Самостоятельное изучение учебного материала

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Изучите вопросы:

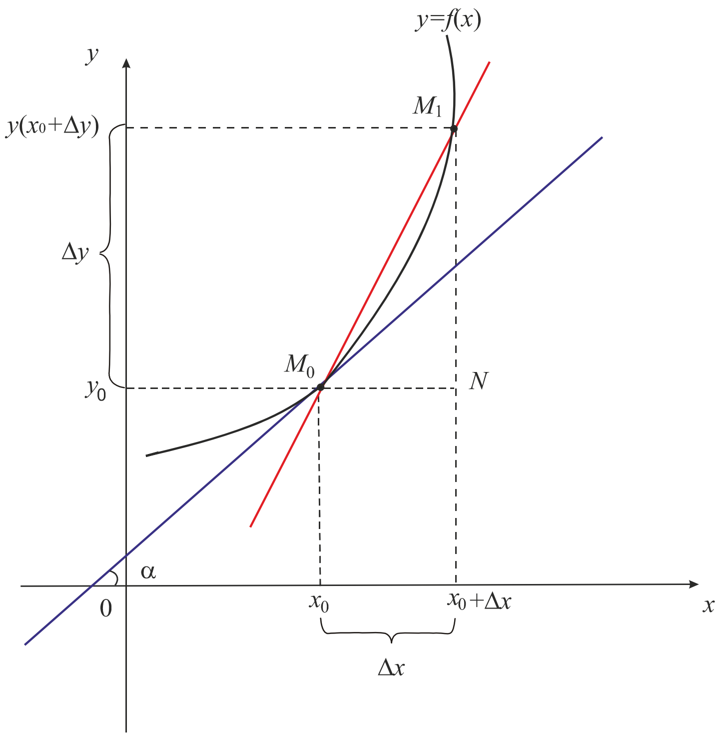
1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Уравнения касательной и нормали к кривой.
3. Доказательство основных правил и формул дифференцирования.
4. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Производная неявной функции.
5. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью.
6. Геометрический смысл дифференциала. Свойства дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Понятие о дифференциалах высших порядков.
7. Основные теоремы дифференциального исчисления.
8. Правило Лопиталя.
9. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

1. Задачи, приводящие к понятию производной.

1. Задача о касательной.

Пусть на плоскости Oxy дана непрерывная кривая $y = f(x)$, и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Дадим определение касательной. Пусть аргумент x_0 получает приращение Δx. В этом случае от точки $M_0(x_0; f(x_0))$ по кривой $y = f(x)$ перейдем в точку $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведем секущую M_0M_1.



Под ***касательной к кривой*** $y = f(x)$ ***в точке*** M_0 понимают предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0, т.е. при $\Delta x \to 0$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; f(x_0))$, имеет вид

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Из треугольника M_0M_1N найдем угловой коэффициент секущей $k_{M_0M_1}$:

$$k_{M_0M_1} = \mathrm{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

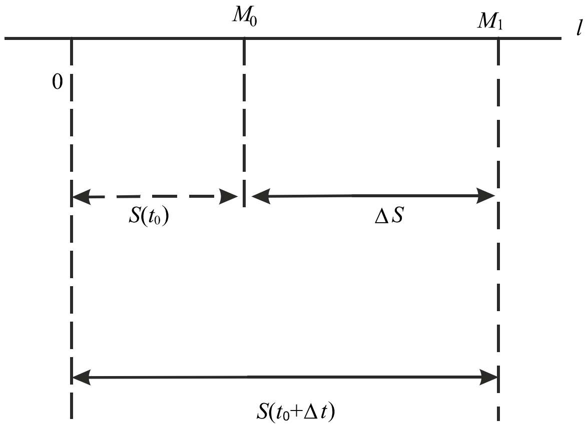
Тогда угловой коэффициент касательной

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} k_{M_0M_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Задача о скорости прямолинейного движения.

Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $s = s(t)$, где s — путь, t — время. Необходимо найти скорость точки в момент времени t_0, т.е. $v(t_0)$.

В момент времени t_0 пройденный путь равен $s_0 = s(t_0)$, а к моменту времени $t_0 + \Delta t$ путь равен $s(t_0 + \Delta t)$.



За время Δt тело пройдет путь $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Тогда за промежуток Δt средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость $v_{\text{ср}}$ характеризует скорость в момент времени t_0. Поэтому скорость точки в момент времени t_0 равна пределу средней скорости за промежуток Δt, когда $\Delta t \to 0$, т.е.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Вывод: Рассматривая две различных по характеру задачи, мы пришли к пределу одного вида: к пределу отношения приращения некоторой функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю.

Этот предел играет чрезвычайно важную роль в математическом анализе, являясь основным понятием дифференциального исчисления.

2. Уравнения касательной и нормали к кривой.

Пусть на плоскости Oxy дана непрерывная кривая $y=f(x)$.

Составим уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ по формуле

$$y-f(x_0)=k_{\text{кас}}(x-x_0).$$

Так как $k_{\text{кас}}=f'(x_0)$, то ***уравнение касательной*** к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ примет вид

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}.$$

Нормаль к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярна касательной к кривой, проведенной в этой же точке. Тогда по условию перпендикулярности двух прямых угловой коэффициент нормали

$$k_{\text{норм}}=-\frac{1}{k_{\text{кас}}}=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Тогда ***уравнение нормали*** к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ примет вид

$$\boxed{y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)}.$$

Пример. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y=x^2+4x-15$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение.

Найдем ординату точки касания $y(3)=3^2+4\cdot 3-15=6$.

Найдем производную функции в произвольной точке $y'(x)=2x+4$.

Найдем производную функции в точке касания $y'(3)=2\cdot 3+4=10$.

Составим уравнение касательной по формуле $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$.

Получим $y-6=10(x-3)$, $10x-y-24=0$ — уравнение касательной.

Составим уравнение нормали по формуле $y-y(x_0)=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$.

Получим $y-6=-\dfrac{1}{10}(x-3)$, $x+10y-63=0$ — уравнение нормали.

3. Доказательство основных правил и формул дифференцирования.

Теорема 1: Производная постоянной равна нулю, т.е. $C'=0$, где $C=\text{const}$.

Доказательство.

◀ Рассматриваем функцию $y=C$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.

2. Находим приращение функции $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = C - C = 0$.

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

4. По определению производной находим $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Итак, $C' = 0$. ►

Теорема 2: Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций, т.е.

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'}.$$

Доказательство:

◄ Рассматриваем функцию $y = u + v$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.

2. Функции u и v получат соответственно приращения Δu и Δv. Находим приращение функции:

$$\Delta y = \big(u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)\big) - \big(u(x) + v(x)\big) =$$
$$= u(x) + \Delta u + v(x) + \Delta v - u(x) - v(x) = \Delta u + \Delta v$$

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

4. По определению производной находим y':

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Итак, $(u+v)' = u' + v'$. ►

Аналогично, $\boxed{(u-v)' = u' - v'}$.

Теорема 3: Производная произведения двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}.$$

Доказательство.

◄ Рассматриваем функцию $y = uv$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.

2. Функции u и v получат соответственно приращения Δu и Δv. Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \big(u(x) + \Delta u\big)\big(v(x) + \Delta v\big) - u(x)v(x) =$$
$$= u(x)v(x) + u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v - u(x)v(x) = u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v.$$

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x)\Delta v+\Delta u v(x)+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x.$$

4. По определению производной находим y':

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=$$

$$=u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=$$

$$=u(x)v'+v(x)u'+u'v'\cdot 0=u'v(x)+u(x)v'.$$

Итак,

$$(uv)'=u'v+uv'. \ ►$$

Следствие:

$$(Cu)'=C'u+Cu'=0\cdot u+Cu'=Cu',$$

где $C=\text{const}$.

Теорема 4: Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}.$$

Доказательство.

◄ Рассматриваем функцию $y=\dfrac{u}{v}$.

1. Даем аргументу *x* приращение $\Delta x\neq 0$.

2. Функции *u* и *v* получат соответственно приращения Δu и Δv. Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{(u(x)+\Delta u)v(x)-u(x)(v(x)+\Delta v)}{(v(x)+\Delta v)v(x)}=$$

$$=\frac{u(x)v(x)+v(x)\Delta u-u(x)v(x)-u(x)\Delta v}{v^2(x)+v(x)\Delta v}=\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{v^2(x)+v(x)\Delta v}.$$

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{\Delta x\cdot\left(v^2(x)+v(x)\Delta v\right)}=\frac{v(x)\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\Delta v}.$$

4. По определению производной находим y':

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\Delta v} = \frac{v(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v} = \frac{v(x)u' - u(x)v'}{v^2(x)}.$$

Итак,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \ \blacktriangleright$$

Производная сложной и обратной функций

Пусть переменная y есть функция от переменной u, т.е. $y = f(u)$, а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x, т.е. $u = g(x)$. Тогда задана сложная функция $y = f(g(x))$.

Теорема 5: Если $y = f(u)$ и $u = g(x)$ — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции y по промежуточному аргументу u, умноженной на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной x, т.е.

$$\boxed{y'(x) = y'(u)\cdot u'(x)}.$$

Доказательство.

◀ Рассматриваем функцию $y = f(g(x))$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.

2. Функции $y = f(u)$ и $u = g(x)$ соответственно получат приращения Δy и Δu. Пусть $\Delta u \neq 0$.

3. Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

4. По определению производной находим y':

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'(u)\cdot u'(x).$$

Итак, $y'(x) = y'(u)\cdot u'(x)$. ▶

Теорема 6: Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ с производной $y'(x) \neq 0$, производная обратной функции $x = g(y)$ равна обратной величине производной данной функции, т.е. находится по формуле:

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}}.$$

Доказательство.

◀ Рассматриваем функцию $x = g(y)$.

1. Даем аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$.

2. Функция $x = g(y)$ получит приращение Δx.

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

4. По определению производной находим x':

$$x'=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{y'(x)}.$$

(При этом если $\Delta y\to 0$, то в силу непрерывности обратной функции $\Delta x\to 0$.)

Итак, $x'(y)=\dfrac{1}{y'(x)}$. ►

Основные формулы дифференцирования.

1) Производная логарифмической функции.

◄ Рассмотрим функцию $y=\ln x$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$.

2. Находим приращение функции:

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

4. По определению производной находим y':

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$$

$$=\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{\Delta x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}.$$

Итак, $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$ и $\boxed{(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'}$. ►

◄ Рассмотрим функцию $y=\log_a x$.

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}.$$

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

Итак, $\boxed{(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}}$ и $\boxed{(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'}$. ►

2) Производная показательной функции.

◀ Рассмотрим функцию $y = a^x$. Обратная функция имеет вид $x = \log_a y$, причем $x'(y) = \dfrac{1}{y\ln a} \neq 0$.

По правилу производной обратной функции:

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\dfrac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x \ln a.$$

Итак, $\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \ln a}$ и $\boxed{\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'}$. ▶

◀ Рассмотрим $\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x$.

Итак, $\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$ и $\boxed{\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'}$. ▶

3) Производная степенной функции.

◀ Рассмотрим функцию $y = x^n$, где $n \in R$.

Логарифмируем обе части:

$$\ln y = \ln x^n,$$
$$\ln y = n\ln x.$$

Дифференцируем обе части:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = n\cdot\frac{1}{x}.$$

Умножим обе части на $y = x^n$:

$$y' = n\cdot\frac{1}{x}\cdot x^n = nx^{n-1}.$$

Итак, $\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1}}$ и $\boxed{\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'}$. ▶

Частные случаи:

$x' = 1$;

$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$ и $\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'}$;

$\boxed{\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}}$ и $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'}$

4) Производные тригонометрических функций.

1) ◀ Рассмотрим функцию $y = \sin x$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.

2. Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

3. Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

4. По определению производной находим y':

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x\,.$$

Итак,

$$(\sin x)'=\cos x \text{ и } (\sin u)'=\cos u\cdot u'\,. \blacktriangleright$$

2) ◄ Рассмотрим функцию $y=\cos x$.

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x\cdot(-1)=-\sin x\,.$$

Итак,

$$(\cos x)'=-\sin x \text{ и } (\cos u)'=-\sin u\cdot u'\,. \blacktriangleright$$

3) ◄ Рассмотрим функцию $y=\mathrm{tg}x$.

$$(\mathrm{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \text{ и } (\mathrm{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'\,. \blacktriangleright$$

4) ◄ Рассмотрим функцию $y=ctgx$.

$$(\mathrm{ctg}x)'=\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\frac{1}{\sin^2 x}\cdot(-1)=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак,

$$(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x} \text{ и } (\mathrm{ctg}u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'\,. \blacktriangleright$$

5) Производные обратных тригонометрических функций.

1). ◄ Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Она является обратной к функции $x = \sin y$, где $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$; $x' = \cos y \neq 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

По правилу дифференцирования обратной функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \ ►$$

2) ◄ Рассмотрим функцию $y = \arccos x$.

Т.к. $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, то $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \ ►$$

3). ◄ Рассмотрим функцию $y = \mathrm{arctg} x$. Она является обратной к функции $x = \mathrm{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$; $x' = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$.

По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\mathrm{arcctg} x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ и } (\mathrm{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'. \ ►$$

4) ◄ Рассмотрим функцию $y = \mathrm{arcctg} x$.

Т.к. $\mathrm{arctg} x + \mathrm{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} x$.

$$(\mathrm{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} x \right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \text{ и } (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'. \ ►$$

4. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Производная неявной функции.

Часто зависимость между переменными x и y задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где t — вспомогательная переменная, называемая *параметром*.

Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы, $x_t' \neq 0$ и функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$.

Рассмотрим функции $y = y(t)$, где $t = t(x)$. Тогда можно считать, что y — сложная функция от x. По правилам дифференцирования сложной функции и обратной функции

$$y_x' = y_t' \cdot t_x' = y_t' \cdot \frac{1}{x_t'} = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

Итак,

$$\boxed{y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}}.$$

Найдем производную 2-го порядка.

$$y_x'' = (y_x')_x' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'}.$$

Пример. Найти y_x'', если $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$

Решение.

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3;$$

$$y_x'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'} = \frac{(3t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3.$$

Производная неявной функции.

- Если зависимость между аргументом x и функцией y задается уравнением $y = f(x)$, то есть уравнением, которое разрешено относительно y, то y называют ***явной функцией*** от x.

- Если же зависимость между x и y задана уравнением $F(x,y)=0$, которое не разрешено относительно функции y, то y называют ***неявной функцией*** от x.

Для нахождения производной y' неявной функции y, заданной уравнением $F(x,y)=0$, нужно продифференцировать по переменной x обе части этого равенства, рассматривая y, как функцию от x, а затем из полученного уравнения выразить производную y'.

Пример. Найти производную y' функции y, определяемой уравнением

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0.$$

Решение.

Дифференцируем по переменной x обе части равенства, рассматривая y, как функцию от x:

$$2x + 2yy' - 2 + 6y' = 0.$$

Выразим из полученного уравнения искомую производную y':

$$2yy' + 6y' = 2 - 2x,$$

$$yy' + 3y' = 1 - x,$$

$$y'(y+3) = 1 - x,$$

$$y' = \frac{1-x}{y+3}.$$

5. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью.

Теорема 1: Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

◄ Так как по условию теоремы функция дифференцируема в точке x_0, то существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

По теореме о связи предела функции с бесконечно малой:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Умножим обе части на Δx:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ по свойствам бесконечно малых устанавливаем, что $\Delta y \to 0$. Следовательно, по определению непрерывности функции в точке заключаем, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. ►

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

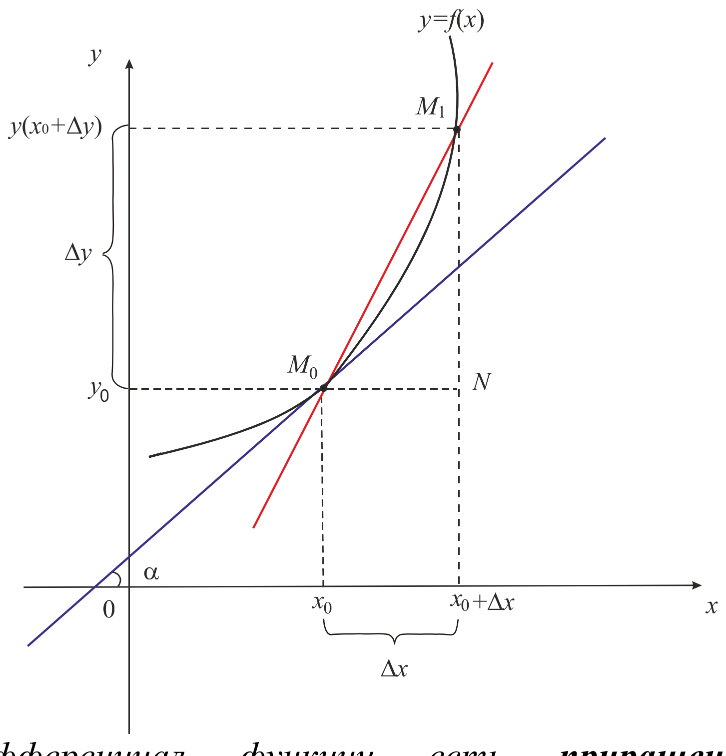
Таким образом, непрерывность функции — необходимое, но не достаточное условие ее дифференцируемости.

6. Геометрический смысл дифференциала. Свойства дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Понятие о дифференциалах высших порядков.

Возьмем на графике функции $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$, которая образует угол α с положительным направлением оси Ox, т.е $f'(x) = tg\alpha$. Из прямоугольного треугольника MKN

$$KN = MN \cdot tg\alpha = \Delta x \cdot tg\alpha = f'(x)\Delta x,$$

Так как $dy = f'(x)\Delta x$, то $dy = KN$.



Итак, *дифференциал функции есть* ***приращение ординаты касательной,*** *проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке x, когда x получает приращение Δx.*

1) $dC = 0$;
2) $d(Cu) = C \cdot du$;
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

4) $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$;

5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

6) *Инвариантность формы дифференциала.*

Рассматривая функцию $y = f(x)$ независимой переменной x, получили

$$dy = f'(x)dx .$$

Определим дифференциал сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$.

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, имеем:

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Тогда дифференциал

$$dy = y' \cdot dx = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du .$$

Таким образом,

$$dy = f'(u)du .$$

Итак, формула дифференциала не изменится, если вместо функции от независимой переменной x рассматривать функцию от зависимой переменной u.

Это свойство дифференциала получило название *инвариантности* (т.е. неизменности) *формы* (или *формулы*) *дифференциала.*

Пример. Найти дифференциал dy функции $y = e^{x^2+1}$.

Решение.

1) По определению дифференциала:

$$dy = y' \cdot dx = \left(e^{x^2+1}\right)' \cdot dx = e^{x^2+1} \cdot 2x \cdot dx .$$

2) Найдем дифференциал по свойству инвариантности формы дифференциала. Данную функцию можно представить так: $y = e^u$, где $u = x^2 + 1$. Тогда

$$dy = e^u \cdot du = e^{x^2+1} \cdot d\left(x^2 + 1\right) = e^{x^2+1} \cdot 2x \cdot dx .$$

Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Приращение функции Δy в точке x_0:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \text{, где } f'(x_0)dx = dy \text{, т.е.}$$

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x .$$

Дифференциал dy является главной частью приращения функции Δy. Это означает, что при достаточно малых значениях Δx приращение Δy приближенно равно дифференциалу, т.е.

$$\Delta y \approx dy ,$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx ,$$

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}.$$

Полученная формула используется в приближенных вычислениях.

Пример. Найти приближенное значение величины $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $x_0=16$, $\Delta x=16-15{,}8=-0{,}2$.

Тогда $f(x_0)=\sqrt[4]{16}=2$, $f'(x)=\left(\sqrt[4]{x}\right)'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\dfrac{1}{32}$.

Получаем $\sqrt[4]{15{,}8}=\sqrt[4]{16-0{,}2}\approx 2+\dfrac{1}{32}\cdot(-0{,}2)=2-0{,}00625=1{,}99375$.

Понятие о дифференциалах высших порядков.

Дифференциал функции $dy=f'(x)dx$ есть функции от двух аргументов: x и dx.

Будем полагать, что dx имеет фиксированное значение, не зависящее от x. В этом случае dy есть некоторая функция от x, которая также может иметь дифференциал.

- ***Дифференциалом второго порядка*** d^2y функции $y=f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции при фиксированном dx, т.е.

$$d^2y=d(dy).$$

- ***Дифференциалом n-го порядка*** d^ny называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т.е.

$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right).$$

Найдем d^2y:

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=dx\cdot d(f'(x))=dx\cdot(f'(x))'\,dx=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2,$$

где $dx^2=(dx)^2$.

Итак,

$$\boxed{d^2y=f''(x)dx^2}.$$

Аналогично,

$$\boxed{d^ny=f^{(n)}(x)dx^n},$$

т.е. *дифференциал n-го порядка равен произведению производной n-го порядка на n-ю степень дифференциала независимой переменной.*

Тогда

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2};$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Пример. Найти дифференциал второго порядка функции $y=e^{2x}+x^3$.

Решение.

Определим производную 2-го порядка данной функции:

$$y'=2e^{2x}+3x^2; \quad y''=4e^{2x}+6x.$$

Тогда

$$d^2y=y''\cdot dx^2=\left(4e^{2x}+6x\right)dx^2.$$

7. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ролля[1]***:*** Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема на интервале (a,b);
3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$.

Тогда на интервале (a,b) существует по крайней мере одна такая точка $c\in(a,b)$, в которой производная функции равна нулю, т.е. $f'(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля: Если кривая $y=f(x)$ имеет касательную в каждой точке интервала (a,b) и $f(a)=f(b)$, то на кривой найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.

Например, функция $f(x)=8x-x^2$ дифференцируема на отрезке $[2;6]$ и на концах отрезка принимает равные значения:

$$f(2)=f(6)=12.$$

Следовательно, по теореме Ролля на интервале $(2;6)$ найдется по крайней мере одно значение аргумента *x*, при котором производная $f'(x)$ обращается в нуль.

$f'(x)=8-2x$;

$f'(x)=0$ при $x=4$, где $2<4<6$.

Теорема Лагранжа[2]***:*** Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема на интервале (a,b);

[1] Ролль Мишель (1652—1719) — французский математик.

[2] Лагранж Жозеф Луи (1736—1813) — французский математик и механик.

Тогда на интервале (a,b) существует по крайней мере одна такая точка $c \in (a,b)$, в которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Механический смысл теоремы Лагранжа:

$f(b) - f(a)$ — изменение функции на отрезке $[a,b]$;

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — средняя скорость изменения функции на отрезке $[a,b]$;

$f'(c)$ — мгновенная скорость изменения функции в точке *c*.

По теореме существует хотя бы одна точка внутри отрезка, такая, что скорость изменения функции в ней равна средней скорости изменения функции на этом отрезке.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа:

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k_{AB}$ — угловой коэффициент хорды *AB*;

$f'(c) = k_{кас}$ — угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x = c$.

По теореме $k_{AB} = k_{кас}$, следовательно, найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции и хорда, проведенная через концы дуги *AB*, параллельны.

Пример. На параболе $y = x^2$ даны точки $A(-2;4)$ и $B(4;16)$. Требуется на дуге *AB* найти такую точку *C*, в которой касательная параллельна хорде *AB*.

Решение.

Функция $y = x^2$ на отрезке $[-2;4]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа.

По условию имеем: $a = -2$, $b = 4$; $f(a) = 4$, $f(b) = 16$.

Подставим эти данные в формулу Лагранжа:

$$16 - 4 = f'(c)(4 - (-2)),$$

откуда $f'(c) = 2$, где $-2 < c < 4$.

$f'(x) = 2x$, $f'(c) = 2c$; $2c = 2$, $c = 1$.

Таким образом, в точке $C(1;1)$ касательная параллельна хорде *AB*.

8. Правило Лопиталя.

Пусть при нахождении предела отношения двух функций $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Тогда имеет место формула $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, которую называют ***правилом Лопиталя.***

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2+15x}{\sin 5x}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, значит, можно воспользоваться правилом Лопиталя. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+15x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(4x^2+15x\right)'}{\left(\sin 5x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8x+15}{5\cos 5x}=\frac{15}{5}=3.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+5}{e^{3x}}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. По правилу Лопиталя получим:

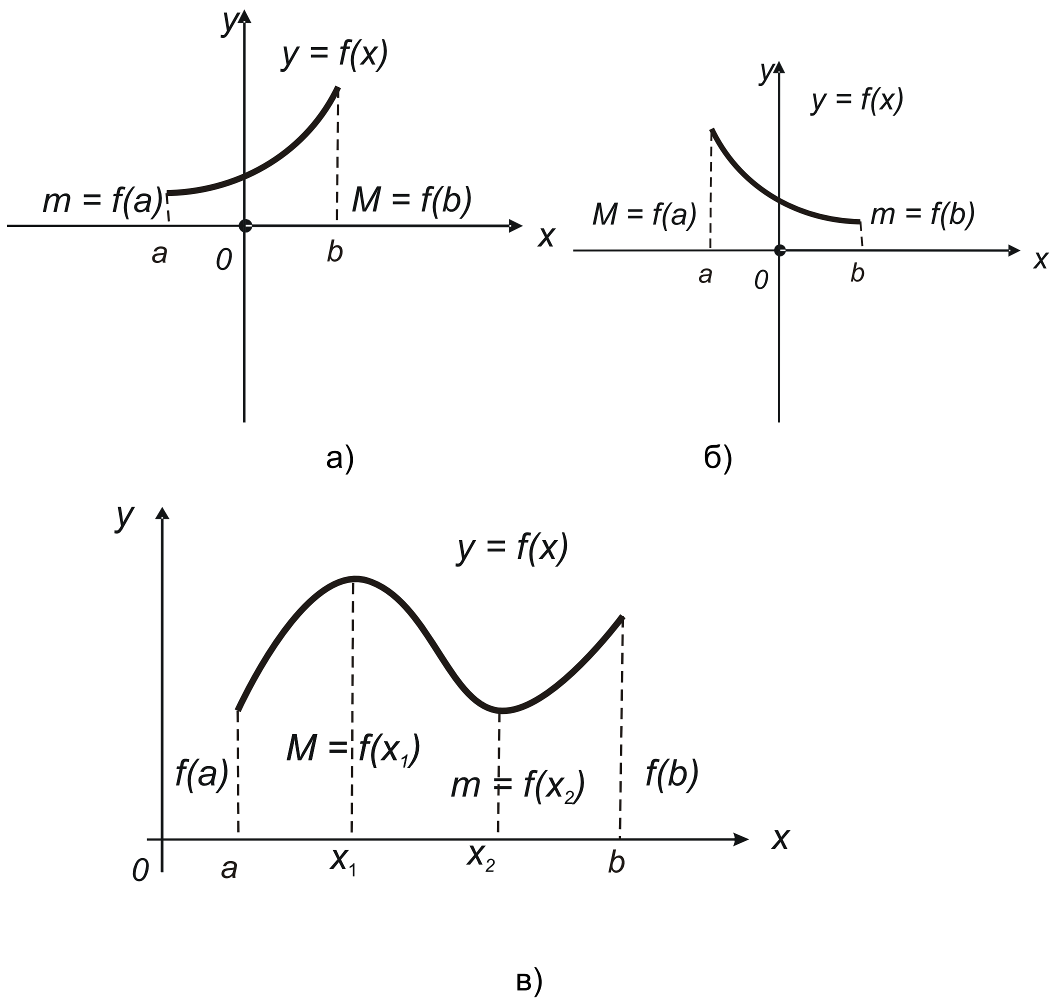
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x+5)'}{\left(e^{3x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{3e^{3x}}=0,$$

поскольку знаменатель стремится к $+\infty$.

Неопределенности $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$ надо предварительно преобразовать к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а затем применить правило Лопиталя.

9. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений (либо во внутренней точке интервала (a, b), либо на концах отрезка $[a, b]$).



Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$, надо:

1. найти критические точки функции на интервале (a, b);

2. вычислить значения функции в этих критических точках и на концах отрезка;

3. из вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Если непрерывная функция на промежутке имеет только одну точку экстремума, и это точка максимума (минимума), то в ней функция и принимает свое наибольшее (наименьшее) значение.

В случае, если исследуемая функция имеет на отрезке $[a, b]$ точки разрыва или же задана на бесконечном интервале, то необходимо дополнительно рассмотреть ее поведение в окрестности точек разрыва и при $x \to \pm\infty$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач.

Пример. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение.

Поступаем в соответствии с данными рекомендациями.

1. Находим $y' = 12x^3 - 48x^2 + 36x$. Так как область определения производной $D(y') = (-\infty; +\infty)$, то критическими могут быть только те точки, где $y' = 0$, т.е. где

$12x^3 - 48x^2 + 36x = 0,$

$12x\,(x^2 - 4x + 3) = 0,$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3.$

2. Отрезку $[-1; 2]$ принадлежат только точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Точка $x_3 = 3 \notin [-1; 2]$.

3. Находим значения функции $y = f(x)$ в критических точках: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и на концах отрезка, т.е. в точках $x = -1$, $x = 2$:

$f(0) = (3x^4 - 16x^3 + 18x^2)|_{x=0} = 0,$

$f(1) = (3x^4 - 16x^3 + 18x^2)|_{x=1} = 5,$

$f(-1) = (3x^4 - 16x^3 + 18x^2)|_{x=-1} = 37$ — наибольшее значение,

$f(2) = (3x^4 - 16x^3 + 18x^2)|_{x=2} = -8$ — наименьшее значение.

4. Таким образом, $m = -8$, а $M = 37$.