2.4. Основные элементарные функции комплексного переменного

Показательная функция

Показательная функция определяется следующим соотношением:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Свойства показательной функции:

1) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

2) $e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$;

3) $(e^z)^n = e^{nz}, n \in \mathbb{N}$;

4) $e^z \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^z = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^z = \infty$;

6) показательная функция — периодическая функция с мнимым основным периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Если $x = 0,\ y = \varphi$, то получаем классическую формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция — это функция, обратная показательной функции

$$w = \mathrm{Ln} z.$$

Свойства логарифмической функции:

1) логарифмическая функция определена на всей плоскости z, кроме точки $z = 0$;

2) $\mathrm{Ln}(z_1z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$;

3) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$;

4) $\mathrm{Ln}z^n = n\mathrm{Ln}z$;

5) $\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z$.

Логарифмическая функция — многозначная функция, так как

$$\mathrm{Ln}z=w\,,\ z=re^{i\varphi},\ \ w=u+vi\,,$$

$$\mathrm{Ln}re^{i\varphi}=u+vi\,,$$

$$e^{u+vi}=re^{i\phi}\,,$$

$$e^{u}e^{vi}=re^{i\varphi}\Rightarrow e^{u}=r,e^{vi}=e^{i\varphi}\,,$$

$$u=\ln r,\quad v=\varphi+2\pi k,k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

$$w=\mathrm{Ln}z=u+vi=\ln r+(\varphi+2\pi k)i,\ k=0,\ \pm 1,\ \ldots$$

Итак,

$$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z\,,\ \mathrm{Arg}z=\arg z+2\pi k,\,k=0,\pm 1,\ldots$$

Главным значением $\mathrm{Ln}z$ называется то значение, которое получается при $k=0$:

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,\ -\pi<\arg z\leq\pi\,.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Ln}z=\ln z+2k\pi i,\ k=0,\pm 1,\ldots$$

Пример. Вычислить: 1) $\ln(-1)$; 2) $\mathrm{Ln}(-1)$.

Решение. Найдем модуль комплексного числа $z=-1$ и $\arg(-1)$:

$$|z|=1,\ \ \arg(-1)=\pi\,.$$

1) $\ln(-1)=\ln 1+\pi i=\pi i$.

2) $\mathrm{Ln}(-1)=\pi i+2\pi ki=(2k+1)\pi i,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Степенная функция

Степенная функция — это функция вида

$$w=z^{n}\,.$$

Если $n\in\mathbb{N}$, то

$$w=z^{n}=r^{n}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\,.$$

Если $n=\frac{1}{q}(q\in\mathbb{N})$, то

$$w = \sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{q} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{q}\right), k \in 0, 1, 2, \ldots, q-1.$$

Если $n = \alpha + i\beta$, то

$$w = z^n = e^{nLnz}, \; z \neq 0.$$

Если $n = \dfrac{p}{q}(p, q \in \mathbb{N})$, то

$$w = \sqrt[q]{|z|^p}\left(\cos\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} + i\sin\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right).$$

Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональная функция — это функция вида

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Тригонометрические функции

Из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ для действительных y получаем

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \;\; e^{-iy} = \cos y - i\sin y.$$

Откуда

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Тригонометрические функции $\sin z, \cos z, \mathrm{tg} z, \mathrm{ctg} z$ для любого комплексного числа z определяются по следующим формулам:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Данные функции сохраняют свойства тригонометрических функций действительного переменного, например,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin 2z = 2\sin z \cos z \text{ и т. п.}$$

Функции $\sin z, \cos z$ в комплексной области являются неограниченными:

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \sin z = \infty, \quad \lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \cos z = \infty.$$

Гиперболические функции

Гиперболические функции определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sin z = -i\operatorname{sh} iz, \quad \operatorname{sh} z = -i\sin iz,$$
$$\cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz,$$
$$\operatorname{tg} z = -i\operatorname{th} iz, \quad \operatorname{th} z = -i\operatorname{tg} iz,$$
$$\operatorname{ctg} z = i\operatorname{cth} iz, \quad \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz.$$

Пример. Вычислить $\cos i$.

Решение:

$$\cos i = \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \operatorname{ch} 1 \approx 1{,}54.$$

Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции

$$w = \operatorname{Arc}\sin z, \ w = \operatorname{Arc}\cos z, \ w = \operatorname{Arctg} z, \ w = \operatorname{Arcctg} z$$

определяются как функции, обратные соответственно к функциям

$$\sin w, \ \cos w, \ \operatorname{tg} w, \ \operatorname{ctg} w.$$

Обратные тригонометрические функции являются многозначными и находятся через логарифмические функции:

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}); \quad \operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\mathrm{Arctg} z = -\frac{i}{2} \mathrm{Ln} \frac{i - z}{i + z} (z \neq \pm i);$$

$$\mathrm{Arcctg} z = \frac{i}{2} \mathrm{Ln} \frac{z - i}{z + i} (z \neq \pm i).$$

Пример. Вычислить $\mathrm{Arcrg}(2i)$.

Решение: $z = 2i$ подставим в указанную выше формулу, получим

$$\mathrm{Arcrg}(2i) = -\frac{i}{2} \mathrm{Ln}\left(\frac{i - 2i}{i + 2i}\right) = -\frac{i}{2} \mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{3} + \pi i + 2k\pi i\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{i \ln 3}{2} + k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$