МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра высшей математики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

2-е издание, исправленное

Для контактной и самостоятельной работы студентов 1 курса, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика, очной и очно-заочной форм обучения

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2021

УДК 512(076)
ББК 22.1
Л 59

Составители: сотрудники кафедры высшей математики Костромской ГСХА канд. филос. наук, доцент кафедры *Л.Б. Рыбина*, канд. экон. наук, доцент кафедры *А.Е. Березкина.*

Рецензент: д-р пед. наук, доцент, доцент кафедры физики и автоматики Костромской ГСХА *И.А. Мамаева.*

Рекомендовано методической комиссией архитектурно-строительного факультета в качестве учебно-методического пособия для контактной и самостоятельной работы студентов 1 курса, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика, очной и очно-заочной форм обучения

Л 59 **Линейная алгебра :** учебно-методическое пособие / сост. Л.Б. Рыбина, А.Е. Березкина. — 2-е изд., исправл. — Караваево : Костромская ГСХА, 2021. — 45 с. ; 20 см. — 100 экз. — Текст непосредственный.

Данное пособие предназначено для студентов 1-го курса, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика.

Издание содержит программу дисциплины «Линейная алгебра», методические указания к организации самостоятельной работы студентов, рекомендуемую литературу, вопросы для самопроверки, контрольные вопросы для проведения аттестации по итогам освоения дисциплины, общие требования к выполнению контрольных и расчетно-графических работ, задания для контрольных и расчетно-графических работ, методические указания к выполнению контрольных и расчетно-графических работ.

УДК 512(076)
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы предназначено для студентов 1 курса, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика».

Издание содержит программу дисциплины, общие требования по выполнению контрольных работ, задачи для контрольных и расчетно-графических работ, вопросы для самопроверки, методические указания по выполнению контрольных и расчетно-графических работ, рекомендуемую литературу.

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра» являются:

1) формирование личности студентов, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению;

2) обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования экономических процессов и явлений, при поиске оптимальных решений и выборе наилучших способов реализации этих решений.

В результате изучения базовой части цикла дисциплины «Линейная алгебра» обучающийся должен:

знать: основы линейной алгебры, необходимые для решения экономических задач;

уметь: применять методы теоретического исследования для решения экономических задач;

владеть: навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

1. Содержание учебной дисциплины «Линейная алгебра»

1. Матрицы. Действия над матрицами.
2. Определители 2-го, 3-го и *n*-го порядков.
3. Обратная матрица.
4. Ранг матрицы.
5. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, матричным методом и методом Гаусса.
6. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.
7. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Геометрическая интерпретация множества решений систем линейных уравнений и систем линейных неравенств.
9. Векторы на плоскости и в пространстве.
10. Понятия *n*-мерного вектора и векторного пространства. Евклидово пространство.
11. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и размерность векторного пространства. Переход к новому базису.
12. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
13. Квадратичные формы.

2. Рекомендуемая литература

2.1. Основная литература

1. Кремер, Н.Ш. Математика для экономичстов: от Арифметики до эконометрики [Текст] :учеб.-справоч. Пособие: учеб. Пособие для вузов. – Москва : Высшее образование, 2007. – 646с.

2. Наливайко, Л.В. Математика для экономистов. Сборник заданий [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 432 с.

2.2. Дополнительная литература

1.Боревич З.И. Определители и матрицы [Текст] : учебное пособие для вузов / З.И. Боревич. — 4-е изд., стер. — СПб : Лань, 2004. — 192 с.

2. Демидович В.П. Краткий курс высшей математики [Текст] : учеб. пособие для вузов / В.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. — М : АСТ : Астрель, 2008. — 654 с.

3. Математика. Элементы линейной алгебры : в 2 ч. Ч. 1. : учебно-методическое пособие по математике для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения / сост. Н.М Воробьева, Л.Б. Рыбина. — Кострома : КГСХА, 2010. — 58 с.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике : Учеб. пособие для втузов / В.П. Минорский. — 14-е изд., испр. — М : Физико-математическая литература, 2003. — 336 с.

5. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики : Учебник для вузов [Текст] / И.П. Натансон. — 4-е изд., стереотип.; 6-е изд., стереотип. — СПб : Лань, 2001, 2003. — 736 с.

7. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс [Текст] : учебник / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. — 3-е изд., стер. — СПб : Лань, 2006. — 960 с.

8. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М.Я. Выгодский. — М : Астрель ; АСТ, 2002. — 992 с.

9. Высшая математика для экономических специальностей [Текст] : учебник и практикум для вузов. Ч. 1, 2 / Кремер Н.Ш., ред. — 2-е изд., перераб. и доп. — М : Высшее образование, 2008. — 893 с.

9. Высшая математика для экономистов [Текст] : Учебник для вузов / Кремер Н.Ш., ред. — 2-е изд., перераб. и доп. — М : ЮНИТИ, 2003. — 471 с.

10. Красс М.С. Математика для экономических специальностей [Текст]: Учебник для вузов / М.С. Красс. — 4-е изд., испр. — М : Дело, 2003. — 704 с.

11. Кундышева Е.С. Математика [Текст] : учебное пособие для экономистов / Е.С. Кундышева. — М : Данилов и К, 2005. — 536 с.

3. Общие требования к выполнению контрольных и расчетно-графических работ

Контрольные и расчетно-графическая работы должны выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяется по последней цифре шифра студента в зачетной книжке. При этом, если предпоследняя цифра шифра есть нечетное число (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для своего варианта следует взять из таблицы 1, если же четное число (0, 2, 4, 6, 8), то из таблицы 2.

Контрольные и расчетно-графическая работы должна быть выполнена в тетради в клетку, на внешней обложке которой должны быть указаны: факультет, курс, группа, дисциплина, направление подготовки, номер контрольной работы, фамилия, имя, отчество студента, шифр.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие.

Решение задач следует излагать подробно.

На каждой странице тетради необходимо оставить поля шириной 3—5 см для замечаний рецензента.

Допущенные к защите работы хранятся на кафедре высшей математики и выдаются студенту при собеседовании.

Незачтенные работы возвращаются студенту для исправления ошибок. Все исправления ошибок делаются в конце контрольной работы. Исправления в тексте прорецензированной работы не допускаются. Контрольные и расчетно-графическую работы с выполненными исправлениями следует направить на повторное рецензирование на кафедру.

После прохождения собеседования студент допускается к сдаче экзамена.

Таблица 1.

Номера задач для контрольных и расчетно-графической работ

Номер варианта	Контрольная и расчетно-графическая работы															
1	1	21	41	61	81	101	121	141	161	181	201	221	241	261	281	301
2	2	22	42	62	82	102	122	142	162	182	202	222	242	262	282	302
3	3	23	43	63	83	103	123	143	163	183	203	223	243	263	283	303
4	4	24	44	64	84	104	124	144	164	184	204	224	244	264	284	304
5	5	25	45	65	85	105	125	145	165	185	205	225	245	265	285	305
6	6	26	46	66	86	106	126	146	166	186	206	226	246	266	286	306
7	7	27	47	67	87	107	127	147	167	187	207	227	247	267	287	307
8	8	28	48	68	88	108	128	148	168	188	208	228	248	268	288	308
9	9	29	49	69	89	109	129	149	169	189	209	229	249	269	289	309
0	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290	310

Номера задач для контрольных и расчетно-графической работ *Таблица 2.*

Номер варианта	Контрольная и расчетно-графическая работы															
1	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191	211	231	251	271	291	311
2	12	32	52	72	92	112	132	152	172	192	212	232	252	272	292	312
3	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193	213	233	253	273	293	313
4	14	34	54	74	94	114	134	154	174	194	214	234	254	274	294	314
5	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195	215	235	255	275	295	315
6	16	36	56	76	96	116	136	156	176	196	216	236	256	276	296	316
7	17	37	57	77	97	117	137	157	177	197	217	237	257	277	297	317
8	18	38	58	78	98	118	138	158	178	198	218	238	258	278	298	318
9	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199	219	239	259	279	299	319

0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320

4. Методические указания к организации самостоятельной работы студентов

Изучение дисциплины «Линейная алгебра» начинается на установочной сессии, для студентов заочной формы обучения, где студенты слушают обзорные лекции, знакомятся с решением задач и получают рекомендации по самостоятельной работе.

После установочной сессии студенты приступают к самостоятельному изучению материала по указанной преподавателем литературе и выполняют контрольную работу № 1 «Элементы линейной алгебры».

Для студентов очной формы обучения изучение дисциплины «Линейная алгебра» начинается во втором семестре первого курса, где студенты слушают лекции, знакомятся с решением задач и получают рекомендации по аудиторной и самостоятельной работе, выполняют контрольные расчетно-графическую работы.

Следует помнить, что самостоятельная работа является основной формой обучения студента-заочника. Вначале рекомендуем изучить теоретический материал по источникам, приведенным в данном пособии, (можно использовать и другую литературу). При чтении учебника необходимо внимательно разобрать рассматриваемые примеры решения задач. Затем самостоятельно решите указанные в данном пособии задачи и ответьте на вопросы для самоконтроля знаний. Далее решите задачи контрольной работы. В данном пособии приведены примеры решения заданий контрольной работы.

Если в процессе работы у студента возникают вопросы по изучаемому материалу, то он может обратиться за консультацией к преподавателю кафедры высшей математики (ауд. 211, 212, 214). Для получения письменной консультации писать по адресу: 156530, Костромская обл., Костромской р-н, пос. Караваево, Учебный городок, Караваевская с/а, дом 34.

Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольной работы.

4.1. Матрицы. Действия над матрицами

Литература:

1) [3]: § 1.1, 1.2.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 1.6 — 1.20.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется матрицей?

2) Какие существуют виды матриц? Приведите примеры.

3) По какому правилу складываются матрицы? Какими свойствами обладает сложение матриц?

4) По какому правилу матрица умножается на число? Какими свойствами обладает умножение матрицы на число?

5) По какому правилу умножаются матрицы? Какими свойствами обладает умножение матриц?

6) Выполняется ли всегда коммутативный (переместительный) закон для умножения матриц?

7) Как квадратная матрица возводится в целую положительную степень?

8) Что называется полиномом (многочленом) от матрицы A?

9) Какая матрица называется корнем многочлена $P(x)$?

10) Какой многочлен называется аннулирующим многочленом для матрицы A?

11) Какая матрица называется транспонированной относительно матрицы A? Какими свойствами обладает операция транспонирования?

12) Что называют следом квадратной матрицы?

4.2. Определители 2-го, 3-го и n-го порядков

Литература:

1) [3]: § 1.3, 1.4, 1.5.

Также можно использовать:

1) [2]: Глава XVII, § 1, 3, 4;

2) [6]: Глава VII, §1—3.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 1.21 — 1.27.

2) [5]: № 586 — 588, 592, 593, 597, 598.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется определителем 2-го порядка?

2) Что называется определителем 3-го порядка?

3) Что называется определителем *n*-го порядка?

4) Какими свойствами обладают определители?

5) Что называют минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы *n*-го порядка?

6) Что называют алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка?

7) Как определитель раскладывается по элементам строки (столбца)?

8) Как, используя свойства определителя и теорему о разложении определителя, можно вычислить определитель 4-го порядка?

4.3. Обратная матрица

Литература:

1) [3]: § 1.6.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 1.28 – 1.34.

Вопросы для самоконтроля:

1) Какая матрица называется обратной по отношению к квадратной матрице A?

2) Какая матрица называется невырожденной? Какая матрица называется вырожденной?

3) Каково необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы?

4) Какой алгоритм используется для нахождения обратной матрицы?

4.4. Ранг матрицы

Литература:

1) [3]: § 1.7.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 1.35 — 1.41.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называют рангом матрицы?

2) В чем заключается метод окаймления миноров для вычисления ранга матрицы?

3) Какие преобразования относятся к элементарным преобразованиям матриц?

4) Какие матрицы называются эквивалентными?

5) В чем заключается метод элементарных преобразований для вычисления ранга матрицы?

6) В каком случае ранг матрицы равен нулю?

4.5. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, матричным методом и методом Гаусса

Литература:

1) [3]: § 2.1 — 2.4.

Также можно использовать:

1) [2]: Глава XVII, § 5, 7;

2) [6]: Глава VII, § 4 (п. 1).

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 2.1 — 2.8, 2.13 — 2.16.

Конспект № 1 «Модель Леонтьева — модель многоотраслевой экономики»

— Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 99–104

— Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 102. – № 2.8.

— Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Что из себя представляет модель многоотраслевой экономики В. Леонтьева?

2. В чем состоит основная задача межотраслевого баланса?

3-4. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 118. – № 2.66, 2.67.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называют системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными?

2) Что называют решением системы?

3) Какая система уравнений называется совместной, а какая — несовместной?

4) Какая система уравнений называется определенной, а какая — неопределенной?

5) Какая система уравнений называется однородной, а какая — неоднородной?

6) Какие преобразования систем линейных алгебраических уравнений относятся к элементарным?

7) Какой определитель называется определителем системы (или главным определителем системы)?

8) Запишите формулы Крамера? Как составляются входящие в них определители?

9) В чем заключается матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений?

10) В чем заключается метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений? В чем состоит прямой ход метода Гаусса? В чем состоит обратный ход метода Гаусса?

11) В каком случае в ходе решения системы методом Гаусса получается бесчисленное множество решений?

12) В каком случае в ходе решения системы методом Гаусса получается единственное решение?

13) В каком случае в ходе решения системы методом Гаусса получается пустое множество решений?

4.6. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Литература:

1) [2]: Глава XVII, § 6.

Также можно использовать [6]: Глава VII, § 4 (п. 2).

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 2.17.

2) [5]: № 615, 617, 619, 626 — 628.

Вопросы для самоконтроля:

1) Какая система уравнений называется однородной?

2) В каком случае однородная система линейных уравнений имеет только нулевое (или тривиальное) решение?

3) В каком случае однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решение?

4) Какими свойствами обладают решения однородной системы линейных уравнений?

5) Что называют фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений? Как она находится?

4.7. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Литература:

1) [3]: § 2.5.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 2.18 — 2.21.

Вопросы для самоконтроля:

1) Из каких элементов состоит матрица системы?

2) Из каких элементов состоит расширенная матрица системы?

3) Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

4) Как с помощью ранга матрицы системы можно выяснить о количестве решений совместной системы линейных уравнений?

4.8. Геометрическая интерпретация множества решений систем линейных уравнений и систем линейных неравенств.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [5]: № 71, 72, 132.

Вопросы для самоконтроля:

1) Каков геометрический смысл множества решений системы линейных уравнений?

2) Каков геометрический смысл решения линейного неравенства?

3) Каков геометрический смысл множества решений системы линейных неравенств?

4.9. Векторы на плоскости и в пространстве

Литература:

1) [2]: Глава XVIII, § 1—13.

Также можно использовать [6]: Глава VIII, § 1 (п. 1—5), § 2, § 3 (п. 1, 2), § 4.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [5]: № 394, 399, 405, 406.

Конспект № 2. «Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами»

— Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 124–130.

— Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 158. – № 3.14–3.17.

— Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какие линейные операции выполняются над векторами?

2. Изобразите два произвольных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, найдите векторы $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$; $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}$; $2\overline{a}$; $-\frac{1}{2}\overline{b}$.

3. Как выполняются линейные операции над векторами в координатной форме?

4. Даны векторы $\overline{a}=3\overline{i}-4\overline{j}+7\overline{k}$ и $\overline{b}=6\overline{i}-8\overline{j}+\overline{k}$. Найдите координаты вектора $\overline{c}=5\overline{a}-2\overline{b}$.

5. Как находится угол между двумя векторами, заданными своими координатами?

6. Даны векторы $\overline{a}=3\overline{i}-4\overline{j}+7\overline{k}$ и $\overline{b}=6\overline{i}-8\overline{j}+\overline{k}$. Найдите угол между ними.

7-11. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 162. – № 3.18, 3.23, 3.26, 3.28, 3.32.

Конспект № 3 «Линейная модель обмена»

— Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 155–158.

— Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 157. – Пример 3.13.

— Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Что собой представляет линейная модель обмена (модель международной торговли)?

2. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 177 – № 3.102.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется вектором?

2) Какие векторы называются коллинеарными?

3) Какие векторы называются компланарными?

4) Что называется координатами вектора в прямоугольной декартовой системе координат? Каков их геометрический смысл?

5) Как находятся координаты вектора по координатам его начала и конца.

6) Что называется модулем вектора? Как найти модуль вектора по его координатам?

7) Что называют направляющими косинусами вектора? Как их найти, зная координаты вектора?

8) Какие линейные операции выполняются над векторами?

9) Какими свойствами обладают линейные операции над векторами?

10) Как выполняются линейные операции над векторами в геометрической форме?

11) Как выполняются линейные операции над векторами в координатной форме?

12) Что называют скалярным произведением двух векторов?

13) Какими свойствами обладает скалярное произведение векторов?

14) Как выражается скалярное произведение векторов через их координаты?

15) Как с помощью скалярного произведения находится угол между векторами?

4.10. Понятия n-мерного вектора и векторного пространства. Евклидово пространство

Литература:

1) [4]: § 3.1, 3.4.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [4]: № 3.1 — 3.3, 3.13 — 3.15.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется n-мерным вектором?

2) Как определяются линейные операции над n-мерными векторами? Каким свойствам они удовлетворяют?

3) Что называется векторным пространством?

4) Что называется линейным пространством? Приведите примеры линейных пространств.

5) Что называют скалярным произведением двух n-мерных векторов?

6) Какими свойствами обладает скалярное произведение?

7) Какое линейное (векторное) пространство называется евклидовым пространством?

8) Что называется длиной (нормой) вектора в евклидовом пространстве?

9) Как находится угол между двумя векторами в евклидовом пространстве?

10) Какие два вектора в евклидовом пространстве называются ортогональными?

4.11. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и размерность векторного пространства. Переход к новому базису

Литература:

1) [4]: § 3.2, 3.3.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [4]: №. 3.4 — 3.12.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называют линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_{m-1}$ векторного пространства R?

2) Какие векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ векторного пространства R называются линейно зависимыми, а какие — линейно независимыми? Приведите примеры линейно зависимых векторов и линейно независимых векторов.

3) Какое линейное пространство называется n-мерным? Что называют размерностью пространства?

4) Что называют базисом пространства?

5) Что называют ортогональным базисом n-мерного евклидова пространства?

6) Что называют ортонормированным базисом n-мерного евклидова пространства?

7) Пусть в пространстве R имеется два базиса: старый $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$ и новый $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, ..., \boldsymbol{e}_n^*)$, причем каждый из векторов нового базиса

можно выразить в виде линейной комбинации векторов старого базиса. Что называют матрицей перехода от старого базиса к новому?

8) С помощью какой матрицы осуществляется обратный переход от нового базиса к старому?

9) Какова зависимость между координатами вектора в разных базисах?

4.12. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Литература:

1) [4]: § 3.5, 3.6.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [4]: №. 3.16 — 3.25.

Вопросы для самоконтроля:

1) Пусть даны два линейных пространства: R^n размерности n и R^m размерности m. Что называют оператором (преобразованием, отображением) $\boldsymbol{y} = \tilde{A}(\boldsymbol{x})$, действующим из R^n в R^m?

2) Какой оператор называется линейным?

3) Дайте понятие матрицы линейного оператора.

4) Как в матричной форме выражается связь между вектором $\boldsymbol{x}$ и его образом $\boldsymbol{y} = \tilde{A}(\boldsymbol{x})$, если матрицей линейного оператора является матрица A?

5) Что называется собственным вектором линейного оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A)?

6) Что называется собственным значением линейного оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A), соответствующим вектору $\boldsymbol{x}$?

7) Как составляется характеристический многочлен линейного оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A)?

8) Как составляется характеристическое уравнение линейного оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A)?

4.13. Квадратичные формы

Литература:

1) [4]: § 3.7.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [4]: № 3.26 — 3.30.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется квадратичной формой $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных?

2) Что называется матрицей квадратичной формы?

3) Как квадратичная форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ записывается в матрично-векторном виде?

4) Какая квадратичная форма называется канонической?

5) Пусть дана квадратичная форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$. Как находится матрица квадратичной формы, полученной из данной линейным преобразованием $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y}$, где C — матрица этого линейного преобразования?

6) Какая квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной?

7) Какая квадратичная форма называется знакопеременной?

8) Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной?

4.14. Аналитическая геометрия на плоскости
Конспект № 4 «Вывод уравнений гиперболы и параболы»

— Самостоятельно изучите материал по источнику: Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] . Ч. 1 : Тридцать шесть лекций / Д. Т. Письменный. - 4-е изд., 6-е изд. - М : Айрис-пресс, 2004, 2006, 2008, 2009, 2011. – С. 67–70.

— Рассмотрите образцы решения задач: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 229 – № 4.62 – 4.65.102.

— Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Выведите каноническое уравнение гиперболы.
2. Выведите каноническое уравнение параболы.
3. Постройте гиперболу $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$. Найдите: 1) полуоси; 2) координаты фокусов.
4. Составьте уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если ее фокусы лежат на оси Ox, и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

5. Постройте параболу $y^2 = 6x$. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

6. Составьте уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а фокус имеет координаты $(0;\ -3)$.

7, 8. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 234 – № 4.83, 4.92.

4.15 Аналитическая геометрия в пространстве

Конспект № 6 «Углы между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью в пространстве»

— Самостоятельно изучите материал по источнику: Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для вузов / Кремер Н. Ш., ред. – 4-е изд., перераб. и доп. – М : Юрайт, 2012. – 909 с. – (Бакалавр. Углубленный курс). – С. 213–217.

— Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 242 – № 4.113.

— Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Как находится угол между двумя плоскостями, заданными своими уравнениями?
2. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей?
3. Как найти угол между двумя прямыми в пространстве?
4. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве?
5. Как найти угол между прямой и плоскостью в пространстве?
6. Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве?
7. Найти угол между прямой $\frac{x-7}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z}{4}$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $(2;\ -1;\ 6)$.
8. Найти угол между прямой $\frac{x-7}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z}{4}$ и плоскостью $4x + y - 3z + 5 = 0$.

5. Контрольные вопросы для проведения аттестации по итогам освоения дисциплины «Линейная алгебра»

1. Определители 2-го, 3-го, n-го порядков.
2. Основные свойства определителей.
3. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Теорема разложения.
5. Вычисление определителей с использованием свойств и теоремы разложения.
6. Теорема аннулирования.
7. Теорема замещения.
8. Матрицы, виды матриц.
9. Действия над матрицами. Свойства действий над матрицами.
10. Полиномы от матриц. Характеристический полином. Аннулирующий полином.
11. Обратная матрица.
12. Общие сведения о системах линейных уравнений.
13. Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными по формулам Крамера.
14. Матричная форма записи систем n линейных уравнений c n неизвестными. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
15. Решение матричных уравнений.
16. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
17. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом окаймления.
18. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований.
19. Исследование системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.
20. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.
21. Геометрическая интерпретация множества решений систем линейных уравнений.
22. Геометрическая интерпретация множества решений систем линейных неравенств.
23. Понятия n-мерного вектора и векторного пространства.
24. Евклидово пространство.
25. Линейная зависимость и независимость векторов.
26. Базис и размерность векторного пространства.
27. Переход к новому базису.

28. Линейные операторы.

29. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

30. Квадратичные формы.

6. Задания для контрольных и расчетно-графических работ «Элементы линейной алгебры»

Задание № 1 — 20.

Вычислить определитель. Найти минор элемента a_{34}.

Номер варианта	Определитель	Номер варианта	Определитель
1	$\begin{vmatrix} 2 & -10 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ 8 & 0 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & -6 & 0 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & -1 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$	4	$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -1 & 2 \\ 9 & -6 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & -3 & -2 \\ 9 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix}$	6	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -6 & 0 \\ 5 & 4 & -5 & 2 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 & 8 \\ 3 & -1 & 9 & 0 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{vmatrix}$	8	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 4 \\ -7 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & -9 & -2 & -6 \end{vmatrix}$	10	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

11	$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 9 & -7 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
15	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & -7 \\ 9 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ -3 & 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}$	16	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$
17	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & 7 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

Задание № 21 — 40.

Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$,

Номер задачи	Матрица A	Номер задачи	Матрица A
1	2	3	4
21	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

24	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$	37	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	38	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$	39	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	40	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

Задание № 41 — 60.

Найдите матрицу обратную матрице A. Результат проверьте, вычислив произведение данной и обратной матриц.

Номер задачи	Матрица A	Номер задачи	Матрица A
41	$A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	51	$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
42	$A=\begin{pmatrix} 9 & 9 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 14 & 13 & 7 \end{pmatrix}$	52	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
43	$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	53	$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
44	$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$	54	$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

45	$A=\begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 14 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	55	$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
46	$A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	56	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
47	$A=\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 19 & 16 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	57	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
48	$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	58	$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
49	$A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 16 & 7 \end{pmatrix}$	59	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
50	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	60	$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Задание № 61 — 80.

Найти ранг матрицы

Номер задачи	Система	Номер задачи	Система
1	2	3	4
61	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	71	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
62	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	72	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
63	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	73	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

64	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	74	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
65	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	75	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
66	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	76	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
67	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	77	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
68	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	78	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
69	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	79	$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
70	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	80	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание № 81 — 100.

Решите систему линейных уравнений тремя способами:

1) по правилу Крамера, при этом два определителя вычислить по правилу треугольников, один — разложением по элементам любой строки, один — разложением по элементам любого столбца;

2) матричным методом, при этом сделать проверку правильности нахождения обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

Номер задачи	Система	Номер задачи	Система
1	2	3	4
81	$\begin{cases} 2x - y + 3z = -7, \\ x + 2y - z = 4, \\ 3x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$	91	$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x - 3y - z = -4, \\ x + y + 2z = 1. \end{cases}$
82	$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0, \\ x - 2y + z = 6, \\ 2x + y + 2z = 2. \end{cases}$	92	$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1, \\ 2x - 3y - z = 3, \\ x + y + 3z = -2. \end{cases}$
83	$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x - 3y - z = -3, \\ 2x + y + z = 2. \end{cases}$	93	$\begin{cases} 4x + 5y - 2z = -3, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x + y - 2z = -1. \end{cases}$
84	$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x + 3y - z = 8, \\ x - y + 2z = -1. \end{cases}$	94	$\begin{cases} 3x - y - 3z = 1, \\ x + y + 2z = 0, \\ x + 2y + 5z = -1. \end{cases}$
85	$\begin{cases} x + 4y - 3z = -7, \\ x - 3y + 2z = 0, \\ 2x - 5y - z = -1. \end{cases}$	95	$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0, \\ x + y - 2z = -3, \\ x + 2y + z = 3. \end{cases}$
86	$\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2. \end{cases}$	96	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 1. \end{cases}$
87	$\begin{cases} 3x - 2y - z = -5, \\ x + 3y + 2z = 2, \\ 5x - 2y + 4z = -7. \end{cases}$	97	$\begin{cases} x - 4y + 2z = -5, \\ 4x + y - 3z = -3, \\ 2x + 3y + 4z = 1. \end{cases}$
88	$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 2, \\ x + y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + z = -5. \end{cases}$	98	$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - 3y - z = -7, \\ 4x + y - 2z = 0. \end{cases}$

1	2	3	4
89	$\begin{cases} 3x - y + 4z = 2, \\ x + 2y + 3z = 7, \\ 5x + 3y + 2z = 8. \end{cases}$	99	$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = -4, \\ 2x + y - 3z = -1, \\ x - 2y + 5z = 1. \end{cases}$
90	$\begin{cases} 4x - y + 3z = 1, \\ 3x + 2y + 4z = 8, \\ 2x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$	100	$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x - 2y - 5z = -9, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$

Задание № 101 — 120.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
101	$\begin{cases} 2x_1 - 10x_2 - 3x_3 - x_4 = 33, \\ 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -4, \\ 8x_1 - x_3 + 9x_4 = 23, \\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 3. \end{cases}$	111	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -55, \\ 9x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -8x_3 + x_4 = -18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -27. \end{cases}$
102	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -28, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 21, \\ -2x_2 - 3x_3 + x_4 = -14, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_4 = 35. \end{cases}$	112	$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 22, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -33, \\ 2x_1 - 7x_2 = 12, \\ 8x_2 + 4x_3 - x_4 = -17. \end{cases}$
103	$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -10, \\ 7x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -8, \\ 9x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 25, \\ -4x_3 + 7x_4 = -1. \end{cases}$	113	$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 3x_3 = -17, \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -13, \\ 9x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 = -36, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -6. \end{cases}$
104	$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 = -17, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 14, \\ 2x_2 + 9x_3 = -26. \end{cases}$	114	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 18, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 13, \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$
105	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 59, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 20, \\ -7x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = -38, \\ 2x_1 - 9x_2 - 2x_3 - 6x_4 = -53. \end{cases}$	115	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$

106	$\begin{cases} 9x_1+8x_2=79, \\ 7x_1-x_2+5x_3=67, \\ x_1-x_2+5x_3+4x_4=29, \\ 3x_2+5x_3+7x_4=33. \end{cases}$	116	$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-2, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-3x_4=-10. \end{cases}$
107	$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3+3x_4=41, \\ 9x_1-7x_2-2x_3+14x_4=93, \\ -x_2+5x_3=11, \\ x_2-3x_3-5x_4=-19. \end{cases}$	117	$\begin{cases} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4=18, \\ 4x_1+2x_2+5x_3+7x_4=24, \\ 3x_1+2x_2+8x_3+5x_4=13, \\ 2x_1+8x_2+7x_3+3x_4=6. \end{cases}$
108	$\begin{cases} 6x_1+4x_2+4x_3+2x_4=18, \\ 7x_1+5x_2+2x_3+4x_4=24, \\ 5x_1+8x_2+2x_3+3x_4=13, \\ 3x_1+7x_2+8x_3+2x_4=6. \end{cases}$	118	$\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5, \\ x_1-2x_3+3x_4=-4, \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12, \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5. \end{cases}$
109	$\begin{cases} 4x_1+2x_2+2x_3+6x_4=18, \\ 2x_1+5x_2+4x_3+7x_4=24, \\ 2x_1+8x_2+3x_3+5x_4=13, \\ 8x_1+7x_2+2x_3+3x_4=6. \end{cases}$	119	$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-7x_4=12, \\ 3x_1-5x_2+7x_3-x_4=0, \\ 5x_1-7x_2+x_3-3x_4=4, \\ 7x_1-x_2+3x_3-5x_4=16. \end{cases}$
110	$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=8, \\ 3x_1+x_2+x_3=15, \\ x_1+x_2+4x_4=11, \\ 5x_2+x_3+x_4=23. \end{cases}$	120	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3+4x_4=7, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=5, \\ 6x_1+2x_2+x_3=4, \\ 2x_1+3x_2-x_4=-11. \end{cases}$

Задание № 121 — 140.

Исследовать по теореме Кронекера-Капелли совместность системы уравнений и в случае ее совместности найти общее решение и одно из частных решений.

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
121	$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=4 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=6 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=6 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=14 \end{cases}$	131	$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1 \end{cases}$

122	$\begin{cases} 5x_1+7x_2+4x_3+6x_4+6x_5=2, \\ 15x_1+30x_2+7x_3+8x_4+3x_5=-1, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+8x_4+9x_5=9, \\ 6x_1+9x_2+3x_3+4x_x+3x_5=-1 \end{cases}$	132	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3 \end{cases}$
123	$\begin{cases} 6x_1+5x_2+7x_3+5x_4+3x_5=6 \\ 14x_1+5x_2+3x_3+9x_4-x_5=2 \\ 4x_1+5x_2+8x_3+4x_4+4x_5=7 \\ 8x_1+5x_2+4x_3+7x_4+2x_5=2 \end{cases}$	133	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=1, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=-1, \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=-2 \end{cases}$
124	$\begin{cases} 15x_1+2x_2+4x_3-3x_4+9x_5=23, \\ 3x_1+20x_2+5x_3-2x_4+6x_5=-8, \\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4+3x_5=1, \\ 9x_1+4x_2+3x_3-2x_4+6x_5=12 \end{cases}$	134	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2x_4+4x_5=1, \\ 13x_1+8x_2+4x_3-3x_4+6x_5=9, \\ 5x_1+4x_2+2x_3-3x_4+6x_5=3, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=1 \end{cases}$
125	$\begin{cases} 13x_1-4x_2-x_3-4x_4-6x_5=8 \\ 11x_1-2x_2+x_3-2x_4-3x_5=7 \\ 5x_1+4x_2+7x_3+4x_4+6x_5=4 \\ 7x_1+2x_2+5x_3+2x_4+3x_5=5 \end{cases}$	135	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+6x_4+9x_5=2, \\ x_2-2x_3+2x_4+3x_5=-7, \\ 2x_1+x_2+4x_3+2x_4+3x_5=3, \\ 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4+6x_5=1 \end{cases}$
126	$\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4+5x_5=6, \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=7, \\ x_1-3x_2-5x_3-7x_5=-4, \\ 7x_1-5x_2+x_3+4x_4+x_5=6 \end{cases}$	136	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=1 \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=4 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=5 \end{cases}$
127	$\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+4x_4+5x_5=7, \\ 6x_1+2x_2+2x_3-x_4=-2, \\ -3x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=5, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=1 \end{cases}$	137	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=-1, \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4+2x_5=1, \\ 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4-4x_5=-4, \\ x_1-3x_2+6x_3+3x_4-3x_5=-2 \end{cases}$
128	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=5, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=-2, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=1 \end{cases}$	138	$\begin{cases} 5x_2-x_3+5x_4+3x_5=-4, \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=4, \\ x_1+x_2+3x_4+5x_5=1, \\ -3x_1+3x_2-2x_3+x_4=-7 \end{cases}$

129	$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=-2, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=7, \\ 2x_1-4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=1 \end{cases}$	139	$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3-x_4-x_5=4, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=6, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=2, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=5 \end{cases}$
130	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6 \end{cases}$	140	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_5=2, \\ x_1-x_2-3x_3-4x_4-3x_5=-4, \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+2x_5=1, \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-5x_5=-7 \end{cases}$

Задание № 141 — 160.

Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

Номер варианта	Система	Номер варианта	Система
1	2	3	4
141	$\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4+5x_5=0, \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ x_1-3x_2-5x_3-7x_5=0, \\ 7x_1-5x_2+x_3+4x_4+x_5. \end{cases}$	151	$\begin{cases} x_1-4x_2-4x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_1+7x_2+6x_3-2x_4+6x_5=0, \\ 9x_1+8x_2+4x_3-3x_4+9x_5=0, \\ 7x_1+5x_2+2x_3-2x_4+6x_5=0. \end{cases}$
142	$\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2+2x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$	152	$\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4+7x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4+2x_5=0, \\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$
143	$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$	153	$\begin{cases} 5x_1+6x_2+x_3+10x_4+7x_5=0, \\ 5x_1+x_2+2x_3+5x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+3x_2+x_3+7x_4+5x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4+3x_5=0. \end{cases}$
144	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=0, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+5x_5=0, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=0. \end{cases}$	154	$\begin{cases} 13x_1-4x_2-x_3-4x_4-6x_5=0, \\ 11x_1-2x_2+x_3-2x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+7x_3+4x_4+6x_5=0, \\ 7x_1+2x_2+5x_3+2x_4+3x_5=0. \end{cases}$

145	$\begin{cases} 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5=0, \\ 8x_1+4x_2+2x_4+3x_5=0, \\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=0. \end{cases}$	155	$\begin{cases} 15x_1+2x_2+4x_3-3x_4+9x_5=0, \\ 3x_1-20x_2+5x_3-2x_4+6x_5=0, \\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4+3x_5=0, \\ 9x_1+4x_2-3x_3-2x_4+6x_5=0. \end{cases}$
146	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=0. \end{cases}$	156	$\begin{cases} 6x_1+5x_2+7x_3+5x_4+3x_5=0, \\ 14x_1+5x_2+3x_3+9x_4-x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+8x_3+4x_4+4x_5=0, \\ 8x_1+5x_2+4x_3+7x_4+2x_5=0. \end{cases}$
147	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=0, \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4+2x_5=0, \\ 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4-5x_5=0, \\ x_1-3x_2+6x_3+3x_4-3x_5=0. \end{cases}$	157	$\begin{cases} 5x_1+7x_2+4x_3+6x_4+6x_5=0, \\ 15x_1+30x_2+7x_3+8x_4+3x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+8x_4+9x_5=0, \\ 6x_1+9x_2+3x_3+4x_4+3x_5=0. \end{cases}$
148	$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=0, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=0. \end{cases}$	158	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=0. \end{cases}$
149	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_4=0, \\ x_1-x_2-3x_3-4x_4-3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+2x_5=0, \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-5x_5=0. \end{cases}$	159	$\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2+2x_3+x_4-0, \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$
150	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=0, \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=0. \end{cases}$	160	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=0. \end{cases}$

Задание №161 — 180.

Предприятие специализируется по выпуску продукции трех видов P_1, P_2, и P_3; при этом использует сырье трех типов: S_1, S_2 и S_3. Норма и объем расхода каждого типа сырья на 1 день заданы таблицей. Найти ежедневный объем выпуска каждого вида продукции.

№ 161

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	7	3	4	280

S_2	6	2	3	230
S_3	5	9	1	250

№ 162

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	усл. ед.	P_3	
S_1	5	5	3	270
S_2	3	2	4	230
S_3	6	1	5	280

№ 163

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья на 1 день у. е.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	4	3	1	120
S_2	5	7	6	230
S_3	2	4	9	170

№ 164

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P1	P2	P3	
S_1	2	2	3	290
S_2	3	2	2	270
S_3	4	2	5	450

№ 165

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	1	2	2	170
S_2	3	2	3	240
S_3	4	3	5	380

№ 166

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	3	5	4	350
S_2	2	4	1	140
S_3	6	3	2	270

№ 167

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	7	2	5	650

S_2	6	4	2	740
S_3	3	3	1	470

№ 168

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	1	3	1	90
S_2	4	2	2	120
S_3	5	5	5	250

№ 169

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	3	2	3	130
S_2	2	2	2	90
S_3	5	9	1	145

№ 170

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	1	2	1	120
S_2	3	3	2	230
S_3	4	4	5	330

№ 171

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	2	4	2	280
S_2	5	2	1	420
S_3	3	2	3	380

№ 172

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	5	3	4	470
S_2	2	3	4	380
S_3	4	3	2	340

№ 173

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	2	4	1	350

S_2	3	4	10	1080
S_3	1	5	6	620

№ 174

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	2	4	1	170
S_2	3	4	2	260
S_3	1	7	6	410

№ 175

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	4	2	3	500
S_2	1	3	4	390
S_3	6	7	1	1000

№ 176

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья на 1 день у. е.
	P_1	P_2	P_3	
S1	2	2	4	160
S2	3	1	3	170
S3	9	9	8	610

№ 177

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S1	3	1	3	255
S2	6	3	3	495
S3	7	9	8	1020

№ 178

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S1	2	3	1	130
S2	2	6	4	280
S3	2	5	9	350

№ 179

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S1	3	2	2	155

S2	7	3	2	310
S3	5	5	9	340

№ 180

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	3	7	3	420
S_2	2	5	5	340
S_3	4	9	7	590

Задание № 181 — 200.

Показать, что векторы $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\overrightarrow{a_3}$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора b в этом базисе.

Номер задачи	Система	Номер задачи	Система
1	2	3	4
181	$\overrightarrow{a_1}=(3;1;6)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;2;-3)$, $\overrightarrow{a_3}=(-4;5;-1)$, $\vec{b}=(3;0;1)$.	191	$\overrightarrow{a_1}=(5;3;1)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;-1;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(-2;1;4)$, $\vec{b}=(3;0;1)$.
182	$\overrightarrow{a_1}=(4;1;4)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;-1;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(3;1;5)$, $\vec{b}=(-3;-2;1)$.	192	$\overrightarrow{a_1}=(1;3;5)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;-1;-1)$, $\overrightarrow{a_3}=(4;-2;4)$, $\vec{b}=(-7;3;-1)$.
183	$\overrightarrow{a_1}=(1;2;5)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;-3;4)$, $\overrightarrow{a_3}=(1;-1;-2)$, $\vec{b}=(3;0;1)$.	193	$\overrightarrow{a_1}=(-1;2;0)$, $\overrightarrow{a_2}=(3;1;0)$, $\overrightarrow{a_3}=(-1;0;6)$, $\vec{b}=(-4;4;4)$.
184	$\overrightarrow{a_1}=(5;1;2)$, $\overrightarrow{a_2}=(3;4;-1)$, $\overrightarrow{a_3}=(-4;2;1)$, $\vec{b}=(-3;5;4)$.	194	$\overrightarrow{a_1}=(1;0;5)$, $\overrightarrow{a_2}=(-1;3;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;-1;1)$, $\vec{b}=(5;15;0)$.
1085	$\overrightarrow{a_1}=(2;1;5)$, $\overrightarrow{a_2}=(-4;3;5)$, $\overrightarrow{a_3}=(1;-1;-4)$, $\vec{b}=(4;-1;-3)$.	195	$\overrightarrow{a_1}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{a_2}=(0;-1;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;1;4)$, $\vec{b}=(0;4;3)$.
186	$\overrightarrow{a_1}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1\right)$, $\overrightarrow{a_2}=(-1;-4;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(3;2;5)$.	196	$\overrightarrow{a_1}=(1;1;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(9;-4;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;1;2)$, $\vec{b}=(1;1;-1)$.
187	$\overrightarrow{a_1}=(5;2;-5)$, $\overrightarrow{a_2}=(-1;-1;3)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;1;0)$, $\vec{b}=(3;2;7)$.	197	$\overrightarrow{a_1}=(3;3;0)$, $\overrightarrow{a_2}=(7;-4;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(5;0;1)$, $\vec{b}=(0;1;2)$.
188	$\overrightarrow{a_1}=(3;1;4)$, $\overrightarrow{a_2}=(-4;2;3)$,	198	$\overrightarrow{a_1}=(2;1;1)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;2;1)$,

	$\overrightarrow{a_3}=(2;-1;-2)$, $\vec{b}=(7;-1;0)$.		$\overrightarrow{a_3}=(3;3;1)$, $\vec{b}=(3;0;-2)$.
189	$\overrightarrow{a_1}=(1;4;2)$, $\overrightarrow{a_2}=(5;-2;-3)$, $\overrightarrow{a_3}=(-2;-1;1)$, $\vec{b}=(-3;2;4)$.	199	$\overrightarrow{a_1}=(0;7;-1)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;9;-1)$, $\overrightarrow{a_3}=(5;3;4)$, $\vec{b}=(3;1;5)$.
190	$\overrightarrow{a_1}=(2;1;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(3;-2;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(1;-3;-4)$, $\vec{b}=(7;0;7)$.	200	$\overrightarrow{a_1}=(4;2;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(1;-3;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(-2;0;-2)$, $\vec{b}=(7;-1;-3)$.

Задание № 201 — 220.

Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей.

Номер задачи	Система	Номер задачи	Система
1	2	3	4
201	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	211	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
202	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	212	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
203	$\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	213	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
104	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	214	$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$
205	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	215	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
206	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$	216	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

207	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	217	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
208	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	218	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
209	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	219	$\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
210	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	220	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задание № 221 — 240.
Привести к каноническому виду квадратичную форму и определить ее знак.

№	Система	№	Система
1	2	3	4
221	$3x^2+2\sqrt{14}xy+8y^2=10$	231	$x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0$
222	$4x^2+2\sqrt{6}xy+3y^2=24$	232	$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$
223	$6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2=21$	233	$2x^2+4xy+5y^2+5z^2-4xz-8yz=0$
224	$9x^2+4\sqrt{2}xy+2y^2=20$	234	$3x^2-4xy+4y^2+5z^2-4yz=0$
225	$7x^2+6\sqrt{2}xy+4y^2=15$	235	$2x_1^2+3x_2^2-2x_3^2+x_1x_2+2x_1x_3+$ $+3x_2x_3=0$
226	$3x^2-2xy+3y^2+3z^2=0$	236	$7x^2+2\sqrt{6}xy+2y^2=24$
227	$4x^2+4\sqrt{3}xy+5y^2=40$	237	$4x_1^2-12x_1x_2-10x_1x_3+x_2^2-3x_3^2=0$
228	$6x^2+2\sqrt{10}xy+3y^2=16$	238	$13y_1^2-34y_1y_2+3y_2^2=0$
229	$5x^2+4xy+2y^2=18$	239	$2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2=0$
230	$5x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2=14$	240	$2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2=0$

Задание № 241-260
Даны координаты вершин треугольника *ABC*.
Найти:
1) длину стороны *AB*;

2) уравнение стороны AB;
3) внутренний угол A;
4) уравнение высоты CD и ее длину;
5) уравнение и длину медианы AE.

Вариант	A	B	C	Вариант	A	B	C
241	(−3; −2)	(0; 10)	(6; 2)	251	(−4; 2)	(4; −4)	(6; 5)
242	(1; 1)	(4; 13)	(10; 5)	252	(−2; 1)	(6; −5)	(8; 4)
243	(0; 3)	(3; 15)	(9; 7)	253	(−3; −3)	(5; −9)	(7; 0)
244	(−2; 0)	(1; 12)	(7; 4)	254	(2; 2)	(10; −4)	(12; 5)
245	(2; −1)	(5; 11)	(11; 3)	255	(4; −1)	(12; −7)	(14; 2)
246	(3; −3)	(6; 9)	(12; 1)	256	(−6; −2)	(2; −8)	(4; 1)
247	(−1; 2)	(2; 14)	(8; 6)	257	(1; 2)	(13; −7)	(11; 7)
248	(5; −4)	(8; 8)	(14; 0)	258	(−7; −1)	(−5;−10)	(3; 4)
249	(−4; 5)	(−1; 17)	(5; 9)	259	(−5; 0)	(7; 9)	(5; −5)
250	(4; 4)	(7; 16)	(13; 8)	260	(−7; 2)	(5; 11)	(3; −3)

Задание № 261-280.

Дано уравнение эллипса. Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	2	3	4
261	$4x^2+y^2=16$	271	$64x^2+y^2=64$
262	$9x^2+4y^2=36$	272	$9x^2+16y^2=144$
263	$4x^2+9y^2=36$	273	$25x^2+16y^2=400$
264	$9x^2+y^2=9$	274	$16x^2+25y^2=400$
265	$x^2+9y^2=9$	275	$x^2+16y^2=16$
266	$x^2+4y^2=16$	276	$16x^2+9y^2=144$
267	$16x^2+y^2=16$	277	$12x^2+9y^2=108$
268	$9x^2+12y^2=108$	278	$25x^2+9y^2=225$
269	$4x^2+36y^2=144$	279	$9x^2-49y^2=441$
270	$36x^2+4y^2=144$	280	$9x^2-16y^2=144$

Задание № 281-300. Даны действительная полуось a и эксцентриситет ε гиперболы. Построить гиперболу и найти координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот гиперболы.

Вариант	a	ε	Вариант	a	ε
281	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	291	8	$\sqrt{2}$
282	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	292	$6\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$
283	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	293	$5\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$

284	$\sqrt{5}$	$3\sqrt{2}$	294	$4\sqrt{7}$	$3\sqrt{7}$
285	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	295	$3\sqrt{7}$	$4\sqrt{7}$
286	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	296	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$
287	$4\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	297	$3\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$
288	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$	298	$4\sqrt{6}$	2
289	$2\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	299	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$
290	7	$\sqrt{3}$	300	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$

Задание № 301-320.

Дано уравнение параболы. Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	2	3	4
301	$y^2=-10x$	311	$y^2=-5x$
302	$x^2=10y$	312	$x^2=-5y$
303	$y^2=9x$	313	$y^2=4x$
304	$x^2=-9y$	314	$x^2=4y$
305	$y^2=-8x$	315	$y^2=-3x$
306	$x^2=8y$	316	$x^2=3y$
307	$y^2=7x$	317	$y^2=2x$
308	$x^2=-7y$	318	$x^2=-2y$
309	$y^2=-6x$	319	$y^2=-11x$
310	$x^2=6y$	320	$x^2=11y$

7. Методические указания к заданиям

7.1. Пример решения заданий № 1—20

Дан определитель 4-го порядка $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

1) Найти алгебраическое дополнение A_{23}.

2) Вычислить определитель.

Решение.

1) Алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} находится по формуле $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$, где M_{23} – минор элемента a_{23}, который получается вычеркиванием второй строки и третьего столбца данного определителя:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Определитель третьего порядка вычисляем по правилу треугольников:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(8 \cdot 4 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot 0 - 8 \cdot 5 \cdot 4 - 4 \cdot 7 \cdot 2) = -142.$$

Итак, $A_{23} = -142$.

2) Вычислим определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Получим строку или столбец, в котором один элемент отличен от нуля, а остальные равны нулю. В первом столбце данного определителя вместо элементов 8 и -8 получим нули. Для этого элементы третьей строки умножим на 2 и прибавим к соответствующим элементам первой строки. Затем элементы третьей строки умножим на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки. Получим определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Вынесли общий множитель 5 из элементов второй строки за знак определителя. Полученный определитель третьего порядка вычислим по правилу треугольников:

$$= 20(-6-96+60+120-12+24) = 20\cdot 90 = 1800 .$$

Ответ: 1) -142, 2) 1800.

7.2.Пример решения заданий № 21—40

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 15 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $D = A\cdot B - 2C$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4+1\cdot 3-2\cdot(-1) & 3\cdot 5+1\cdot 10-2\cdot 4 \\ 4\cdot 4+0\cdot 3+5\cdot(-1) & 4\cdot 5+0\cdot 10+5\cdot 4 \\ 7\cdot 4-6\cdot 3+9\cdot(-1) & 7\cdot 5-6\cdot 10+9\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12+3+2 & 15+10-8 \\ 16+0-5 & 20+0+20 \\ 28-18-9 & 35-60+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 11 & 40 \\ 1 & 11 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 11 & 40 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 15 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 11 & 40 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 8 & 30 \\ -10 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17-16 & 17-20 \\ 11-8 & 40-30 \\ 1+10 & 11+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 10 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица $D = A\cdot B - 2C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 10 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$.

Ответ: $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 10 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$.

7.3. Пример решения заданий № 41—60

Найдите матрицу обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Результат проверьте, вычислив произведение данной и обратной матриц.

Решение.

1) Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6\cdot 1\cdot 1+7\cdot 0\cdot 2+3\cdot 2\cdot 3-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 0\cdot 6-7\cdot 3\cdot 1=$$

$$=6+18-6-21=-3\neq 0.$$

Следовательно, матрица A является невырожденной, и для нее существует обратная матрица.

2) Составим матрицу A^* из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1; \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1; \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3; \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=9;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2; \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-15;$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 9 & -15 \end{pmatrix}.$$

3) Транспонируем матрицу A^*, получаем союзную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & -15 \end{pmatrix}.$$

4) Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\cdot\tilde{A}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ -3 & 0 & 9\\ 4 & 2 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1\\ 1 & 0 & -3\\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 5\end{pmatrix}.$$

Проверка:

Найдем произведение $A^{-1}A$:

$$A^{-1}A=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ -3 & 0 & 9\\ 4 & 2 & -15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\cdot 6-1\cdot 3-3\cdot 2 & 1\cdot 7-1\cdot 1-3\cdot 2 & 1\cdot 3-1\cdot 0-3\cdot 1\\ -3\cdot 6+0\cdot 3+9\cdot 2 & -3\cdot 7+0\cdot 1+9\cdot 2 & -3\cdot 3+0\cdot 0+9\cdot 1\\ 4\cdot 6+2\cdot 3-15\cdot 2 & 4\cdot 7+2\cdot 1-15\cdot 2 & 4\cdot 3+2\cdot 0-15\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена верно.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1\\ 1 & 0 & -3\\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 5\end{pmatrix}.$

7.4. Пример решения заданий № 61—80

Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 5 & 3\end{pmatrix}.$

Решение

Воспользуемся методом окаймления.

Так как матрица A имеет размер (3×4), то ее ранг

$$r(A)\le \min(3;4)=3.$$

Минор 1-го порядка $M_1=1\neq 0$.

Окаймляем минор M_1 2-й строкой и 2-м столбцом, получаем минор 2-го порядка

$$M_2^1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Окаймляем минор M_1 2-й строкой и 3-м столбцом. Для этого меняем 2-й и 3-й столбцы местами. Получаем минор 2-го порядка

$$M_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0.$$

Вычисляем миноры 3-го порядка, окаймляющие минор второго порядка M_2^2:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ так как имеет два одинаковых столбца;}$$

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 10 - 1 - 6 = 0.$$

Так как все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю, то $r(A) = 2$.

Ответ: $r(A) = 2$.

.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

Воспользуемся методом элементарных преобразований.

1. Если $a_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваемся того, что $a_{11} \neq 0$. Лучше, если $a_{11} = 1$.

В данном примере умножим 2-й столбец на (–1) и поменяем его местами с 1-м:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ -5 & -4 & 7 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Если $a_{11} \neq 0$, то, умножая элементы 1-й строки на подходящие числа и прибавляя соответственно к ниже стоящим строкам, добиваемся того, чтобы все элементы 1-го столбца в них равнялись нулю.

В данном примере умножим элементы 1-й строки на (-4), затем на 5 и на 1 и прибавим соответственно ко 2-й, 3-й, 4-й строкам:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -11 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & 22 & -10 & 10 \\ 0 & -2 & 11 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$, то, умножая элементы 2-й строки на подходящие числа и прибавляя соответственно к ниже стоящим строкам, добиваемся того, чтобы все элементы 2-го столбца в них равнялись нулю.

В данном примере умножим элементы 2-й строки на 2, затем на 1 и прибавим соответственно к 3-й и 4-й строкам:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -11 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Если в процессе преобразований получаются нулевые строки (столбцы), то их вычеркиваем.

В данном примере вычеркиваем 3-ю и 4-ю нулевые строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -11 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу ступенчатого вида. Ее ранг равен числу ненулевых строк, т.е. двум. Следовательно, и ранг данной матрицы $r(A) = 2$.

Ответ: $r(A) = 2$.

7.5. Пример решения заданий № 81—100

Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$ тремя способами:

1) по формулам Крамера;

2) матричным методом;

3) методом Гаусса.

Решение.

1) Решим данную систему линейных уравнений по формулам Крамера.

Найдем определитель системы по правилу треугольников:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot4\cdot4+(-1)\cdot(-2)\cdot4+3\cdot(-3)\cdot(-1)-$$

$$-(-1)\cdot4\cdot4-(-1)\cdot3\cdot4-(-2)\cdot(-3)\cdot2=32+8+9+16+12-12=65.$$

Так как $\Delta\neq0$, то система имеет единственное решение.

Найдем это решение по формулам Крамера:

$$x_i=\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta},\ i=1,\ 2,\ 3.$$

Вычислим определители Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}, полученные из определителя системы Δ заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 13 & 4 & -2\\ -11 & -3 & 4\end{vmatrix}=4\cdot4\cdot4+(-1)\cdot(-2)\cdot(-11)+13\cdot(-3)\cdot(-1)-$$

$$-(-1)\cdot4\cdot(-11)-(-1)\cdot13\cdot4-(-2)\cdot(-3)\cdot4=64-22+39-44+52-24=65;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 13 & -2\\ 4 & -11 & 4\end{vmatrix}=2\cdot13\cdot4+4\cdot(-2)\cdot4+3\cdot(-11)\cdot(-1)-$$

$$-(-1)\cdot13\cdot4-4\cdot3\cdot4-(-2)\cdot(-11)\cdot2=104-32+33+52-48-44=65;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 13\\ 4 & -3 & -11\end{vmatrix}=2\cdot4\cdot(-11)+(-1)\cdot13\cdot4+3\cdot(-3)\cdot4-$$

$$-4\cdot4\cdot4-(-1)\cdot3\cdot(-11)-13\cdot(-3)\cdot2=-88-52-36-64-33+78=-195.$$

Найдем неизвестные:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{65}{65}=1;$$

$$x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{65}{65}=1;$$

$$x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=-\frac{195}{65}=-3.$$

Итак, (1; 1; – 3) — решение данной системы.

Ответ: (1; 1; – 3).

2) Решим данную систему линейных уравнений матричным методом.

Введем обозначения:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 4\end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}4\\ 13\\ -11\end{pmatrix}.$$

Тогда данная система уравнений записывается в матричной форме

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 13\\ -11\end{pmatrix} \text{ или } AX=B.$$

Решение полученного матричного уравнения ищем по формуле:

$$X=A^{-1}B.$$

Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице A.

Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta A=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 4\end{vmatrix}=32+8+9+16+12-12=65.$$

Так как $\Delta A \neq 0$, то матрица A невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу A^{-1}.

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}4 & -2\\ -3 & 4\end{vmatrix}=16-6=10;$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-(12+8)=-20;$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-9-16=-25;$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=-(-4-3)=7;$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 4\end{vmatrix}=8+4=12;$$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-(-6+4)=2;$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=2+4=6;$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(-4+3)=1;$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=8+3=11.$$

Составим матрицу A^* из алгебраических дополнений:

$$A^*=\begin{pmatrix}10 & -20 & -25\\ 7 & 12 & 2\\ 6 & 1 & 11\end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу A^* и получаем союзную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}10 & 7 & 6\\ -20 & 12 & 1\\ -25 & 2 & 11\end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу A^{-1} по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta A}\cdot\tilde{A}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{65}\begin{pmatrix}10 & 7 & 6\\ -20 & 12 & 1\\ -25 & 2 & 11\end{pmatrix}.$$

Находим матрицу-столбец неизвестных X по формуле $X = A^{-1}B$:

$$X=\frac{1}{65}\begin{pmatrix}10 & 7 & 6\\ -20 & 12 & 1\\ -25 & 2 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 13\\ -11\end{pmatrix}=\frac{1}{65}\begin{pmatrix}10\cdot 4+7\cdot 13+6\cdot(-11)\\ -20\cdot 4+12\cdot 13+1\cdot(-11)\\ -25\cdot 4+2\cdot 13+11\cdot(-11)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{65}\begin{pmatrix}65\\ 65\\ -195\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}.$$

Итак, $X=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$, т.е. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$.

Тогда (1; 1; – 3) — решение данной системы.

Ответ: (1; 1; – 3).

3) Решим данную систему линейных уравнений методом Гаусса.

Умножим первое уравнение на (-1) и поменяем местами первое и второе слагаемые во всех уравнениях системы:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_2 + 3x_1 - 2x_3 = 13, \\ -3x_2 + 4x_1 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (-4) и на 3 и прибавим, соответственно, ко второму и к третьему уравнениям, исключая неизвестную x_2 из уравнений, начиная со второго:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 + x_3 = -4, \\ 11x_1 - 6x_3 = 29, \\ -2x_1 + 7x_3 = -23. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $\frac{1}{11}$:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 + x_3 = -4, \\ x_1 - \frac{6}{11}x_3 = \frac{29}{11}, \\ -2x_1 + 7x_3 = -23. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 2 и прибавим к третьему, исключая из него неизвестную x_1:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 + x_3 = -4, \\ x_1 - \frac{6}{11}x_3 = \frac{29}{11}, \\ \frac{65}{11}x_3 = -\frac{195}{11}. \end{cases}$$

Умножим третье уравнение на $\frac{11}{65}$:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 \quad + x_3 = -4, \\ \qquad x_1 - \dfrac{6}{11}x_3 = \dfrac{29}{11}, \\ \qquad\qquad x_3 = -3. \end{cases}$$

Используя обратный ход метода Гаусса, находим неизвестные:

$$x_3 = -3;$$

$$x_1 = \frac{29}{11} + \frac{6}{11}\cdot(-3) = 1;$$

$$x_2 = -4 + 2\cdot 1 - (-3) = 1.$$

Итак, (1; 1; – 3) — решение данной системы.

Ответ: (1; 1; – 3).

7.6. Пример решения заданий № 101—120

Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}.$$

Решение

Найдем ранг матрицы системы и ранг ее расширенной матрицы. Для этого выпишем расширенную матрицу системы и выполним преобразования, которые не изменяют ее ранга:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

Умножим элементы первой строки на (–1) и прибавим к соответствующим элементам второй строки, затем умножим элементы первой строки на (– 3) и прибавим к элементам третьей строки, получим

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim$$

Далее умножим элементы второй строки на (– 2) и прибавим к элементам третьей строки, получим

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -2 & -2\end{array}\right).$$

Очевидно, что ранг матрицы системы (матрица до черты) и ранг расширенной матрицы равны между собой и равны двум:

$$r\;A = r\;A = 2.$$

Следовательно, система совместна. Так как число неизвестных n = 4 и $r\;A = r\;A = 2 < 4$, то система имеет бесконечное множество решений, т.е. является неопределенной.

Главными переменными являются x_1 и x_2, так как $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 5\end{vmatrix} \neq 0$. Выразим главные переменные x_1 и x_2 через свободную x_3 :

$5x_2 = -2 + 2x_3,\ x_2 = \dfrac{-2}{5} + \dfrac{2}{5}x_3.$

$x_1 = 3 - x_3 + 2x_2,\ x_1 = 3 - x_3 + 2(\dfrac{-2}{5} + \dfrac{2}{5}x_3) = \dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5}x_3.$

Получили общее решение системы: $(\dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5}x_3; -\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5}x_3;\ x_3)$.

Проверка: $\dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5}x_3 + \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{5}x_3 + x_3 = 3$, верно;

$\dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{6}{5} + \dfrac{6}{5}x_3 - x_3 = 1$, верно;

$\dfrac{33}{5} - \dfrac{3}{5}x_3 - \dfrac{8}{5} + \dfrac{8}{5}x_3 - x_3 = 5$, верно.

Ответ: общее решение системы: $(\dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5}x_3; -\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5}x_3;\ x_3)$.

7.7. Пример решения заданий № 121-140

Исследовать по теореме Кронекера-Капелли совместность системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1,\\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0,\\ -x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 1,\\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0\end{cases}$$

и в случае ее совместности найти общее решение и одно из частных решений.

Решение

Найдем ранг матрицы системы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 7 & 11 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

и ранг ее расширенной матрицы

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 11 & 3 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & 6 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Для этого выпишем расширенную матрицу системы и выполним преобразования, которые не изменяют ее ранг:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 11 & 3 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & 6 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Элементы первой строки прибавим к соответствующим элементам второй и третьей строк, затем умножим элементы первой строки на 2 и прибавим к элементам четвертой строки, получим

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 16 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 10 & 16 & 10 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Далее умножим элементы второй строки на (–2) и прибавим к элементам третьей и четвертой строк, получим

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right).$$

Удалим нулевую третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на $\left(-\frac{1}{7}\right)$ и поменяем местами третий и пятый столбцы, получим матрицу ступенчатого вида:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

У нее три ненулевых элемента на главной диагонали, следовательно, ранг матрицы, полученной в результате элементарных преобразований, равен трем. Тогда и ранг матрицы системы $r(A)=3$, и ранг расширенной матрицы системы $r(\tilde{A})=3$, то есть $r(A)=r(\tilde{A})=3$.

Так как ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то по теореме Кронекера-Капелли, система является совместной. Так как число неизвестных $n=5$ больше, чем ранг матриц, то система имеет бесконечное множество решений.

Найдем общее решение данной системы. Она равносильна следующей ступенчатой системе:

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \qquad +7x_4+5x_3=1, \\ \quad 5x_2+4x_5+5x_4+8x_3=1, \\ \qquad x_5=0. \end{cases}$$

Примем за базисные неизвестные x_1, x_2 и x_5, а x_3 и x_4 — за свободные неизвестные. Перенесем слагаемые со свободными неизвестными в правые части уравнений, получим систему треугольного вида:

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \qquad =1-7x_4-5x_3, \\ \quad 5x_2+4x_5=1-5x_4-8x_3, \\ \qquad x_5=0. \end{cases}$$

Выполняя обратный ход метода Гаусса, выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1=1-7x_4-5x_3-3x_2, \\ 5x_2=1-5x_4-8x_3-4x_5, \\ x_5=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 7x_4 - 5x_3 - 3x_2, \\ x_2 = \dfrac{1}{5} - x_4 - \dfrac{8}{5}x_3, \\ x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 7x_4 - 5x_3 - 3\left(\dfrac{1}{5} - x_4 - \dfrac{8}{5}x_3\right), \\ x_2 = \dfrac{1}{5} - x_4 - \dfrac{8}{5}x_3, \\ x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}x_3 - 4x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{5}x_3 - x_4, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Пусть свободные неизвестные $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, где α, β — любые числа.

Тогда $\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\alpha - 4\beta;\ \dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{5}\alpha - \beta;\ \alpha;\ \beta;\ 0\right)$ — общее решение данной системы.

Найдем одно из частных решений системы. Придадим свободным неизвестным произвольные значения, например. $x_3 = 2$, $x_4 = 1$. Получим частное решение $(-4; -4; 2; 1; 0)$.

Ответ: $\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\alpha - 4\beta;\ \dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{5}\alpha - \beta;\ \alpha;\ \beta;\ 0\right)$ — общее решение данной системы, $(-4; -4; 2; 1; 0)$ — одно из частных решений.

7.8. Пример решения заданий № 141-160

Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

Решение

Решим систему методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right).$$

Умножим первую строку последовательно на (-3), (-4), (-3), прибавим соответственно ко второй, третьей и четвертой строкам, получим

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 30 & -25 & 0 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на $\frac{1}{2}$, а четвертую — на $\frac{1}{5}$, получим

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на (-1) и прибавим к третьей и четвертой, получим нулевые строки, которые удаляем и получаем ступенчатую матрицу:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Ей соответствует система ступенчатого вида, равносильная данной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ \qquad\; x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем ее общее решение. Примем за базисные неизвестные x_1 и x_2, а x_3 и x_4 — за свободные неизвестные. Перенесем слагаемые со свободными неизвестными в правые части уравнений, получим систему треугольного вида:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 - 2x_4, \\ \qquad x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Выполняя обратный ход метода Гаусса, выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6x_3 - 5x_4 + 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Пусть свободные неизвестные $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, где α, β — любые числа.

Тогда $(8\alpha - 7\beta;\ -6\alpha + 5\beta;\ \alpha;\ \beta)$ — общее решение данной системы.

Для нахождения фундаментальной системы решений заменяем поочередно свободные переменные x_3 и x_4 элементами строк единичной матрицы $E_{4-2} = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ получим решение $e_1 = (8; -6; 1; 0)$. При $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ получим решение $e_2 = (-7; 5; 0; 1)$.

Итак, фундаментальная система решений: $(8; -6; 1; 0)$, $(-7; 5; 0; 1)$.

Ответ: $(8\alpha\text{-}7\beta;\ -6\alpha\text{+}5\beta;\ \alpha;\ \beta)$ — общее решение; $(8; -6; 1; 0)$, $(-7; 5; 0; 1)$ — фундаментальная система решений.

7.9. Пример решения заданий № 161—180

Предприятие специализируется по выпуску продукции трех видов P_1, P_2, и P_3; при этом использует сырье трех типов: S_1, S_2 и S_3. Нормы расхода каждого из них на изготовление единицы продукции и объем расхода каждого типа сырья за один день заданы в таблице 25.

Таблица 25. Исходные данные

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	5	6	4	2 700
S_2	2	2	1	900
S_3	3	4	2	1 600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида продукции.

Решение

Пусть ежедневно предприятие выпускает x_1 единиц продукции P_1, x_2 единиц продукции P_2, x_3 единиц продукции P_3.

Тогда в соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 2\,700, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 900, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1\,600. \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(10 + 9 + 16 - 12 - 12 - 10) = 2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2\,700 & 6 & 4 \\ 900 & 2 & 1 \\ 1\,600 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 100 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 27 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 16 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 200 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 27 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 400(27 + 24 + 36 - 32 - 27 - 27) = 400,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2\,700 & 4 \\ 2 & 900 & 1 \\ 3 & 1\,600 & 2 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 5 & 27 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 16 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 100(90 + 81 + 128 - 108 - 108 - 80) = 300,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 2\,700 \\ 2 & 2 & 900 \\ 3 & 4 & 1\,600 \end{vmatrix} = 100 \cdot 2\begin{vmatrix} 5 & 3 & 27 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 200(80 + 81 + 108 - 81 - 96 - 90) = 400.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{400}{2} = 200,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{300}{2} = 150,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{400}{2} = 200.$$

Итак, $(200; 150; 200)$ — решение системы.

7.10. Пример решения заданий № 181—200

В базисе $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ ...,\ \boldsymbol{e}_n)$ заданы векторы $\boldsymbol{a}_1=(1;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}_2=(1;\ -1;\ 1)$ и $\boldsymbol{a}_3=(-3;\ 5;\ -6)$. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образуют базис.

1-й способ.

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=\mathbf{0}.$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0,\\ \lambda_1-\lambda_2+5\lambda_3=0,\\ \quad\lambda_2-6\lambda_3=0.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\1&-1&5&0\\0&1&-6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\0&-2&8&0\\0&1&-6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\0&1&-4&0\\0&1&-6&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\0&1&-4&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\0&1&-4&0\\0&0&1&0\end{array}\right).$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0,\\ \quad\lambda_2-4\lambda_3=0,\\ \quad\quad\lambda_3=0.\end{cases}$$

$$\lambda_3=0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_1=0.$$

2-й способ. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\-3&5&-6\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot(-6)+1\cdot(-3)\cdot1+$$

$$+1\cdot5\cdot0-0\cdot(-1)\cdot(-3)-1\cdot5\cdot1-1\cdot1\cdot(-6)=6-3-5+6=4.$$

Так как определитель не равен нулю, то векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми и образуют базис.

Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми и образуют базис.

Разложим вектор $b=(2;\ \text{-}1;\ 1)$ по базису: $\boldsymbol{a}_1=(1;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}_2=(1;\ -1;\ 1)$ и $\boldsymbol{a}_3=(-3;\ 5;\ -6)$.

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=\mathbf{b}.$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=2,\\ \lambda_1-\lambda_2+5\lambda_3=-1,\\ \qquad\lambda_2-6\lambda_3=1.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&2\\1&-1&5&-1\\0&1&-6&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&2\\0&-2&8&-3\\0&1&-6&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&2\\0&1&-4&1.5\\0&1&-6&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&2\\0&1&-4&1.5\\0&0&-2&-0.5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&2\\0&1&-4&1.5\\0&0&1&0.25\end{array}\right).$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=2,\\ \qquad\lambda_2-4\lambda_3=1.5,\\ \qquad\qquad\lambda_3=0.25.\end{cases}$$

λ_3 =0,25, λ_2 = 2,5, λ_1 = 0,25.

$$0,25\boldsymbol{a}_1+2,5\boldsymbol{a}_2+0,25\boldsymbol{a}_3=\mathbf{b}$$

7.11. Пример решения заданий № 201—220

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$, заданного матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1&-4&-8\\-4&7&-4\\-8&-4&1\end{pmatrix}.$$

Решение

1) Составляем характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-4&-8\\-4&7-\lambda&-4\\-8&-4&1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

После преобразований уравнение примет вид

$$\lambda^3-9\lambda^2-81\lambda+729=0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\lambda^2(\lambda-9)-81(\lambda-9)=0,$$

$$(\lambda-9)(\lambda^2-81)=0,$$

откуда $\lambda_1=\lambda_2=9$, $\lambda_3=-9$ — собственные значения матрицы A.

2) Найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=\lambda_2=9$. Для этого решаем систему

$$\begin{cases}(1-9)x_1-4x_2-8x_3=0,\\ -4x_1+(7-9)x_2-4x_3=0,\\ -8x_1-4x_2+(1-9)x_3=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-8x_1-4x_2-8x_3=0,\\ -4x_1-2x_2-4x_3=0,\\ -8x_1-4x_2-8x_3=0.\end{cases}$$

Разделим первое уравнение на (–4), второе — на (–2), третье — на (–4), получим уравнение, равносильное системе

$$2x_1+x_2+2x_3=0,\ \text{или}\ x_1=-\frac{1}{2}x_2-x_3,$$

где x_2, x_3 — свободные неизвестные. Полагая $x_2=c_1$, $x_3=c_2$, получим вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}=\left(-\frac{1}{2}c_1-c_2;\ c_1;\ c_2\right)$, который при любых значениях c_1, c_2, одновременно неравных нулю, есть собственный вектор матрицы A с собственным значением $\lambda=9$.

3) Найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3=-9$. Для этого решаем систему

$$\begin{cases}(1+9)x_1-4x_2-8x_3=0,\\ -4x_1+(7+9)x_2-4x_3=0,\\ -8x_1-4x_2+(1+9)x_3=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}10x_1-4x_2-8x_3=0,\\ -4x_1+16x_2-4x_3=0,\\ -8x_1-4x_2+10x_3=0.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Выполним элементарные преобразования над расширенной матрицей системы:

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -8 & 0 \\ -4 & 16 & -4 & 0 \\ -8 & -4 & 10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили систему ступенчатого вида

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -x_3, \\ 2x_2 = x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -x_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

где x_3 — свободная неизвестная. Полагая $x_3 = c_3$, получим вектор $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(c_3;\ \frac{1}{2}c_3;\ c_3\right)$, который при любых значениях $c_3 \neq 0$ есть собственный вектор матрицы A с собственным значением $\lambda = -9$.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$;

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2\right),\ \boldsymbol{x}^{(2)} = \left(c_3;\ \frac{1}{2}c_3;\ c_3\right).$$

7.12. Пример решения заданий № 221—240

Привести к каноническому виду квадратичную форму $5x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ и определить знак квадратичной формы.

Решение

$$5x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 = 5(x_1^2 + \frac{4}{5}x_1x_2) + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 =$$

$$=5(x_1^2+2x_1\frac{2}{5}x_2+\frac{4}{25}x_2^2)-\frac{4}{5}x_2^2 3x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2=$$

$$=5(x_1+\frac{2}{5}x_2)^2+\frac{11}{5}(x_2^2+\frac{20}{11}x_2x_3)+4x_3^2=$$

$$=5(x_1+\frac{2}{5}x_2)^2+\frac{11}{5}(x_2^2+2x_2\frac{10}{11}x_3+\frac{100}{121}x_3^2)=$$

$$=5(x_1+\frac{2}{5}x_2)^2+\frac{11}{5}(x_2+\frac{10}{11}x_3)^2+\frac{24}{11}x_3^2.$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} y_1=(x_1+\frac{2}{5}x_2), \\ y_2=(x_2+\frac{10}{11}x_3), \\ y_3=x_3. \end{cases}$$

После такой замены квадратичная форма примет вид: $=5{y_1}^2+\frac{11}{5}{y_2}^2+\frac{24}{11}y_3^2$.

Матрица A квадратичной формы имеет вид $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{11} \end{pmatrix}$.

Так как главные миноры матрицы

$$\Delta_1=5>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5} \end{vmatrix}=11>0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{11} \end{vmatrix}=24>0$$

то квадратичная форма является положительно определенной.

7.13. Пример решения заданий № 241—260

Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-2;\ 4)$, $B(6;\ -2)$, $C(8;\ 7)$.

Найти:

1) длину стороны AB;
2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол A;
4) уравнение высоты CD и ее длину;
5) уравнение и длину медианы AE;
6) уравнение окружности, для которой CD служит диаметром;
7) точку пересечения медиан;
8) уравнение прямой, проходящей через точку A, параллельно стороне CD.

Решение

1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяем по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Подставляя в нее координаты точек $A(-2; 4)$ и $B(6; -2)$, найдем длину стороны AB:

$$AB = \sqrt{(6-(-2))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10\,.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,.$$

Подставив в него координаты точек $A(-2; 4)$ и $B(6; -2)$, получим уравнение прямой AB:

$$\frac{y-4}{-2-4} = \frac{x-(-2)}{6-(-2)},$$

$$\frac{y-4}{-6} = \frac{x+2}{8},$$

$$8(y-4) = -6(x+2),$$

$$4(y-4) - 3(x+2),$$

$$4y - 16 = -3x - 6,$$

$$3x + 4y - 10 = 0\,.$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой AB разрешим уравнение этой прямой относительно y, то есть запишем в виде:

$$y = kx + b\,,$$

где k — угловой коэффициент:

$$3x + 4y - 10 = 0\,,$$

$$4y = -3x + 10\,,$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}.$$

Отсюда определяем угловой коэффициент прямой AB:

$$k_{AB}=-\frac{3}{4}.$$

Аналогично по двум точкам $A(-2;4)$ и $C(8;7)$ составим уравнение прямой AC:

$$\frac{y-4}{7-4}=\frac{x-(-2)}{8-(-2)},$$

$$\frac{y-4}{3}=\frac{x+2}{10},$$

$$10(y-4)=3(x+2),$$

$$10y-40=3x+6,$$

$$3x-10y+46=0.$$

Найдем угловой коэффициент k_{AC} прямой AC:

$$10y=3x+46,\quad y=\frac{3}{10}x+\frac{23}{5},\quad k_{AC}=\frac{3}{10}.$$

3. Угол φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых, соответственно, равны k_1 и k_2, находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Искомый внутренний угол A образован прямыми AB и AC, угловые коэффициенты которых $k_{AB}=-\frac{3}{4}$, $k_{AC}=\frac{3}{10}$. Отмечая на рисунке треугольника ABC в системе координат направление угла A против хода часовой стрелки, определяем порядок прямых: AB — первая, AC — вторая. Следовательно $k_1=k_{AB}=-\frac{3}{4}$, $k_2=k_{AC}=\frac{3}{10}$. Подставляем угловые коэффициенты в формулу угла между прямыми:

$$tgA=\frac{\frac{3}{10}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{10}}=\frac{\frac{6+15}{20}}{1-\frac{9}{40}}=\frac{\frac{21}{20}}{\frac{31}{40}}=\frac{21\cdot 40}{20\cdot 31}=\frac{42}{31}.$$

Тогда

$$\angle A=\operatorname{arctg}\frac{42}{31}.$$

4. Высота *CD* перпендикулярна стороне *AB*, поэтому угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, то есть

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ в заданном угловым коэффициентом *k* направлении, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Для составления уравнения высоты *CD* подставим в эту формулу координаты точки $C(8; 7)$ и угловой коэффициент $k_{CD} = \frac{4}{3}$:

$$y - 7 = \frac{4}{3}(x - 8),$$

$$3(y - 7) = 4(x - 8),$$

$$3y - 21 = 4x - 32,$$

$$4x - 3y - 11 = 0.$$

Найдем длину высоты *CD*, то есть расстояние от точки *C* до прямой *AB*. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $C(8; 7)$ и коэффициенты из уравнения прямой *AB* $3x + 4y - 10 = 0$:

$$CD = \frac{|3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{42}{\sqrt{25}} = \frac{42}{5} = 8{,}4.$$

5. Точка *E* — середина отрезка *BC*. Для определения ее координат применим формулы деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Подставляем в них координаты точек $B(6; -2)$ и $C(8; 7)$:

$$x_E = \frac{6 + 8}{2} = 7, \quad y_E = \frac{-2 + 7}{2} = \frac{5}{2}.$$

То есть $E\left(7;\frac{5}{2}\right)$.

Найдем длину медианы AE, то есть расстояние между точками $A(-2;4)$ и $E\left(7;\frac{5}{2}\right)$:

$$AE=\sqrt{(7-(-2))^2+\left(\frac{5}{2}-4\right)^2}=\sqrt{9^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{81+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{333}{4}}=\frac{3\sqrt{37}}{2}.$$

6. Точка D — точка пересечения прямых AB и CD. Чтобы найти ее координаты, решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases}3x+4y-10=0,\\4x-3y-11=0.\end{cases}$$

Применим правило Крамера:

$$\begin{cases}3x+4y=10,\\4x-3y=11;\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-4\cdot4=-9-16=-25,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}10 & 4\\11 & -3\end{vmatrix}=10\cdot(-3)-4\cdot11=-30-44=-74,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 10\\4 & 11\end{vmatrix}=3\cdot11-10\cdot4=33-40=-7,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{74}{25},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{7}{25}.$$

Итак, $D\left(\frac{74}{25};\frac{7}{25}\right)$.

Найдем координаты центра окружности, то есть середину отрезка CD, где $C(8;7)$, $D\left(\frac{74}{25};\frac{7}{25}\right)$:

$$x=\frac{8+\frac{74}{25}}{2}=\frac{274}{50}=\frac{137}{25},$$

$$y=\frac{7+\frac{7}{25}}{2}=\frac{182}{50}=\frac{91}{25}.$$

Итак, $M\left(\frac{137}{25};\frac{91}{25}\right)$ — центр окружности.

Радиус окружности R равен половине длины отрезка CD:

$$R=\frac{CD}{2}=\frac{42}{10}=\frac{21}{5}.$$

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где $(a;b)$ — координаты центра окружности;

R — ее радиус.

Подставив в него координаты точки $M\left(\frac{137}{25};\frac{91}{25}\right)$ и $R=\frac{21}{5}$, получим уравнение окружности, для которой CD является диаметром:

$$\left(x-\frac{137}{25}\right)^2+\left(y-\frac{91}{25}\right)^2=\left(\frac{21}{5}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{137}{25}\right)^2+\left(y-\frac{91}{25}\right)^2=\frac{441}{25}.$$

7. Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2:1$, начиная от вершины. Найдем координаты точки N, делящей медиану AE в отношении $\lambda=\frac{AN}{NE}=\frac{2}{1}=2$. Используем формулы деления отрезка в данном отношении:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Подставим в них координаты точек $A(-2;4)$, $E\left(7;\frac{5}{2}\right)$ и $\lambda=2$:

$$x_N=\frac{-2+2\cdot 7}{1+2}=4,\quad y_N=\frac{4+2\cdot\frac{5}{2}}{1+2}=3.$$

Итак, $N(4;3)$ — точка пересечения медиан.

8. Составим уравнение прямой l (рис. 1), проходящей через точку A, параллельно стороне CD. Из условия параллельности прямых l и CD

следует, что их угловые коэффициенты равны, то есть $k_l = k_{CD} = \frac{4}{3}$. Подставляя в формулу $y - y_1 = k(x - x_1)$ координаты точки $A(-2;4)$ и $k_l = \frac{4}{3}$, получим уравнение прямой l:

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - (-2)),$$
$$3y - 12 = 4x + 8,$$
$$4x - 3y + 20 = 0.$$

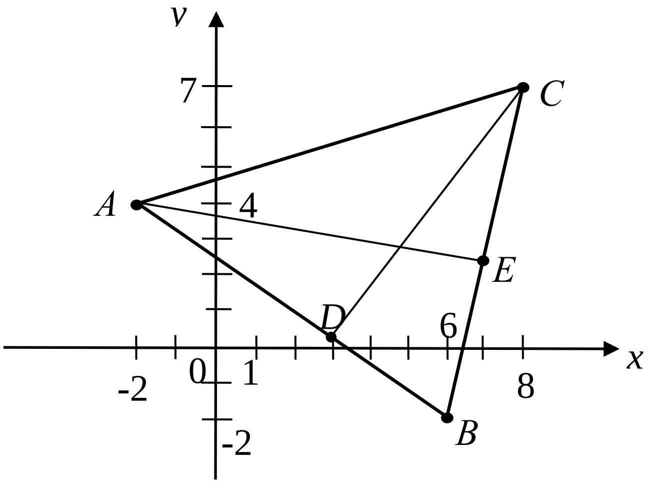

Рис. 1. Треугольник ABC

7.14. Пример решения заданий № 261—208

Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Решение

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1,$$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ — каноническое уравнение эллипса.

Так как $a^2 = 9$, то $a = 3$ — большая полуось, $b^2 = 4$, $b = 2$ — малая полуось.

$A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$ — *вершины эллипса.*

Найдем с — расстояние от центра эллипса до каждого фокуса по формуле связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим $c^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$. Тогда $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$ — фокусы эллипса (рис. 2).

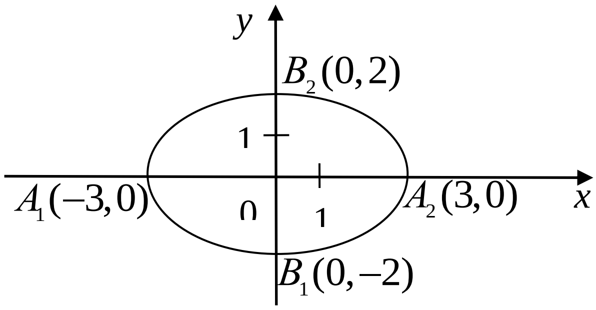

Рис. 2. Эллипс

Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, получим $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

7.15. Пример решения заданий № 281—300

Даны действительная полуось $a = 2\sqrt{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{3}$ гиперболы. Составить уравнение гиперболы и найти координаты ее вершин, фокусов, уравнения асимптот. Построить гиперболу.

Решение

$A_1(-2\sqrt{3}; 0)$, $A_2(2\sqrt{3}; 0)$ — вершины гиперболы.

Из формулы для нахождения эксцентриситета гиперболы $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ найдем значение *c* — расстояние от центра гиперболы до каждого фокуса:

$$c = \varepsilon a = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Тогда $F_1(-6; 0)$, $F_2(6; 0)$ — фокусы гиперболы.

Из формулы связи $c^2 = a^2 + b^2$ найдем мнимую полуось b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 36 - 12 = 24,$$

$$b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Составим каноническое уравнение гиперболы, которое имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Получим

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

Уравнения асимптот гиперболы:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Подставив $a = 2\sqrt{3}$, и $b = 2\sqrt{6}$, получим:

$$y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} x.$$

После преобразований имеем уравнения асимптот данной гиперболы (рис. 3):

$$y = \pm\sqrt{2}x.$$

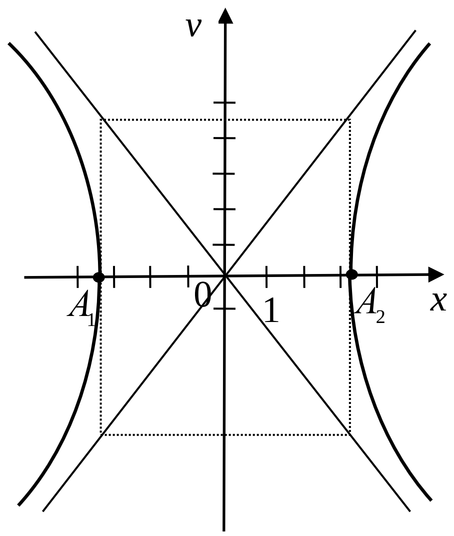

Рис. 3. Гипербола

7.16. Пример решения заданий № 301-320

Дано уравнение параболы $y^2 = 4x$ (рис. 4). Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

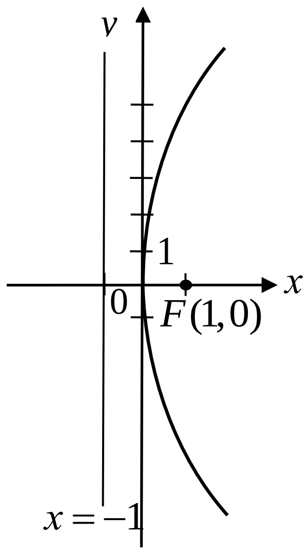

Рис. 4. Парабола

Решение

$y^2 = 4x$ — уравнение параболы, с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси *Ox*, с ветвями, идущими вправо. $y^2 = 2px$ — общий вид уравнения такой параболы, где p — расстояние между фокусом и директрисой.

Из уравнения находим: $2p = 4$, откуда $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$.

Директрисой параболы $y^2 = 2px$ является прямая, параллельная оси *Oy*, с уравнением $x = -\frac{p}{2}$, а фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Таким образом, для данной параболы директрисой служит прямая $x = -1$, а точка $F(1; 0)$ — фокусом.

Учебно-методическое издание

Линейная алгебра : учебно-методическое пособие / сост. Л.Б. Рыбина, А.Е. Березкина. — 2-е изд., исправл. — Караваево : Костромская ГСХА, 2021. — 45 с. ; 20 см. — 100 экз. — Текст непосредственный.

Учебно-методическое пособие издаётся в авторской редакции

156530, Костромская обл., Костромской район, пос. Караваево, уч. городок, д. 34

Компьютерный набор. Подписано в печать 21/07/2021. Заказ № 653.
Формат 60х84/16. Тираж 100 экз. Усл. печ. л. 2,88. Бумага офсетная.
Отпечатано 21/07/2021. Цена 44,00 руб.

вид издания: 2-е изд., испр. (электронная версия)
(редакция от 1.06.2021 № 653)

2021*653

Отпечатано с готовых оригинал-макетов в академической
типографии на цифровом дубликаторе. Качество соответствует
предоставленным оригиналам.
(Электронная версия издания - I:\подразделения \рио\издания\2021\653.pdf)

Цена 44,00 руб.

ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

2021*653

(Электронная версия издания - I:\подразделения \рио\издания\2021\653.pdf)