ИДЗ № 1 «Элементы теории функции комплексной переменной»

Задание № 1.

Представить заданную функцию $\omega = f(z)$, где $z=x+iy$, в виде $\omega = u(x;y) + iv(x;y)$; найти ее действительную и мнимую части.

Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	$\omega = f(z)$	Номер варианта	$\omega = f(z)$
1	z^{-1}	11	2^{z^2}
2	e^{1-2iz}	12	$\mathrm{tg}\, iz$
3	$\sin(z-i)$	13	e^{z^2}
4	e^{iz^2}	14	$\cos(z-i)$
5	$z+z^2$	15	$\sin iz$
6	$\sin(z+i)$	16	$2z^2 - iz$
7	$\mathrm{tg}z$	17	ze^z
8	$2z^2 - iz$	18	$\cos iz$
9	e^{-z}	19	e^{1-2z}
10	$\cos(z+i)$	20	$i(1-z^2)-2z$

Задание № 2.

Проверить является ли заданная функция $\omega = f(z)$, где $z=x+iy$ аналитической. Если да, то найти значение ее производной.

Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	$\omega = f(z)$	Номер варианта	$\omega = f(z)$
1	ze^z	11	$\sin z$
2	e^{z^2}	12	e^{-3z}
3	$\cos z$	13	$\cos 2z$
4	z^3	14	ze^{-z}
5	e^{3z}	15	$\sin 2z + i$
6	$\sin \frac{z}{3}$	16	$\frac{1}{z},\ \lvert z\rvert > 0$
7	$\mathrm{sh}z$	17	$\cos \frac{z}{2}$
8	$\frac{1}{z^2},\ \lvert z\rvert > 0$	18	z^2
9	$\cos 3z - 2i$	19	e^{z-i}

10	e^{2z-3i}	20	$\dfrac{1}{z-2}$

Задание № 3.

Вычислить интеграл от функции комплексной переменной $f(z)$. Построить область интегрирования.

Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Интеграл
1	$\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2dz$, $C:\lvert z\rvert=1, -\pi\le\arg z\le 0$
2	$\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,zdz$, $C:\lvert z\rvert=1$, обход против часовой стрелки
3	$\int\limits_C \lvert z\rvert dz$, C: отрезок, соединяющий точки -1 и 1
4	$\int\limits_{1-i}^{-1-i}(2z+1)dz$
5	$\int\limits_C \mathrm{Im}\,zdz$, C: отрезок, соединяющий точки 0 и $1+i$
6	$\int\limits_0^{i+1} z^3dz$
7	$\int\limits_C \mathrm{Im}\,zdz$, C: отрезок, соединяющий точки 0 и i
8	$\int\limits_0^{i} z\cos zdz$
9	$\int\limits_C \mathrm{Im}\,zdz$, C: верхняя часть окружности $\lvert z\rvert=1$, где -1 - начальная, а 1 - конечная точки
10	$\int\limits_C \lvert z\rvert dz$, C: отрезок, соединяющий точки -1 и 2
11	$\int\limits_C (1+i-2\bar{z})dz$, C: отрезок, соединяющий точки 0 и $1+i$
12	$\int\limits_{-i}^{i} ze^{z^2}dz$
13	$\int\limits_1^{i} z\sin zdz$
14	$\int\limits_C \lvert z\rvert dz$, $C:\lvert z\rvert=1, 0\le\arg z\le\pi$
15	$\int\limits_C \lvert z\rvert\,\mathrm{Re}\,zdz$, $C:\lvert z\rvert=1, 0\le\arg z\le\pi$

16	$\int\limits_0^i z\sin z dz$
17	$\int\limits_i^1 z dz$
18	$\int\limits_C \operatorname{Re} z dz$, C: отрезок, соединяющий точки 0 и 2+i
19	$\int\limits_C \lvert z\rvert dz$, $C: \lvert z\rvert = 3$, обход против часовой стрелки
20	$\int\limits_0^{2i} z\sin z dz$

Задание № 4.

Вычислить интеграл от функции комплексной переменной $f(z)$, применив теорему Коши или интегральную формулу Коши. Построить область интегрирования.

Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	$\int\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{e^z}{z^2+2z}dz$	11	$\int\limits_{\lvert z-2\rvert=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-5z}dz$
2	$\int\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$	12	$\int\limits_{\lvert z-i\rvert=1} \frac{\cos z}{z-i}dz$
3	$\int\limits_{\lvert z-1\rvert=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$	13	$\int\limits_{\lvert z-2\rvert=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$
4	$\int\limits_{\lvert z-1\rvert=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)(z-3)}dz$	14	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{z^2}{z^2+2iz+8}dz$
5	$\int\limits_{\lvert z-i\rvert=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$	15	$\int\limits_{\lvert z+2i\rvert=2} \frac{dz}{z^2+9}$
6	$\int\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{\frac{1}{z+2}}}dz$	16	$\int\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{z^2+1}{z(z-2i)}dz$
7	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{\cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)}dz$	17	$\int\limits_{\lvert z+i\rvert=1} \frac{\sin z}{z+i}dz$
8	$\int\limits_{\lvert z\rvert=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z}dz$	18	$\int\limits_{\lvert z-2i\rvert=2} \frac{dz}{z^2+9}$

9	$\int\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{\mathrm{ch}iz}{z^2+4z+3}dz$	19	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{2z-1}{z(z-4)}dz$
10	$\int\limits_{\lvert z-1\rvert=1} \frac{\sin \pi z}{z^2-1}dz$	20	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{dz}{z^2-5z+4}$

Пример решения задания №1.

Представив заданную функцию $\omega = e^{1+z}$, где $z=x+iy$, в виде $\omega = u(x;y)+iv(x;y)$, найти ее действительную и мнимую части.

Решение.

Используя свойства показательных функций и представив $z=x+iy$, получим:

$$\omega = e^{1+z} = e\cdot e^{z} = e\cdot e^{x+iy} = e^{x+1}\cdot e^{iy}.$$

Далее, используя формулу Эйлера, найдем:

$$\omega = e^{x+1}\cdot e^{iy} = e^{x+1}(\cos y + i\sin y) = e^{x+1}\cos y + i\cdot e^{x+1}\sin y.$$

Таким образом, действительная и мнимая части исходной функции равны соответственно:

$$u(x;y) = e^{x+1}\cos y,\ v(x;y) = e^{x+1}\sin y.$$

Ответ: $u(x;y) = e^{x+1}\cos y$, $v(x;y) = e^{x+1}\sin y$.

Пример решения задания №2.

Проверить является ли заданная функция $\omega = \sin 3z$, где z=x+iy аналитической. Если да, то найти значение ее производной.

Решение.

Функция комплексной переменной $\omega = f(z)$ является аналитической в точке $z=x+iy$, если она дифференцируема в этой точке, то есть для функции, представленной в виде $\omega = u(x;y)+iv(x;y)$, выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Проверим выполнение указанных условий для исходной функции. Для этого используем правила преобразования тригонометрических функций комплексной переменной:

$$\omega = \sin 3z = \sin 3(x+iy) = \sin 3x\cdot\cos 3iy + \cos 3x\cdot\sin 3iy =$$
$$= \sin 3x\cdot\mathrm{ch}3y + i\cos 3x\cdot\mathrm{sh}3y.$$

Следовательно,

$$u = \sin 3x \cdot \mathrm{ch} 3y,\ v = \cos 3x \cdot \mathrm{sh} 3y.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\cos 3x \cdot \mathrm{ch} 3y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3\cos 3x \cdot \mathrm{ch} 3y,$$

то есть $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Далее

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3\sin 3x \cdot \mathrm{sh} 3y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = -3\sin 3x \cdot \mathrm{sh} 3y,$$

то есть $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Таким образом, для исходной функции выполняются условия Коши-Римана, функция является аналитической.

Найдем производную функции по формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$f'(z) = 3\cos 3x \cdot \mathrm{ch} 3y - 3i\sin 3x \cdot \mathrm{sh} 3y = 3\cos 3x \cdot \cos 3iy - 3\sin 3x \cdot \sin 3iy =$$
$$= 3\cos(3x + 3iy) = 3\cos z.$$

Ответ: $f'(z) = 3\cos z$.

Пример решения задания №3.

Вычислить интеграл $\int\limits_C |z| dz$, где C — отрезок, соединяющий точки 0 и 2–i. Построить область интегрирования.

Решение.

Формула для вычисления интеграла от функции комплексной переменной позволяет свести вычисление исходного интеграла к вычислению криволинейного интеграла 2-го рода:

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C (u + iv)(dx + idy).$$

Используя приведенную формулу, и, учитывая, что $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, получим:

$$\int\limits_C |z| dz = \int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}(dx + idy) = \int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + i\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

Так как C — отрезок прямой, соединяющий точки 0 и 2–i на комплексной плоскости, или точки O(0;0) и A(2;–1) в декартовых координатах (*рис.5*), то соответствующее уравнение имеет вид $y = -\frac{1}{2}x$, $dy = -\frac{1}{2}dx$.

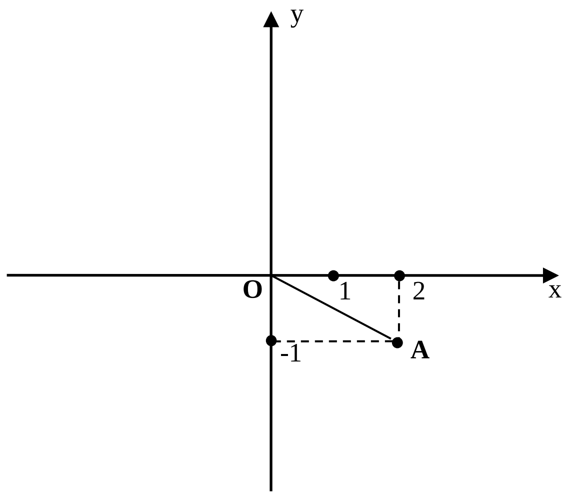

Рис. 5 Область интегрирования

Следовательно, на указанном отрезке $dy = -\frac{1}{2}dx$, $x \in [0;2]$. Подставив полученные равенства в интегралы, найдем:

$$\int_C |z|dz = \int_0^2 \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}}dx + i\int_0^2 \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right)dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^2 |x|dx - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{2}i\int_0^2 |x|dx =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{4}x^2\Big|_0^2 - \frac{\sqrt{5}}{8}ix^2\Big|_0^2 = \sqrt{5}\left(1 - \frac{i}{2}\right).$$

Ответ: $\sqrt{5}\left(1 - \frac{i}{2}\right)$.

Пример решения задания №4.

Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{z - 2i}dz$, применив теорему Коши или интегральную формулу Коши. Построить область интегрирования.

Решение.

Воспользуемся интегральной формулой Коши:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0),$$

где функция *f(z)* является аналитической в области *D*, ограниченной контуром *C*, z_0 — точка, лежащая внутри области *D*.

В предложенном интеграле область D — круг радиуса 3 с центром в начале координат (*рис.6*), $f(z) = z^2$ — аналитическая функция, z_0=2i.

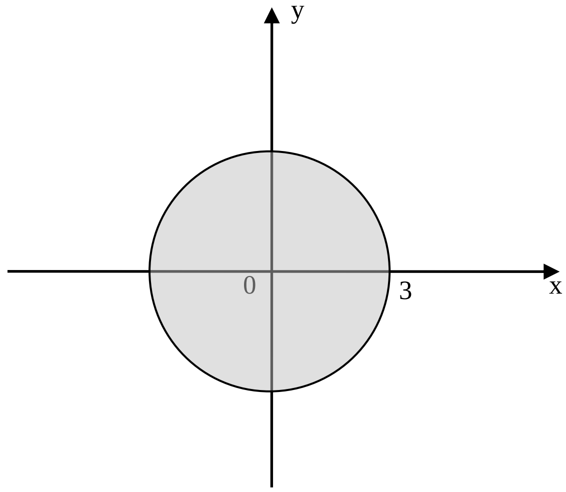

Рис. 6 Область интегрирования

Следовательно,

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{z-2i}dz = 2\pi i(2i)^2 = 2\pi i(-4) = -8\pi i\ .$$

Ответ: $-8\pi i$.