# Лекция

## Механические приложения определенного интеграла

***На лекции рассматриваются вопросы:***

1. Работа переменной силы.
2. Путь, пройденный телом.
3. Давление жидкости на вертикальную пластинку.
4. Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой.
5. Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры.

*(Используем учебный материал учебника: Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. [Текст] . Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 6-е изд. - Москва : Айрис-Пресс, 2006, 2008, 2009, 2011. – 288 с. : ил. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-8112-3250-5. – Текст : непосредственный.)*

## Механические приложения определенного интеграла

### Работа переменной силы

Пусть материальная точка $M$ перемещается вдоль оси $Ox$ под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки $M$ из положения $x = a$ в положение $x = b$ $(a < b)$, находится по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\,dx$$

***Пример*** Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению $x$, т. е. $F = kx$, где $k$ — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м; следовательно, $100 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int\limits_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12,5 \text{ (Дж)}. \quad \bullet$$

***Пример*** Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать через край жидкость из вертикального цилиндрического резервуара высоты $H$ м и радиусом основания $R$ м.

Решение: Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом $p$ на высоту $h$, равна $p \cdot h$. Но различные слои жидкости в резервуаре находятся на различных глубинах и высота поднятия (до края резервуара) различных слоев не одинакова.

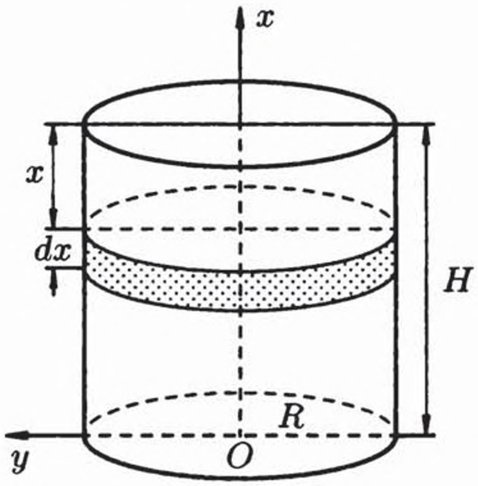


Рис. 2

Для решения поставленной задачи применим схему II (метод дифференциала). Введем систему координат так, как указано на рисунке 2.

1. Работа, затрачиваемая на выкачивание из резервуара слоя жидкости толщиной $x$ ($0 \leqslant x \leqslant H$), есть функция от $x$, т. е. $A = A(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant H$ ($A(0) = 0$, $A(H) = A_0$).

2. Находим главную часть приращения $\Delta A$ при изменении $x$ на величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал $dA$ функции $A(x)$.

Ввиду *малости $dx$ считаем, что «элементарный» слой жидкости находится на одной глубине $x$* (от края резервуара) (см. рис. 192). Тогда $dA = dp \cdot x$, где $dp$ — вес этого слоя; он равен $g \cdot \gamma\, dv$, где $g$ — ускорение свободного падения, $\gamma$ — плотность жидкости, $dv$ — объем «элементарного» слоя жидкости (на рисунке он выделен), т. е. $dp = g\gamma\, dv$. Объем указанного слоя жидкости, очевидно, равен $\pi R^2\, dx$, где $dx$ — высота цилиндра (слоя), $\pi R^2$ — площадь его основания, т. е. $dv = \pi R^2\, dx$.

Таким образом, $dp = g\gamma \cdot \pi R^2\, dx$ и $dA = g\gamma\pi R^2\, dx \cdot x$.

3) Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = 0$ до $x = H$, находим

$$A_0 = \int\limits_0^H g\gamma\pi R^2 x\,dx = \frac{1}{2} g\gamma\pi R^2 H^2 \quad \text{(Дж)}. \quad \bullet$$

## Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Найдем путь $S$, пройденный ею за промежуток времени от $t_1$ до $t_2$.

◔ Решение: Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е. $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что $dS = v(t)\,dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от $t_1$ до $t_2$, получаем $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$. ●

*Отметим*, что эту же формулу можно получить, пользуясь схемой I или II применения определенного интеграла.

***Пример*** . Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

◔ Решение: Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ($t = 0$) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int\limits_0^4 (10t+2)\,dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (\text{м}).$$ ●

### Давление жидкости на вертикальную пластинку

По закону Паскаля давление жидкости на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости, имеющего основанием пластинку, а высотой — глубину ее погружения от свободной поверхности жидкости, т. е. $P = g \cdot \gamma \cdot S \cdot h$, где $g$ — ускорение свободного падения, $\gamma$ — плотность жидкости, $S$ — площадь пластинки, $h$ — глубина ее погружения.

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$; система координат выбрана так, как указано на рисунке 3. Для нахождения давления $P$ жидкости на эту пластину применим схему II (метод дифференциала).

1. Пусть часть искомой величины $P$ есть функция от $x$: $p = p(x)$, т. е. $p = p(x)$ — давление на часть пластины, соответствующее отрезку $[a; x]$ значений переменной $x$, где $x \in [a; b]$ ($p(a) = 0$, $p(b) = P$).

2. Дадим аргументу $x$ приращение $\Delta x = dx$. Функция $p(x)$ получит приращение $\Delta p$ (на рисунке — полоска-слой толщины $dx$). Найдем дифференциал $dp$ этой функции. Ввиду малости $dx$ будем приближенно считать полоску прямоугольником, *все точки которого находятся на одной глубине $x$, т. е. пластинка эта — горизонтальная.*

Тогда по закону Паскаля $dp = g \cdot \gamma \underbrace{(y_2 - y_1) \cdot dx}_{S} \cdot \underbrace{x}_{h}$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получим

$$P = g \cdot \gamma \int_a^b (y_2 - y_1) x\, dx \quad \text{или} \quad P = g\gamma \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x\, dx.$$

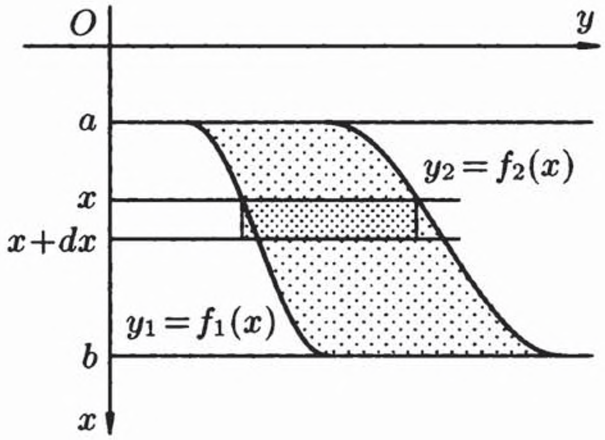


Рис. 3

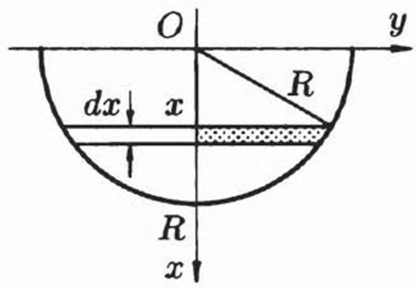


Рис. 4

***Пример*** Определить величину давления воды на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус $R$, а центр $O$ находится на свободной поверхности воды (см. рис. 4).

Решение: Воспользуемся полученной формулой для нахождения давления жидкости на вертикальную пластинку. В данном случае пластинка ограничена линиями $y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x = 0$, $x = R$. Поэтому

$$P = g\gamma \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)\right) x\, dx =$$

$$= 2g\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x\, dx = 2g\gamma \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2}\, d(R^2 - x^2) =$$

$$= -g\gamma \cdot \frac{2\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}{3}\Bigg|_0^R = -\frac{2}{3} g\gamma (0 - R^3) = \frac{2}{3} g\gamma R^3. \quad \bullet$$

## Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой

Пусть на плоскости $Oxy$ задана система материальных точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2), \ldots$, $M_n(x_n; y_n)$ соответственно с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

*Статическим моментом* $S_x$ системы материальных точек относительно оси $Ox$ называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (т. е. на расстояния этих точек от оси $Ox$): $S_x = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i$.

Аналогично определяется *статический момент* $S_y$ этой системы относительно оси $Oy$: $S_y = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i$.

Если массы распределены непрерывным образом вдоль некоторой кривой, то для выражения статического момента понадобится интегрирование.

Пусть $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ — это уравнение материальной кривой $AB$. Будем считать ее однородной с постоянной линейной плотностью $\gamma$ $(\gamma = \text{const})$.

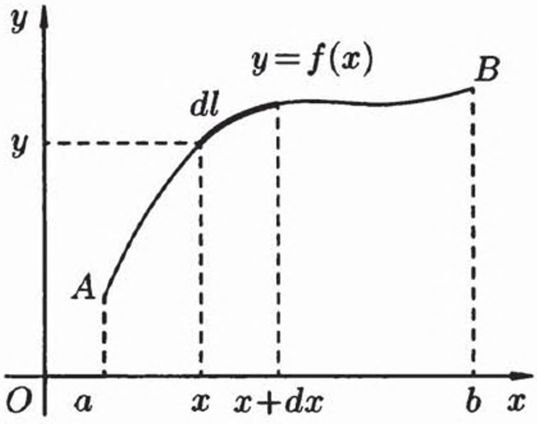

Рис. 5

Для произвольного $x \in [a;b]$ на кривой $AB$ найдется точка с координатами $(x;y)$. Выделим на кривой элементарный участок длины $dl$, содержащий точку $(x;y)$. Тогда масса этого участка равна $\gamma\, dl$. Примем этот участок $dl$ *приближенно за точку*, отстоящую от оси $Ox$ на расстоянии $y$. Тогда дифференциал статического момента $dS_x$ («элементарный момент») будет равен $\gamma\, dl \cdot y$, т. е. $dS_x = \gamma\, dl \cdot y$ (см. рис. 5).

Отсюда следует, что статический момент $S_x$ кривой $AB$ относительно оси $Ox$ равен

$$S_x = \gamma \int\limits_a^b y\, dl = \gamma \int\limits_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Аналогично находим $S_y$:

$$S_y = \gamma \int\limits_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Статические моменты $S_x$ и $S_y$ кривой позволяют легко установить положение ее центра тяжести (центра масс).

*Центром тяжести* материальной плоской кривой $y = f(x)$, $x \in$ $\in [a;b]$ называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: если в этой точке сосредоточить всю массу $m$ заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси. Обозначим через $C(x_c; y_c)$ центр тяжести кривой $AB$.

Из определения центра тяжести следуют равенства $m \cdot x_c = S_y$ и $m \cdot y_c = S_x$ или $\gamma l \cdot x_c = S_y$ и $\gamma l \cdot y_c = S_x$. Отсюда $x_c = \dfrac{S_y}{\gamma l}$, $y_c = \dfrac{S_x}{\gamma l}$ или

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\,dl}{l} = \frac{\int\limits_a^b x\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}; \quad y_c = \frac{\int\limits_a^b y\,dl}{l} = \frac{\int\limits_a^b y\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}.$$

***Пример*** Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первой координатной четверти (см. рис. 6).

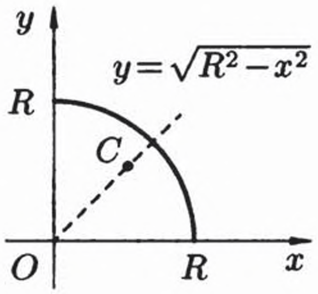


Рис. 6

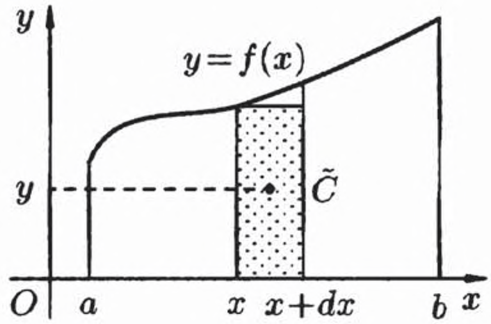


Рис. 7

Решение: Очевидно, длина указанной дуги окружности равна $\frac{\pi R}{2}$, т. е. $l=\frac{\pi R}{2}$. Найдем статический момент ее относительно оси $Ox$. Так как уравнение дуги есть $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и $y'_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то ($\gamma=\text{const}$)

$$S_x = \gamma\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \gamma\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = \gamma R\int\limits_0^R dx = \gamma Rx\Big|_0^R = \gamma R^2.$$

Стало быть,

$$y_c = \frac{S_x}{\gamma l} = \frac{\gamma R^2}{\gamma\cdot\frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

Так как данная дуга симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то $x_c=y_c=\frac{2R}{\pi}$. Итак, центр тяжести имеет координаты $\left(\frac{2R}{\pi};\frac{2R}{\pi}\right)$. ●

## Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y=f(x)\geqslant 0$ и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ (см. рис. 7).

Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна ($\gamma = \text{const}$). Тогда масса всей пластинки равна $\gamma \cdot S$, т. е. $m = \gamma \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Выделим элементарный участок пластинки в виде бесконечно узкой вертикальной полосы и будем приближенно считать его прямоугольником.

Тогда масса его равна $\gamma \cdot y\,dx$. Центр тяжести $\tilde{C}$ прямоугольника лежит на пересечении диагоналей прямоугольника. Эта точка $\tilde{C}$ отстоит от оси $Ox$ на $\frac{1}{2}y$, а от оси $Oy$ на $x$ (приближенно; точнее на расстоянии $x + \frac{1}{2}\Delta x$). Тогда для элементарных статических моментов относительно осей $Ox$ и $Oy$ выполнены соотношения

$$dS_x = \gamma \cdot y\,dx \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\gamma \cdot y^2\,dx \quad \text{и} \quad dS_y = \gamma \cdot y\,dx \cdot x = \gamma xy\,dx.$$

Следовательно, $S_x = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_a^b y^2\,dx$, $S_y = \gamma \int\limits_a^b xy\,dx$.

По аналогии с плоской кривой получаем, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через $C(x_c; y_c)$, что $m \cdot x_c = S_y$, $m \cdot y_c = S_x$. Отсюда

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{S_y}{\gamma S} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{S_x}{\gamma S}$$

или

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}.$$

***Пример*** Найдем координаты центра тяжести полукруга $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$ ($\gamma = \text{const}$) (см. рис. 8).

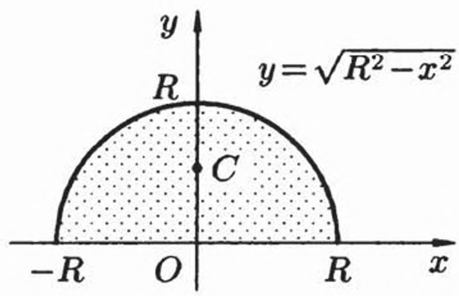

Рис. 8

◐ Решение: Очевидно (ввиду симметрии фигуры относительно оси $Oy$), что $x_c = 0$. Площадь полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Находим $S_x$:

$$S_x = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \frac{1}{2}\gamma(R^3 + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3}) = \gamma \cdot \frac{2}{3}R^3.$$