ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Производная по направлению. Градиент

1. Повторите теоретический материал:

Учебник: Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; под ред. Н.Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2013. – С. 485–487.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$.

Задан некоторый вектор $\bar{l} = (l_x; l_y)$.

Тогда $|\bar{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ — длина вектора.

Направляющие косинусы этого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\bar{l}|}, \ \cos\beta = \frac{l_y}{|\bar{l}|}.$$

При перемещении точки $M(x, y)$ в данном направлении в точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ функция z получит приращение $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, называемое ***приращением функции z в направлении l.***

Производной z'_l ***по направлению l*** функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl, когда последняя стремится к нулю, то есть

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Производная z'_l характеризует скорость изменения функции в направлении l.

Производная z'_l находится по формуле:

$$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta .$$

Градиентом $\overline{gradz}$ функции $z = f(x, y)$ называется вектор с координатами $(z'_x; z'_y)$.

Градиент функции $\overline{gradz}$ в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку. Это позволяет с определенной погрешностью строить линии уровня.

2. Повторите решение типовых задач, рассмотренных на лекциях:

Пример №1. Найти производную функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ в точке $M(2;5)$ в направлении вектора $\bar{l} = (-3;4)$.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6xy - 3x^2,\ z'_y = 3x^2 - 4y^3.$$

Найдем их значение в точке $M(2;5)$:

$$z'_x(M) = 6 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2^2 = 48,$$

$$z'_y(M) = 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 5^3 = -476.$$

Найдем длину вектора $\bar{l} = (-3;4)$:

$$\left|\bar{l}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Найдем направляющие косинусы вектора:

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5},\ \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

Тогда производная z'_l в точке $M(2;5)$:

$$z'_l(M) = 48 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + (-476) \cdot \frac{4}{5} = -409{,}6.$$

Пример №2. Найти градиент функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ в точке $M(2;5)$.

Решение.

Так как $z'_x(M) = 48$, $z'_y(M) = -476$ (см. пример 9.11), то

$$\overline{grad} z(M) = (48;-476)$$

или

$$\overline{grad} z(M) = 48\bar{i} - 476\bar{j}.$$

3. Выполните письменно задания:

Учебник:

1) 9.42 (С. 514);

2) 9.43 (С. 514).

Осуществите самоконтроль, используя образцы решения.

Учебно-методическое пособие:

1) Стр. 60–61, пример выполнения задания №3 Контрольной работы №2.

4. Домашнее задание:

1) Контрольная работа №2: задание №3 по вариантам (стр. 57).