ЛЕКЦИЯ
(конспект)

Бесконечно малые и бесконечно большие величины

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Бесконечно малые величины. Свойства бесконечно-малых. Сравнение бесконечно-малых. Принцип замены эквивалентных бесконечно малых.

2. Бесконечно большие величины. Свойства бесконечно больших величин. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами. Теорема о связи функции с ее пределом.

1. Бесконечно малые величины

- Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой величиной*** при $x \to x_0$, если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 .$$

Можно дать развернутое определение бесконечно малой величины.

- Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой величиной*** при $x \to x_0$, если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta ,$$

выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon .$$

С помощью логических символов это определение запишется:

$$(\alpha(x) \text{ — б.м. при } x \to x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ (\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)\ |\alpha(x)| < \varepsilon .$$

Аналогично можно сформулировать определение бесконечно малой величины при $x \to \infty$.

Например, функции $y = \ln x$ при $x \to 1$ и $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$ есть бесконечно малые величины, т.к. их пределы равны нулю.

Свойства бесконечно малых величин.

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.

Сравнение бесконечно малых величин.

Для сравнения двух бесконечно малых величин $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в окрестности точки x_0 вычисляют предел их отношения при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то бесконечно малая величина $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается следующим образом: $\alpha(x) = 0(\beta(x))$ (читается «$\alpha(x)$ есть *о* малое от $\beta(x)$»).

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то бесконечно малая величина $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более низкого порядка малости***, чем $\beta(x)$, т.е. $\beta(x) = 0(\alpha(x))$.

3) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где $C = const$, то бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются ***бесконечно малыми одного порядка малости***.

4) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***, что обозначают $\alpha(x)\ \ \beta(x)$.

Теорема (принцип замены эквивалентных бесконечно малых):

Предел отношения двух бесконечно малых величин равен пределу отношения им эквивалентных.

То есть если $\alpha(x)\ \ \alpha_1(x)$, $\beta(x)\ \ \beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

2. Бесконечно большие величины

- Функция $\beta(x)$ называется ***бесконечно большой величиной*** при $x \to x_0$, если ее предел равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty .$$

Можно дать развернутое определение бесконечно большой величины.

- Функция $\beta(x)$ называется ***бесконечно большой величиной*** при $x \to x_0$, если для любого, сколь угодно большого положительного числа $M > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от *M*, $\delta = \delta(M)$), что для всех *x*, не равных x_0 и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta ,$$

выполняется неравенство $|\beta(x)| > M$.

С помощью логических символов это определение запишется

$$(\beta(x) \text{— б.б. при } x \to x_0) \Leftrightarrow (\forall M > 0)\ (\exists \delta = \delta(M) > 0)\ (\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)\ |\beta(x)| > M .$$

Аналогично можно сформулировать определения бесконечно большой величины при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$

Например, функции $y = \ln x$ при $x \to +\infty$ и $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$ есть бесконечно большие величины.

Свойства бесконечно больших величин.

1. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.
2. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

Теорема: Функция, обратная к бесконечно малой, есть бесконечно большая величина, и наоборот.

То есть если $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая при $x \to x_0$. И наоборот, если $\beta(x)$ — бесконечно большая величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\beta(x)}$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Например, функция $y = tgx$ — бесконечно малая при $x \to 0$, а функция $y = \dfrac{1}{tgx} = ctgx$ — бесконечно большая при $x \to 0$.

***Теорема о связи функции с ее пределом*:** Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ предел, равный *A*, то ее можно представить в виде суммы этого числа *A* и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to x_0$

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Верна и ***обратная*** теорема: Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа *A* и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, то число *A* есть предел этой функции при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.