Разложение функций в степенные ряды.
Ряды Тейлора и Маклорена.

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-x_0|<R$, то есть

$$x_0-R<x<x_0+R$$

может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора (остаток ряда),

$$c=x_0+\Theta(x-x_0),\ 0<\Theta<1.$$

При $x_0=0$ получим ряд Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Теорема 1

Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ удовлетворял условию:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Теорема 2 (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора)

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, при любом n выполняется неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<M,$$

где M — положительная постоянная, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

и $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Рассмотрим разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций.

1. $f(x) = \sin x$.

Данная функция имеет производные любого порядка, причем

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1, \ n = 0, 1, 2, \dots, \ x \in (-\infty; +\infty),$$

$$f(x) = \sin x, \ f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \ f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ f''(0) = 1,$$

$$f'''(x) = -\cos x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ f'''(0) = -1, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Ряд будет иметь вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \ -\infty < x < +\infty. \quad (3.6)$$

Разложение остальных элементарных функций выполняете самостоятельно (*Конспект №16*)

Пример. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-6)$.

Решение

Разложить в ряд Тейлора — это значит:

1. Составить формально этот ряд.
2. Найти его область сходимости.
3. Доказать, что для всех x из области сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

1. Вычислим производные

$$y=\frac{1}{x-5},\ y(6)=1,$$

$$y'=-\frac{1}{(x-5)^2},\ y'(6)=-1,$$

$$y''=\frac{2}{(x-5)^3},\ y''(6)=2!,$$

$$y'''=-\frac{2\cdot 3}{(x-5)^4},\ y'''(6)=-3!,$$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-5)^{n+1}},\ y^{(n)}(6)=(-1)^n n!.$$

Составим формально ряд

$$\frac{1}{x-5}=1+\frac{-1}{1!}(x-6)+\frac{2!}{2!}(x-6)^2-\frac{3!}{3!}(x-6)^3+\ldots=\sum_{n}^{\infty}(-1)^n(x-6)^n.$$

Остаточный член будет иметь вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1;$$

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(c-5)^{n+2}(n+1)!}(x-6)^{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}(x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}},\ c=6+\theta(x-6).$$

2. Найдем область сходимости ряда. Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-6)^{n+1}}{(x-6)^n}\right|=|x-6|<1,\quad 5<x<7.$$

Пусть $x=5$, тогда получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n=1+1+\ldots$, который расходится.

Пусть $x = 7$, тогда получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, который также расходится.

Область сходимости ряда: $x \in (5;7)$.

3. Докажем, что для всех x из области сходимости $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Для всех $x \in (5;7)$ имеем

$c - 5 > 1$, $|x-6| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{c-5}\left(\frac{x-6}{c-5}\right)^{n+1} = 0.$$

Итак,

$$\frac{1}{x-5} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x-6)^n, \quad x \in (5;7).$$

Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

1. Приближенное вычисление значения функции

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n — конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < |u_{n+1}|$, где u_{n+1} — первый из отброшенных членов ряда.

Приближенное вычисление значения функции в точке.

Пример. Вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение

Используем разложение функции $\cos x$ в ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty,$$

Переведем градусы в радианы

$$10^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}17453.$$

Подставим в разложение $\cos x$ вместо x число 0,17453, получим

$$\cos 10^\circ = 1 - \frac{(0{,}17453)^2}{2!} + \frac{(0{,}17453)^4}{4!} + \ldots.$$

Третий член ряда меньше заданной точности, то есть

$$\frac{(0{,}17453)^4}{4!} < 0{,}0001.$$

Так как ряд знакочередующийся, то

$$|R_2| < |u_3| < 0{,}0001,$$

то есть погрешность от отбрасывания всех членов ряда, начиная с третьего, меньше 0,0001.

Таким образом,

$$\cos 10^\circ \approx 1 - 0{,}01523;$$

$$\cos 10^\circ \approx 0{,}9848.$$

2. Приближенное вычисление определенных интегралов

(Конспект №16)

3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 y^2 - 1,\ y(0) = 1,$$

используя метод последовательного дифференцирования.

Решение

Решение будем искать в виде

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Вычислим значения производных $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, …:

$$y'(x) = x^2y^2 - 1,\ y'(0) = -1;$$

$$y''(x) = 2xy^2 + 2x^2yy',\ y''(0) = 0;$$

$$y''' = 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2(yy')' =$$

$$= 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2y'^2 + 2x^2yy'',\ y'''(0) = 2,\ \ldots .$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим

$$y(x) = 1 + (-x) + \frac{1}{3}x^3 - \ldots,$$

Ряды Фурье

При изучении периодических процессов, то есть процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются, целесообразнее разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в тригонометрический ряд.

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (5.1)$$

называется ***тригонометрическим рядом***.

Действительные числа $a_0,\ a_n,\ b_n\ (n = 1,\ 2,\ \ldots)$ называются ***коэффициентами*** тригонометрического ряда.

Запишем формулы, которые в дальнейшем понадобятся.

Пусть m и n являются целыми положительными числами, тогда имеют место следующие формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ (n \neq 0), \\ x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi\ (n = 0); \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \text{ при любом } n; \tag{5.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n), \\ \pi, & (m = n); \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) dx = 0; \tag{5.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n), \\ \pi, & (m = n). \end{cases} \tag{5.6}$$

Формулы (5.2)- (5.6) показывают, что семейство функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

обладают ***свойством ортогональности***: интеграл от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину 2π, равен нулю.

Формулы (5.2)–(5.6) справедливы и в случае, когда область интегрирования есть отрезок $[0; 2\pi]$.

Пусть функция $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{5.7}$$

Так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π, то ее можно рассматривать в любом промежутке длины 2π. В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi; \pi]$ (можно взять отрезок $[0; 2\pi]$). Предположим, что ряд (5.7) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Найдем коэффициенты a_n и b_n, проинтегрировав обе части равенства (5.7) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx\right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \pi a_0.$$

Итак,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \qquad (5.8)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ n = 1,2,3,\ldots. \qquad (5.9)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,\ n = 1,2,3,\ldots. \qquad (5.10)$$

Тригонометрический ряд (5.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5.8)–(5.10), называется ***рядом Фурье*** функции $f(x)$.

Числа a_0, a_n, $b_n (n = 1,2,\ldots)$, определяемые по формулам (5.8)–(5.10), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$.

Для функции $f(x)$ интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ записывают:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и говорят: функции $f(x)$ соответствует (поставлен в соответствие) ее ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим $S(x)$.

Рассмотрим условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой функцию $f(x)$.

Теорема Дирихле

Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;
2. $f(x)$ кусочно-монотонна, то есть монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x)=f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна:

$$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2},$$

то есть равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Условия 1 и 2 *Теоремы Дирихле* называются ***условиями Дирихле***.

Итак, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет место разложение (5.7):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (5.8) - (5.10). Равенство (5.7) может нарушаться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi;\pi]$.

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

Пример. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{\pi}, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.1).

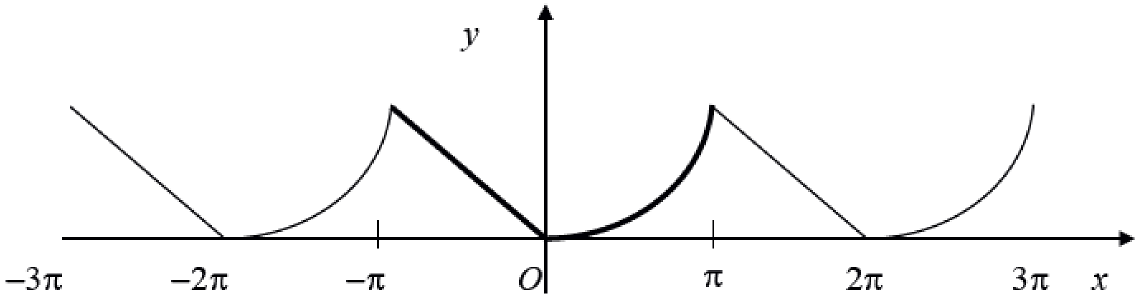

Рис. 5.1

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -xdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}dx = \frac{5}{6}\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\cos nxdx + \int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\cos nxdx\right) = \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\sin nxdx + \int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nxdx\right) = \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi^2 n^3},$$

$$b_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ четное,} \\ -\dfrac{4}{\pi^2 n^3}, \text{ если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx - \frac{4}{\pi^2(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\right).$$

Разложение в ряды Фурье чётных и нечётных функций

Если разлагаемая в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция $f(x)$ является четной (или нечетной), то вычисление коэффициентов Фурье упрощается.

Пусть функция $f(x)$ четная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \qquad (5.11)$$

где

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx, \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n\in\mathbb{N}. \qquad (5.12)$$

Пусть функция $f(x)$ нечетная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \qquad (5.13)$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n\in\mathbb{N}. \qquad (5.14)$$

Ряды (5.11) и (5.13) называются ***неполными*** тригонометрическими рядами, или рядами ***по косинусам*** и ***по синусам*** соответственно.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=x,\ \ -\pi<x<\pi.$$

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.2).

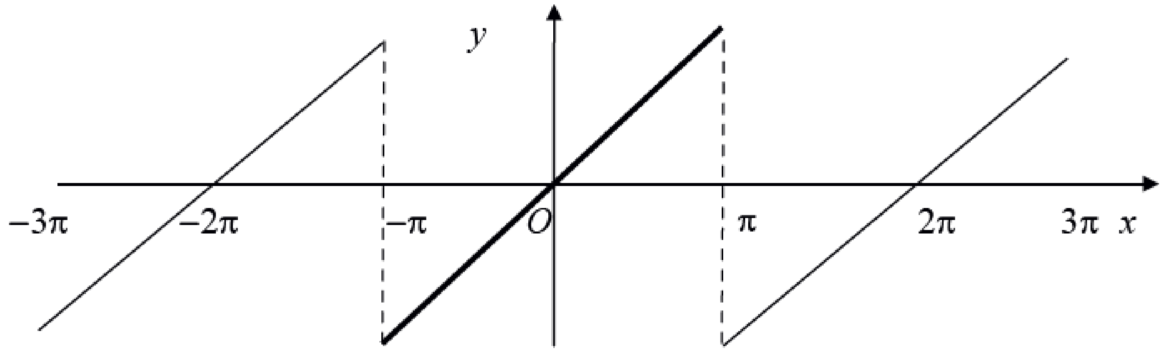

Рис. 5.2

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. На интервале $(-\pi;\pi)$ функция $f(x)=x$ нечетная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только синусы, а при косинусах все коэффициенты $a_n = 0$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Вычислим коэффициенты b_n по формуле (5.14)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},$$

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$

В интервале $(-\pi;\pi)$ это равенство имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$, то есть в данном случае в всех внутренних точках интервала $(-\pi;\pi)$. Вне интервала этот ряд изображает периодическое продолжение рассматриваемой функции.

В точках же разрыва, которыми являются точки $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, ..., сумма ряда равна среднему арифметическому ее левостороннего и правостороннего пределов в этих точках.

Найдем эти пределы

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \lim_{x\to\pi-0} x = \pi,\ \lim_{x\to-\pi+0} f(x) = \lim_{x\to-\pi+0} x = -\pi.$$

Среднее арифметическое этих пределов

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} = \frac{\pi-\pi}{2} = 0.$$

Во всех точках разрыва этой функции получим то же самое.

Из полученного разложения при $x = \dfrac{\pi}{2}$ можно получить интересную сумму

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right),$$

Отсюда следует, что сумма ряда

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

Разложение в ряды Фурье функций с произвольным периодом

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l;l]$, имеет период $2l$ $(f(x+2l)=f(x)$, где l — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделаем подстановку $x=\frac{l}{\pi}t$. Преобразуем функцию $f(x)$ в функцию $\varphi(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi;\pi]$ и имеет период $T=2\pi$.

Разложение функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет вид

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt,\ n=0,1,2,\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt,\ n=1,2,3,\ldots.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}),\qquad(5.15)$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ n=0,1,2,\ldots,\qquad(5.16)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ n=1,2,3,\ldots.\qquad(5.17)$$

Ряд (5.15) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (5.16), (5.17), называется ***рядом Фурье*** для ***функции*** $f(x)$ с периодом $T=2l$.

Замечание

Если функция $f(x)$ на отрезке $[-l;l]$ четная, то ее ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}, \tag{5.18}$$

где

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ n\in\mathbb{N}; \tag{5.19}$$

если функция $f(x)$нечетная, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{5.20}$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ n\in\mathbb{N}. \tag{5.21}$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0,\\ x, & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.4).

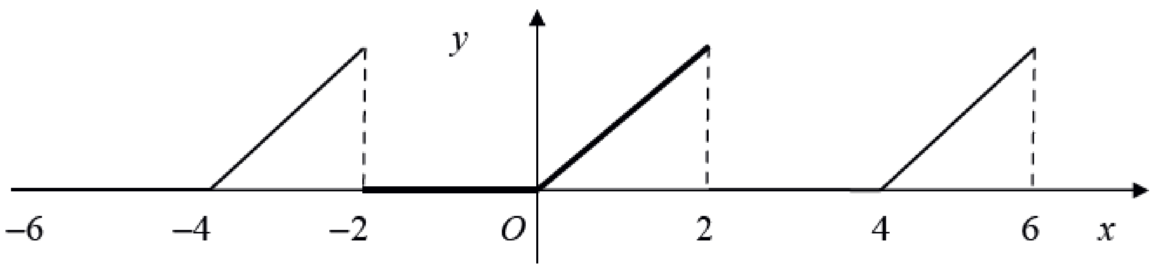

Рис. 5.4

Найдем коэффициенты ряда Фурье. Коэффициенты a_n вычислим по формуле (5.16)

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\cdot\cos\frac{\pi nx}{2}dx+\int_{0}^{2} x\cdot\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right),\ n=1,2,3,\ldots$$

Вычислим отдельно a_0.

$$a_0=1.$$

Коэффициенты b_n вычислим по формуле (5.17)

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\int_{0}^{2} x\cdot\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}(-1)^n.$$

Подставим найденные значения коэффициентов a_0, a_n, b_n в ряд (5.15), учитывая, что $l=2$, получим

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi nx}{2}}{2}.$$

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Пусть функция $f(x)$ непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x. Но, непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье на любом конечном промежутке $[a;b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка $[a;b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2l = |b - a|$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-l \le x \le l$.

Разлагаем функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a;b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функцией $f(x)$. Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными функциями.

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0;l]$. (Это частный случай: начало координат перенесено в точку $x = a$ отрезка $[a;b]$; область определения функции $f(x)$ будет иметь вид $[0;l]$, где $l = |b - a|$.)

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l;0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$. Разложив в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ полученную таким образом периодическую функцию $f_1(x)$, получим искомый ряд функции $f(x)$ при $x \in [0;l]$.