Лекция
Применение определенного интеграла
(вычисление длины дуги кривой и объема тела вращения)

На лекции рассматриваются вопросы:
1. Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат.
2. Вычисление длины дуги плоской кривой в полярной системе координат.
3. Вычисление объема тела вращения.

1. Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат

1) Длина дуги AB кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, где $a\le x\le b$, вычисляется по формуле

$$\boxed{l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx}.$$

Пример:

Вычислить длину дуги кривой $y=x^{\frac{3}{2}}$, если $0\le x\le 5$.

Решение.

Найдем производную:

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$l=\int\limits_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int\limits_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int\limits_0^5\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\left.\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^5=\frac{8}{27}\left.\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\right|_0^5=\frac{8}{27}\left(\frac{7}{3}\right)^3-\frac{8}{27}=\frac{335}{27}\ \text{(ед.)}$$

2) Длина дуги AB кривой, заданной *параметрическими уравнениями* $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$, где $t_1\le t\le t_2$, вычисляется по формуле

$$\boxed{l=\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}.$$

Пример:

Вычислить длину астроиды $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

Решение.

(Необходимо сделать рисунок кривой).

Кривая симметрична относительно осей координат. Вычислим длину той части, которая расположена в первой четверти, в этом случае t будет изменяться от $t_1=0$ до $t_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Предварительно найдем производные:

$$x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t,$$
$$y'(t)=3a\sin^2 t\cos t.$$

Тогда

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t}\cdot dt=$$
$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\cdot dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\sin t\cdot dt=$$
$$=-3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot d(\cos t)=-3a\cdot\left(\frac{\cos^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-3a\cdot\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\cos^2 0}{2}\right)=\frac{3a}{2}.$$

Следовательно, длина астроиды $l=6a$.

2. Вычисление длины дуги плоской кривой в полярной системе координат.

Длина дуги кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$. вычисляется по формуле

$$\boxed{l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\cdot d\varphi}.$$

Пример:

Найти длину кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$.

Решение.

(Необходимо сделать рисунок кривой).

Кривая симметрична относительно полярной оси. При изменении полярного угла от 0 до π имеем половину кривой.

Найдем производную:

$$r' = -a\sin\varphi.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}l = \int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi =$$

$$= a\int_0^\pi \sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\cdot d\varphi = a\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\cdot d\varphi =$$

$$= a\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\cdot d\varphi = a\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\cdot d\varphi = 2a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\cdot d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = 4a.$$

Следовательно, длина кардиоиды $l = 8a$.

3. Вычисление объема тела вращения.

1) Вокруг оси *Ox* вращается криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу — осью *Ox*. Получается тело вращения, объем которого вычисляется по формуле

$$\boxed{V_x = \pi\int_a^b y^2 dx}.$$

Пример:

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейная трапеция, ограниченной параболой $y^2 = 4x$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью *Ox*.

Решение.

(Необходимо сделать рисунок тела).

$$V_x = \pi\int_1^3 4x dx = 2\pi x^2\Big|_1^3 = 18\pi - 2\pi = 16\pi \text{ (куб. ед.)}$$

2) Вокруг оси *Oy* вращается криволинейная трапеция, ограниченная справа графиком непрерывной функции $x = g(y)$, снизу и сверху —

соответственно прямыми $y=c$, $y=d$, слева — осью *Oy*. Получается тело вращения, объем которого вычисляется по формуле

$$\boxed{V_y=\pi\int_c^d x^2dy}.$$

Пример:

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной гиперболой $xy=2$, прямыми $y=2$, $y=4$ и осью *Oy*.

Решение.

(Необходимо сделать рисунок тела).

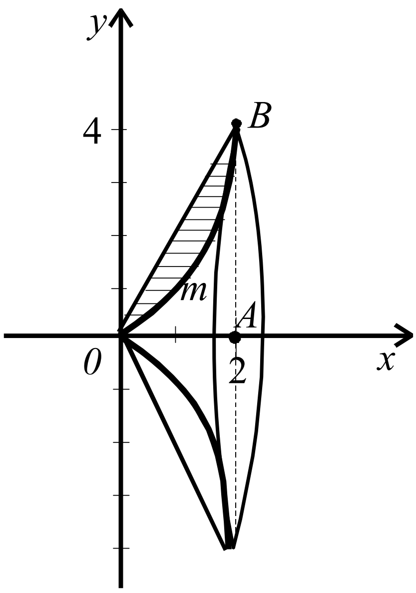
$$V_y=\pi\int_2^4\left(\frac{2}{y}\right)^2dy=4\pi\int_2^4 y^{-2}dy=4\pi\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_2^4=-\pi+2\pi=\pi \text{ (куб. ед.)}$$

Пример:

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2x$, вокруг оси *Ox*.

Решение

Построим эскиз тела:



Пусть V_1 — объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* плоской фигуры *OABmO*, а V_2 — объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* треугольника *OAB*. Тогда искомый объем V_x равен разности объемов V_2 и V_1:

$$V_x=V_2-V_1.$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, находится по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, находим абсциссы точек пересечения данных линий. Для этого решим систему уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x; \end{cases}$$

$$x^2 = 2x,$$

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x(x-2) = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Следовательно,

$$V_x = V_2 - V_1 = \pi \int_0^2 (2x)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 =$$

$$= \pi \left[\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right] = \frac{64}{15}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $V = \dfrac{64}{15}\pi$ (куб. ед.).