Лекция
Определители

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Определители 2-го и 3-го порядков.
2. Понятие об определителе n-го порядка.
3. Основные свойства определителей.
4. Миноры и алгебраические дополнения.
5. Вычисление определителей третьего порядка разложением по строке (столбцу).

ений.

1. Определители 2-го и 3-го порядков.

Определителем 2-го порядка называется выражение, обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

где a_{ij} — элемент определителя, i — номер строки, j — номер столбца.

Определитель обозначается греческой буквой Δ (дельта).

Элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ определителя, a_{12}, a_{21} — побочную. Схема вычисления определителя 2-го порядка представлена на рис. 1. Элементы изображены точками.

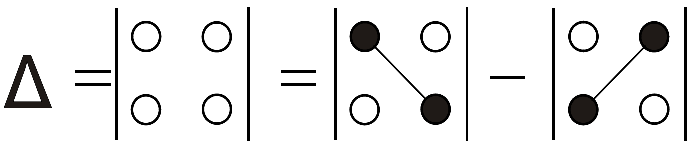

Рис. 1. Схема вычисления определителя 2-го порядка

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 4 = 18 + 8 = 26.$$

Определителем 3-го порядка называется выражение, обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Данный способ вычисления определителя третьего порядка называется правилом треугольников.

Схема вычисления определителя 3-го порядка по правилу треугольников представлена на рис. 2.

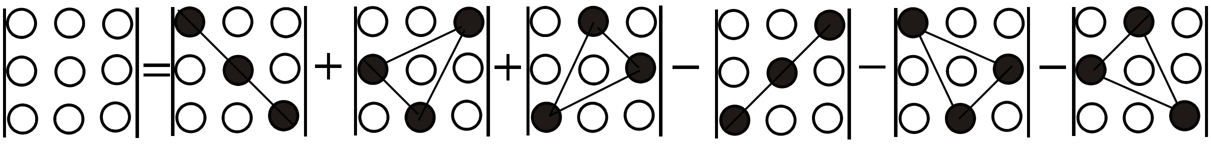

Рис. 2 Схема вычисления определителя 3-го порядка

Пример 2. Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 7 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix}$, используя правило треугольников.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 7 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot(-4) + 7\cdot(-3)\cdot 6 + (-2)\cdot(-8)\cdot 5 -$$
$$-6\cdot 4\cdot 5 - (-3)\cdot(-8)\cdot 3 - 7\cdot(-2)\cdot(-4) =$$
$$-48 - 126 + 80 - 120 - 72 - 56 = -342.$$

2. Понятие об определителе n-го порядка.

Определитель, в котором n строк и n столбцов называют определителем n-го порядка. Оределители n-го порядка вычисляют путем разложения по элементам какой-либо строки (столбца).

3. Основные свойства определителей:

1. Определитель не изменяется при замене строк соответствующими столбцами.

2. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то изменится знак определителя.

3. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя.

4. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

5. Определитель равен нулю в следующих случаях:
а) все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю;
б) определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца);
в) элементы каких-либо двух строк (столбцов) пропорциональны.

4. Миноры и алгебраические дополнения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из данного вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.

Пример 3. Дан определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. Найдите M_{12} и M_{22}.

Решение.

Чтобы найти M_{12} вычеркнем 1-ю строку и 2-й столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - (-3) \cdot 1 = -7.$$

M_{22} найдем, вычеркивая 2-ю строку и 2-й столбец:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 21.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется минор этого элемента M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример 4. Дан определитель $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 1 & -5 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. Найдите A_{13}.

Решение.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 7 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (-5) \cdot 6 + 5 \cdot 7 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) \cdot 6 - 6 \cdot (-5) \cdot 5 - 5 \cdot 1 \cdot 6 - 7 \cdot (-2) \cdot 0 =$$

$$=175-12+150-30=283.$$

5. Вычисление определителей третьего порядка разложением по строке (столбцу).

Теорема Лапласа. Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие этим элементам алгебраические дополнения.

Раскладывать определители лучше по той строке (столбцу), в которой (котором) больше нулей. При этом нули можно получить искусственно с помощью свойств определителей.

Пример 5. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель путём разложения его по элементам третьей строки, так как она содержит наибольшее количество нулей

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2-3) = 5.$$