Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна на интервале (a, b) и в некоторой точке x_0 этого интервала принимает свое наибольшее или наименьшее значение. Если в точке x_0 существует производная этой функции, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f(x_0) = M$ – наибольшее значение функции на (a, b). Покажем, что $f'(x_0) = 0$. По определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как $f(x_0)$ – наибольшее значение, то при любом знаке Δx имеем $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) > 0$.

Отсюда, если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, а поэтому $f'(x_0) \geq 0$.

Если $\Delta x < 0$, то $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$, поэтому $f'(x_0) \leq 0$. Так как $f'(x_0)$ – определенное число, то получаем, что $f'(x_0) = 0$. *Теорема доказана*.

Геометрически теорему Ферма поясняет рис. 2.7. В точке x_1 функция принимает наибольшее значение M, а в точке x_2 – наименьшее значение m, касательные к графику $y = f(x)$ в точках A и B параллельны оси Ox, так как $f'(x_1) = 0$ и $f'(x_2) = 0$.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в каждой внутренней точке и $f(a) = f(b)$, то существует, по крайней мере, одна внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, что $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Так как функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и своего наименьшего значения m.

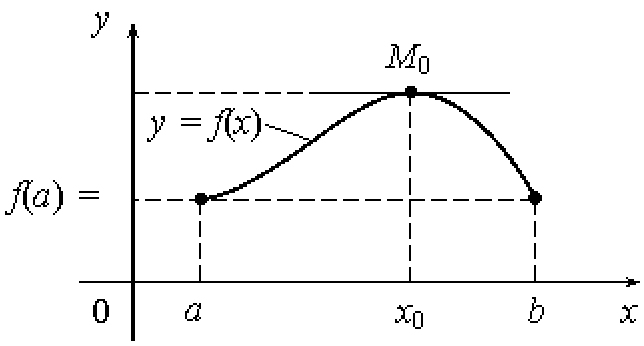

Рис. 2.7

Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$, а потому $f'(x) = 0$ для любого $x \in (a, b)$.

Рассмотрим случай, когда $M \neq m$. Так как $f(a) = f(b)$, то либо $M \neq f(a)$, либо $m \neq f(a)$, тогда либо наибольшее значение M, либо наименьшее значение m достигается во внутренней точке x_0 интервала (a, b). Следовательно, по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. *Теорема доказана*.

Геометрически теорема Ролля утверждает (рис. 2.8), что если функция непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b), имеет на концах отрезка $[a, b]$ одинаковые значения, то найдется точка $x_0 \in (a, b)$, для которой касательная к графику параллельна оси абсцисс.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), то найдется хотя бы одна внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (2.14)$$

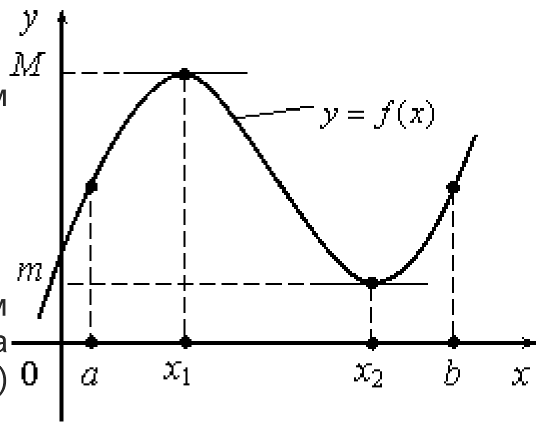

Рис. 2.8

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

и покажем, что она удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, так как на $[a, b]$ непрерывны функции $f(x)$ Производная

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (2.15)$$

существует в интервале (a, b). Вычислим $F(x)$ на концах отрезка $[a, b]$:

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a),$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$$

Значит, $F(a) = F(b)$. По теореме Ролля найдется точка $x_0 \in (a, b)$, такая, что $F'(x_0) = 0$.

Подставив x_0 в равенство (2.15) получи $F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, откуда $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема доказана.

Поясним теорему Лагранжа геометрически (рис. 2.9).

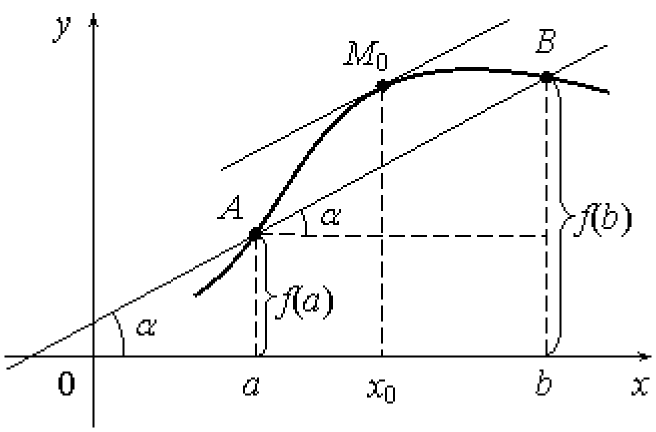

Рис. 2.9

Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент хорды AB, соединяющей точки $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, который равен $\mathrm{tg}\,a$. $f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику $y = f(x)$, проведенной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, и $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,a$. Теорема Лагранжа утверждает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка M_0, в которой касательная к графику параллельна хорде AB.

Заметим, что формулу (2.14) можно записать в виде:

$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$.   (2.16)

Обозначив $x_0 = c$, $a = x_0$, $b - a = \Delta x$, $b = x_0 + \Delta x$, из формулы (2.16) получаем формулу:

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\,\Delta x$.   (2.17)

Формулы (2.16), (2.17) называют формулами конечных приращений, а теорему Лагранжа – теоремой о конечных приращениях. При этом теорема Лагранжа переформулируется следующим образом: ***приращение дифференцируемой функции на отрезке равно произведению длины отрезка на значение производной этой функции в некоторой внутренней точке отрезка***.

Получим следствие из теоремы Лагранжа. Известно, что производная постоянной функции равна нулю. Докажем обратное утверждение.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и во всех внутренних точках этого отрезка $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$.
Доказательство. Пусть x – произвольная точка отрезка $[a, b]$, не совпадающая с a, тогда по формуле (2.16) конечных приращений применительно к отрезку $[a, x]$ имеем: $f(x) - f(a) = f'(x_0)(x - a)$, где x_0 принадлежит интервалу (a, x). Но $f'(x_0) = 0$, поэтому $f(x) = f(a)$.
Следовательно, $f(x)$ – постоянна на $[a, b]$.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), причем $\varphi'(x) \neq 0$ для любой точки x из интервала (a, b). Тогда существует внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Доказательство. Отметим, что $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, так как в противном случае по теореме Ролля $\varphi'(x) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$.

Введем вспомогательную функцию: $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi(x)$ и покажем, что $F(x)$ удовлетворяет теореме Ролля. Очевидно, что $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x)$, и на концах отрезка $[a, b]$ имеет равные значения: $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(a)$.
Следовательно, по теореме Ролля найдется точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $F'(x_0) = 0$:

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x_0) = 0.$$

Отсюда $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$.   *Теорема доказана*.