие столбцы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2^0. Разложение определителя по любому ряду (строке или столбцу):

определитель равен сумме произведения элементов любого ряда на их алгебраические дополнения. Например, для определителя (1.1) разложение по второму столбцу:

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}.$$

3^0. Перестановка двух строк (столбцов) определителя равносильна умножению его на (–1).

4^0. Определитель $\Delta = 0$, если:

1) все элементы какого-нибудь ряда равны нулю;

2) соответствующие элементы двух строк (столбцов) пропорциональны (в частности, равны).

5^0. Общий множитель всех элементов ряда можно вынести за знак определителя.

6^0. Определитель не изменится, если к элементам одной его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Аналогично определению определителя III порядка вводится определение определителя n-го порядка, соответствующего квадратной матрице n-го порядка.

Например, определителем IV порядка называется число, вычисляемое по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Свойства 1^0–6^0 сохраняются для определителей любого порядка. При вычислении определителей IV и выше порядков удобно, используя свойство 6^0, преобразовать его так, чтобы все элементы (кроме одного) какого-нибудь ряда были нулями, затем разложить его по этому ряду.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 & 5 \\ -1 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 13 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 23 & 8 & -9 \\ 0 & 27 & 14 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 13 & 1 \\ 23 & 8 & -9 \\ 27 & 14 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 14 & 13 & 1 \\ 9 & -5 & -10 \\ 13 & 1 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 13 & 1 \\ -1 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 15 & 1 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} + (-13) \begin{vmatrix} 15 & 13 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 1(-150 + 1) - 13(-75 + 13) = 149 + 806 = 955.$$

Здесь вторую строку последовательно умножаем на 2, 3, 5 и складываем соответственно с 1-й, 3-й, 4-й строками.

Матрицы, действия над ними.

Матрицей размерности mxn (m на n) называется таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Матрица (1.3) кратко записывается в виде $A = (a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, и называется прямоугольной матрицей размерности $m \times n$. Две матрицы $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ одинаковой размерности $m \times n$ называются равными, если $a_{ij}=b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Сложение матриц. Суммой матриц $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица $C = (a_{ij} + b_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам: $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Матрица, все элементы которой нули, называется нуль-матрицей, обозначается 0; $A + 0 = A$.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число μ называется матрица $B=\mu A=(\mu a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Умножение матриц. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размерности $m \times p$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размерности $p \times n$ (число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B) называется матрица $C=(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ip}b_{pj})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Произведение матриц в общем случае не подчиняется переместительному закону: $AB \neq BA$.

Сочетательный и распределительный законы справедливы:

$$A(BC) = (AB)C, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Примеры:

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $3A+B=?$

◄ $3A+B=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 15 & 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 15 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ ►

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB=?$

$$◄\ AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+(-1)\cdot 2 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 0 \\ 3\cdot 3+0\cdot 2 & 3\cdot(-1)+0\cdot 0 \\ 4\cdot 3+1\cdot 2 & 4\cdot(-1)+1\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 9 & -3 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}\ ►$$

Обратная матрица.

Для квадратных матриц одинакового порядка умножение всегда возможно. Особое значение при таком умножении имеет единичная матрица E, у которой по главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы — нули:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что определитель единичной матрицы $\det E = 1$. Легко проверяется, что $AE = EA = A$.

Если матрица $C = AB$ для квадратных матриц A и B, то $\det C = \det A \cdot \det B$. Для квадратной матрицы вводится понятие обратной матрицы.

О: Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A, если

$$AA^{-1} = E. \tag{1.4}$$

Если выполняется равенство (1.4), то справедливо

$$A^{-1}A = E.$$

Т: Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $\det A = \Delta \neq 0$ ■

Для вычисления обратной матрицы используют следующую формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, — алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

◄ Определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

поэтому обратная матрица существует и

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$ ►