Рассмотрите решения типовых задач из ИДЗ «Ряды» (материалы взяты из методического пособия) и решите аналогичные задачи.

<u>Примеры.</u>

Задание № 1.

Для данного ряда

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\ldots$$

записать общий член и с его помощью, если возможно, выяснить вопрос о сходимости (расходимости) ряда.

Решение.

Найдем формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\ldots u_n+\ldots.$$

Числители членов ряда образуют числовую последовательность, состоящую из натуральных чисел:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots .$$

Знаменатели членов ряда образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1=6$ и разностью $d=1$:

$$6, 7, 8, \ldots, a_n, \ldots$$

n-й член арифметической прогрессии находится по формуле:

$$a_n=a_1+d(n-1),$$

Поэтому

$$a_n=6+1\cdot(n-1)=6+n-1=n+5.$$

Таким образом, общий член ряда имеет вид

$$u_n=\frac{n}{n+5}.$$

Итак,

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{n+5}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+5}.$$

Проверим, выполняется ли необходимый признак сходимости, состоящий в том, что если ряд сходится, то предел его общего члена при $n\to\infty$ равен нулю.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{5}{n}}=1\neq 0.$$

Необходимый признак не выполняется, значит, ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+5}$ расходится.

Задание №2.

Для данного ряда записать три его первых члена и найти сумму ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{40n^2-28n-45}$

Решение.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\ldots.$

Это геометрический ряд, его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $a_1=\frac{1}{4}$ и знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Этот ряд сходится.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии находится по формуле:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Тогда сумма данного ряда

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $S = \frac{1}{2}$.

2) По формуле общего члена ряда $a_n = \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}$ найдем несколько первых членов ряда:

при $n = 1$ $a_1 = \frac{14}{49 \cdot 1^2 - 28 \cdot 1 - 45} = \frac{14}{-24} = -\frac{7}{12}$,

при $n = 2$ $a_2 = \frac{14}{49 \cdot 2^2 - 28 \cdot 2 - 45} = \frac{14}{95}$,

при $n = 3$ $a_3 = \frac{14}{49 \cdot 3^2 - 28 \cdot 3 - 45} = \frac{14}{312} = \frac{7}{156}$.

Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{40n^2 - 28n - 45} = -\frac{7}{12} + \frac{14}{95} + \frac{7}{156} + \ldots.$$

Преобразуем формулу общего члена ряда $a_n = \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}$, разложив знаменатель $49n^2 - 28n - 45$ на множители:

$$49n^2 - 28n - 45 = 0;$$

$$D = 14^2 + 45 \cdot 49 = 49\ \ 4 + 45\ \ = 49^2;$$

$$n_{1,2} = \frac{14 \pm 49}{49};$$

$$n_1 = \frac{63}{49} = \frac{9}{7}, \quad n_2 = -\frac{35}{49} = -\frac{5}{7}.$$

Тогда

$$49n^2-28n-45=49\left(n-\frac{9}{7}\right)\left(n+\frac{5}{7}\right)=\ 7n-9\quad 7n+5\ .$$

Итак,

$$a_n=\frac{14}{7n-9\quad 7n+5}.$$

Разложим полученную дробь на сумму простых дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$a_n=\frac{14}{7n-9\quad 7n+5}=\frac{A}{7n-9}+\frac{B}{7n+5}=\frac{A\ \ 7n+5\ +B\ \ 7n-9}{7n-9\quad 7n+5}.$$

Записываем равенство числителей:

$$14=A\ \ 7n+5\ +B\ \ 7n-9\ ;$$

$$14=7An+5A+7Bn-9B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n в левой и правой частях полученного равенства:

$$\begin{cases}7A+7B=0, \\ 5A-9B=14;\end{cases}\left|\begin{matrix}n\\ n^0\end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases}A=-B, \\ -14B=14;\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=1; \\ B=-1.\end{cases}$$

Тогда общий член ряда примет вид

$$a_n=\frac{A}{7n-9}+\frac{B}{7n+5}=\frac{1}{7n-9}-\frac{1}{7n+5}.$$

Используя его, выпишем первые n членов ряда:

$$a_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{12},$$

$$a_2=\frac{1}{5}-\frac{1}{19},$$

$$a_3 = \frac{1}{12} - \frac{1}{26},$$

$$a_4 = \frac{1}{19} - \frac{1}{32},$$

$$a_5 = \frac{1}{26} - \frac{1}{40}, \dots ,$$

$$a_{n-3} = \frac{1}{7n-30} - \frac{1}{7n-16},$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{7n-23} - \frac{1}{7n-9},$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{7n-16} - \frac{1}{7n-2},$$

$$a_n = \frac{1}{7n-9} - \frac{1}{7n+5}.$$

Найдем сумму первых n членов ряда (n-ю частичную сумму) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$.

Получим:

$$S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5}.$$

Найдем предел n-й частичной суммы ряда при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

Так как предел n-й частичной суммы при $n \to \infty$ существует и конечен, то ряд сходится и его сумма равна значению этого предела, то есть

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 0,3.$$

Ответ: $S = 0,3$.

Задачи.

1) Для заданного ряда записать общий член и с его помощью, если возможно, выяснить вопрос о сходимости (расходимости) ряда.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$$

2) Для данного ряда записать три его первых члена и найти сумму ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^{2}-3n-2}$

3) Исследовать на сходимость знакоположительные числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{n+1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{2}+3}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{n}$