

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды

1. Повторите основной теоретический материал.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. – С. 464–471.

Обратите внимание на следующее:

Ряд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

где x — переменная величина, a_n , x_0 — числа, называется степенным.

Свойства степенных рядов:

- 1) степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости;
- 2) степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости.

Представление функции в виде степенного ряда называется разложением функции в ряд.

Разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням $(x - x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

– ряд Тейлора

(Остаточный член $R_n(x)$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$)

Пусть в ряде Тейлора $x_0 = 0$.

Разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням x :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots$$

– ряд Маклорена

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

($-1 < x < 1$)

– биномиальный ряд

2. Рассмотрите примеры решения основных типов задач:

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. – С. 471–472.

- 1) Пример 64.1 (С. 471)
- 2) Пример 64.2 (С. 471)
- 3) Пример 64.3 (С. 472)

3. Решите самостоятельно (домашнее задание):

1) Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $y = e^{-x^2}$;

б) $y = \sin \frac{x}{3}$;

в) $y = \cos^2 x$;

г) $y = \sqrt[3]{8 + 4x}$;

д) $y = \ln(1 - 3x^2)$;

е) $y = x \cos 2x$.