ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Применение определенного интеграла

Выполните задания, сделав самопроверку, используя решения.

Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1. $x+2y-4=0$, $y=0$, $x=-3$ и $x=2$.

○ Выполним построение фигуры. Строим прямую $x+2y-4=0$ по двум точкам $A(4;\ 0)$ и $B(0;\ 2)$ (рис. 73). Выразив y через x, получим $y=-0{,}5x+2$. По формуле (13.1), где $f(x)=-0{,}5x+2$, $a=-3$, $b=2$, находим

$$S=\int_{-3}^{2}(-0{,}5x+2)\,dx=\left[-0{,}25x^2+2x\right]_{-3}^{2}=11{,}25 \text{ (кв. ед.)}$$

В качестве проверки вычислим площадь трапеции M_1MNN_1 обычным путем. Находим: $M_1M=f(-3)=-0{,}5(-3)+2=3{,}5$, $N_1N=f(2)=-0{,}5\cdot2+2=1$, $M_1N_1=5$. Следовательно, $S=0{,}5(3{,}5+1)\cdot5=11{,}25$ (кв. ед.). ●

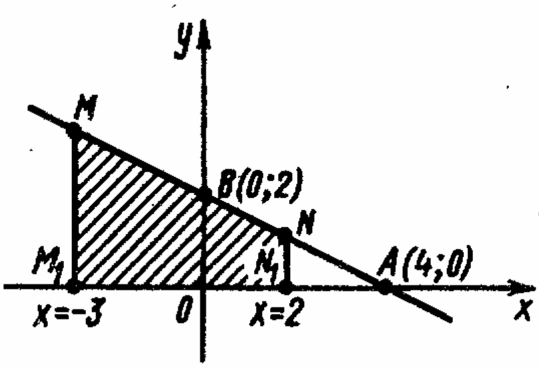

Рис. 73

2. $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$ и $y=0$.

○ Выполним построение фигуры (рис. 74). Построим прямую $x-2y+$ $+4=0$: $y=0$, $x=-4$, $A(-4;0)$; $x=0$, $y=2$, $B(0;2)$. Построим прямую $x+y-5=0$: $y=0$, $x=5$, $C(5;0)$; $x=0$, $y=5$, $D(0;5)$.

Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ x+y-5=0, \; x=2, \; y=3, \; M(2;3). \end{cases}$$

Для вычисления искомой площади разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC, так как при изменении x от A до N площадь ограничена прямой $x-2y+4=0$, а при изменении x от N до C — прямой $x+y-5=0$.

Для треугольника AMN имеем: $x-2y+4=0$; $y=0{,}5x+2$, т. е. $f(x)=$ $=0{,}5x+2$, $a=-4$ и $b=2$. Для треугольника NMC имеем: $x+y-5=0$, $y=-x+5$, т. е. $f(x)=-x+5$, $a=2$ и $b=5$.

Вычислив площадь каждого из треугольников и сложив результаты, находим:

$$S_{\Delta AMN}=\int_{-4}^{2}(0{,}5x+2)\,dx=\left[0{,}25x^2+2x\right]_{-4}^{2}=9 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S_{\Delta NMC}=\int_{2}^{5}(-x+5)\,dx=\left[-0{,}5x^2+5x\right]_{2}^{5}=4{,}5 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S=S_{\Delta AMN}+S_{\Delta NMC}=9+4{,}5=13{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Проверка: $S_{\Delta AMC}=0{,}5AC\cdot NM=0{,}5\cdot 9\cdot 3=13{,}5$ (кв. ед.). ●

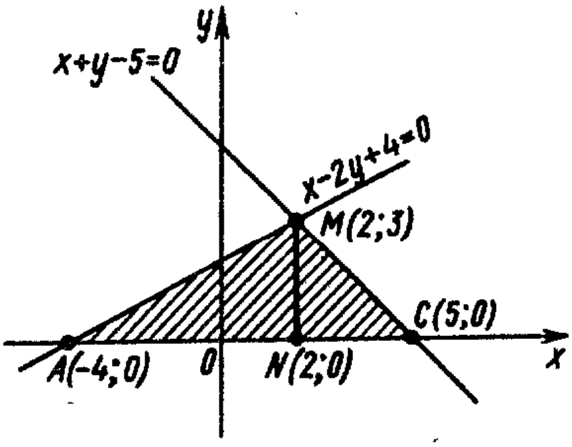

Рис. 74

3. $y=x^2$, $y=0$, $x=2$ и $x=3$.

○ В данном случае требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=x^2$, прямыми $x=2$ и $x=3$ и осью Ox (рис. 75). По формуле (13.1) находим

$$S=\int_2^3 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3=6\frac{1}{3}\text{(кв. ед.)}. \quad ●$$

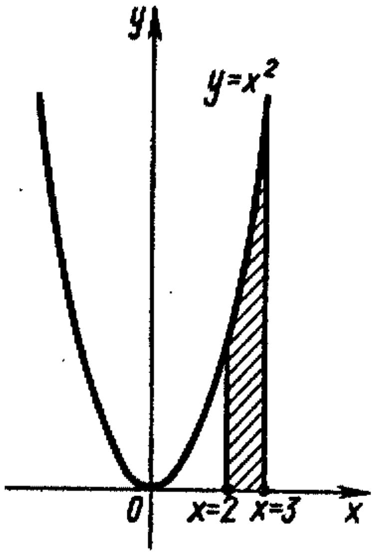

Рис. 75

4. $y=-x^2+4$ и $y=0$.

○ Выполним построение фигуры (рис. 76). Искомая площадь заключена между параболой $y=-x^2+4$ и осью Ox.

Найдем точки пересечения параболы с осью Ox. Полагая $y=0$, найдем $x=\pm 2$. Так как данная фигура симметрична относительно оси Oy, то вычислим площадь фигуры, расположенной справа от оси Oy, и полученный результат удвоим:

$$S_1=\int_0^2(-x^2+4)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2=5\frac{1}{3}\text{(кв. ед.)};$$

$$S=2S_1=2\cdot 5\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}\text{(кв. ед.)}. \quad ●$$

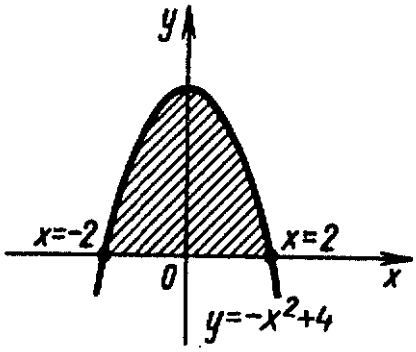

Рис. 76

5. $y^2=x,\ \ y\geqslant 0,\ \ x=1$ и $x=4$.

○ Здесь требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной верхней ветвью параболы $y^2=x$, осью Ox и прямыми $x=1$ и $x=4$ (рис. 77). По формуле (13.1), где $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$ и $b=4$, находим

$$S=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{1/2}\,dx=\frac{2x^{3/2}}{3}\Bigg|_1^4=\frac{2}{3}(4^{3/2}-1^{3/2})=\frac{2}{3}(8-1)=4\frac{2}{3}\text{ (кв. ед.).}\ \bullet$$

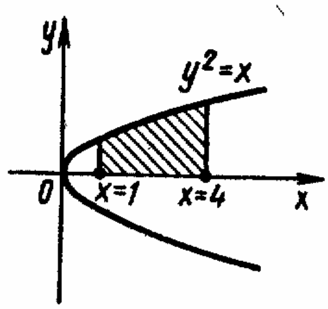

Рис. 77

6. $y=\sin x,\ \ y=0,\ \ x=0$ и $x=\pi$.

○ Искомая площадь ограничена полуволной синусоиды и осью Ox (рис. 78). Имеем

$$S=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Bigg|_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2\text{ (кв. ед.).}\ \bullet$$

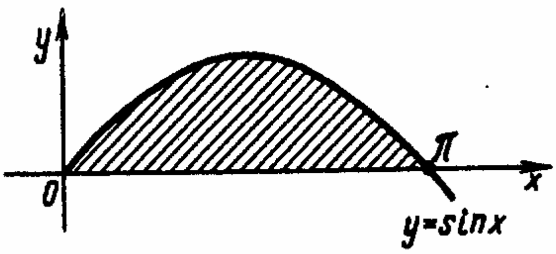

Рис. 78

7. $y=-6x,\ \ y=0$ и $x=4.$

○ Фигура расположена под осью Ox (рис. 79). Следовательно, ее площадь находим по формуле (13.3):

$$S=\left|-\int_0^4 6x\,dx\right|=|[-3x^2]_0^4|=|-48|=48 \text{ (кв. ед.)}. \quad ●$$

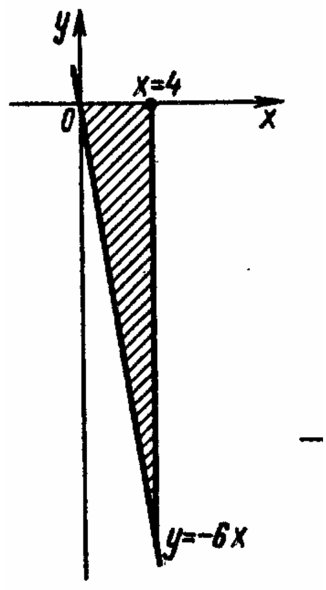

Рис. 79

8. $y=(1/3)x^3,\ \ y=0,\ \ x=-1$ и $x=2.$

○ Кривую $y=(1/3)x^3$ построим по точкам (рис. 80). Фигура, ограниченная данными линиями, расположена по обе стороны от оси Ox. Таким образом, площадь фигуры находим по формуле (13.4):

$$S=\left|\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}x^3\,dx\right|+\int_0^2\frac{1}{3}x^3\,dx=\left|\left[\frac{x^4}{12}\right]_{-1}^{0}\right|+\left[\frac{x^4}{12}\right]_0^2=\left|-\frac{1}{12}\right|+\frac{16}{12}=$$

$$=1\frac{5}{12} \text{ (кв. ед.)}. \quad ●$$

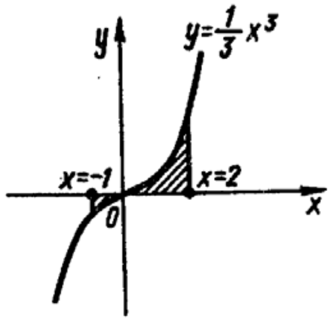

Рис. 80

10. $y=x^2$ и $y=2x$.

○ Данная фигура ограничена параболой $y=x^2$ и прямой $y=2x$ (рис. 81). Для определения точек пересечения заданных линий решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2x, \end{cases}$$

откуда находим $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$ Используя для нахождения искомой площади формулу (13.5), получим

$$S=\int_0^2 (2x-x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3} \text{ (кв. ед.).}$$ ●

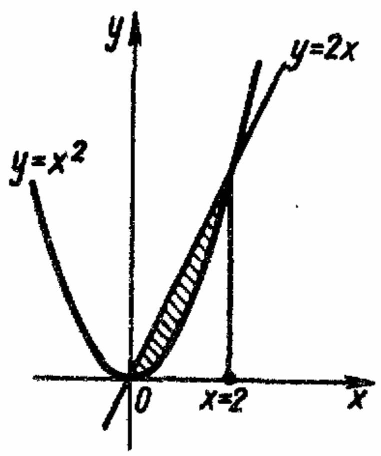

Рис. 81

11. $7x^2-9y+9=0$ и $5x^2-9y+27=0$.

○ Запишем уравнения парабол в виде $y=(7/9)x^2+1$ и $y=(5/9)x^2+3$ и построим эти параболы (рис. 82). Для нахождения точек их пересечения решим систему

$$\begin{cases} y=(7/9)x^2+1, \\ y=(5/9)x^2+3, \end{cases}$$

откуда $x_1=-3$, $x_2=3$. Так как фигура симметрична относительно оси Oy, то найдем половину ее площади, взяв пределы интегрирования от 0 до 3, и результат удвоим:

$$S_1=\int_0^3\left[\left(\frac{5}{9}x^2+3\right)-\left(\frac{7}{9}x^2+1\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^3\left(2-\frac{2}{9}x^2\right)dx=2\left[x-\frac{x^3}{27}\right]_0^3=2(3-1)=4 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S=2S_1=8 \text{ (кв. ед.)}. \bullet$$

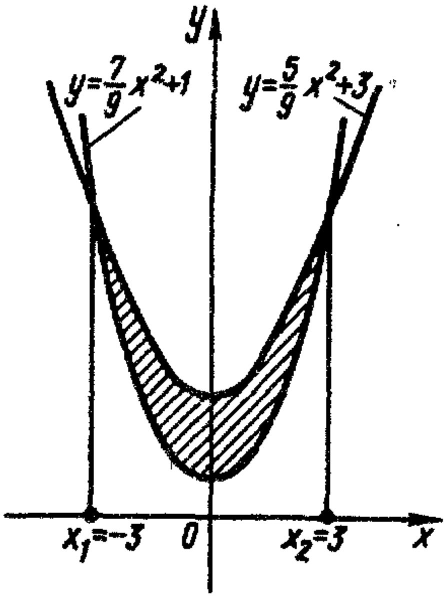

Рис. 82

71. Найти длину окружности $x^2+y^2=r^2$.

○ Дифференцируя уравнение окружности, имеем

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0;\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

По формуле (13.9) вычислим длину дуги четверти окружности, взяв пределы интегрирования от 0 до r:

$$L/4=\int_0^r\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx=\int_0^r\sqrt{\frac{y^2+y^2}{y^2}}\,dx=\int_0^r\sqrt{\frac{r^2}{y^2}}\,dx=$$

$$=r\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=\frac{\pi r}{2}.$$

Длина окружности равна $C=4L=4(\pi r/2)=2\pi r$. ●

72. Найти длину дуги параболы $y=x^2/2$ между точками $O(0;\,0)$ и $A(\sqrt{3};\,3/2)$.

○ Дифференцируя уравнение параболы, получим $\frac{dy}{dx}=x$. Вычислим длину дуги:

$$L=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}\approx 2{,}4 \text{ (ед. дл.)}. \quad ●$$

73. Найти длину параболы $y^2=4x$ между точками $O(0;\,0)$ и $(5/4;\,\sqrt{5})$.

○ Для вычисления длины дуги применим формулу (13.10), т. е. за аргумент примем переменную y. Находим $x=\frac{1}{4}y^2$; $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}y$; следовательно,

$$L=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y\right)^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{4+y^2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+4}+2\ln\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)\right]_0^{\sqrt{5}}\approx 2{,}64 \text{ (ед. дл.)}. \quad ●$$