Самостоятельное изучение учебного материала

Определенный интеграл

Изучите вопросы:

1. Понятие определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Основные свойства определенного интеграла.
5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

1. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. Выполним следующие действия:

1) С помощью точек $x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) разобьем отрезок $[a;b]$ на n *частичных отрезков* $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$.

2) В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, i = 1, 2, …, n выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

3) Умножим найденное значение $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

4) Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i$ (i = 1, 2, …, n).

5) Найдем предел интегральной суммы S_n, когда $n \to \infty$ так, что $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то он и называется ***определенным интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, отрезок $[a;b]$ — *областью* (*отрезком*) *интегрирования*.

Функция $y=f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется *интегрируемой* на этом отрезке.

Теорема*:* Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

2. Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)\geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу — осью *Ox*. сбоку — прямыми $x=a$, и $x=b$, называется *криволинейной трапецией*.

Тогда определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади этой криволинейной трапеции.

3. Формула Ньютона-Лейбница

Для вычисления определённого интеграла применяется формула Ньютона – Лейбница

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),}$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ нужно:

1) найти первообразную $F(x)$ (при $C=0$),

2) в полученное выражение подставить вместо *x* пределы интегрирования, сначала верхний, а затем нижний и из первого результата вычесть второй.

Пример. Вычислить определённые интегралы, применяя формулу Ньютона-Лейбница:

а) $\int_1^2 x^3 dx$; *б)* $\int_1^4 \sqrt{x}dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; *г)* $\int_0^5 \frac{dx}{x^2+25}$.

Решение

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислим данные определенные интегралы:

а) $\int_1^2 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$;

б) $\int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \left.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right|_1^4 = \frac{2}{3}4\sqrt{4} - \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left.\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$;

г) $\int_0^5 \frac{dx}{x^2+25} = \left.\frac{1}{5} arctg\frac{x}{5}\right|_0^5 = \frac{1}{5}(arctg 1 - arctg\, 0) = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{20}$.

4. Основные свойства определенного интеграла

1. Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрировании, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разделён точкой c на два отрезка $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

6. Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждой из этих функции:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Пример: Вычислить определённые интегралы:

$а)\ \int_{-1}^{2}(4x^3-1)dx$; $\quad$ $б)\ \int_1^4 (x^2-2x+\frac{1}{2\sqrt{x}})dx$; $\quad$ $в)\ \int_0^{\pi}(e^x-\frac{1}{2}\cos x)dx$.

Решение

Применяя свойства определённого интеграла и формулу Ньютона-Лейбница, вычислим интегралы:

$$а)\ \int_{-1}^{2}(4x^3-1)dx = 4\int_{-1}^{2}x^3dx - \int_{-1}^{2}dx = 4\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{2} - \left.x\right|_{-1}^{2} = \left.x^4\right|_{-1}^{2} - \left.x\right|_{-1}^{2} =$$

$$= 4\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{2} - \left.x\right|_{-1}^{2} = \left.x^4\right|_{-1}^{2} - \left.x\right|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2^4-(-1)^4\right) - \left(2-(-1)\right) = (16-1)-3 = 12;$$

$$б)\ \int_1^4\left(x^2-2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 x^2dx - 2\int_1^4 xdx + \frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 - 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^4 + \frac{1}{2}\left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^4 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 - \left.x^2\right|_1^4 + \left.\sqrt{x}\right|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3}-\frac{1}{3}\right) - \left(4^2-1^2\right) + \left(\sqrt{4}-\sqrt{1}\right) = 21-15+1 = 7;$$

$$в)\ \int_0^{\pi}(e^x-\frac{1}{2}\cos x)dx = \int_0^{\pi}e^xdx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos xdx = \left.e^x\right|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left.\sin x\right|_0^{\pi} =$$

$$= \left(e^{\pi}-e^0\right) - \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin 0\right) = e^{\pi}-1.$$

5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Замену переменных в определенном интеграле выполняют по тем же правилам, что и в неопределенном, только, с учетом замены, устанавливают пределы для новой переменной интегрирования. При этом не надо возвращаться к первоначальной переменной интегрирования. (как это было в неопределенном интеграле).

Пример: Вычислить $\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Решение

$$\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{Замена} \\ \sqrt{x+1} = t, \quad x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \\ \text{Новые пределы:} \\ t_1 = \sqrt{x+1}\,\Big|_{x=0} = 1 \\ t_2 = \sqrt{x+1}\,\Big|_{x=3} = 2 \end{array} \right.$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int\limits_1^2 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) - 2\left(\frac{1}{3} - 1\right) = {}^{8}\!/\!_{3}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняют с помощью формулы

$$\boxed{\int\limits_a^b udv = (u \cdot v)\ \Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu}$$

Пример: Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi x\cos xdx.$

Решение

$$\int\limits_0^\pi x\cos xdx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos xdx \Rightarrow \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{array} \right.$$

$$\overset{(20)}{=} x\sin x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin xdx = (\pi \sin \pi - 0) + \cos x\Big|_0^\pi =$$

$$= \cos \pi - \cos 0 = -2.$$

Самостоятельное изучение учебного материала

Применение определенного интеграла

Изучите вопросы:

1. Геометрические приложения определенного интеграла:

1) Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах.

2) Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.

3) Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

4) Вычисление длины дуги плоской кривой в полярной системе координат.

5) Вычисление объема тела вращения.

1. Геометрические приложения определенного интеграла

1) Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах.

1) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу — осью *Ox*, вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x - x^2 - 5$ и осью *Ox*.

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

Найдем абсциссы точек пересечения параболы с осью *Ox*:

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 - 5, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$-x^2 + 6x - 5 = 0,$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 5.$$

Тогда

$$S = \int_1^5 (6x - x^2 - 5)dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} - 5x\right)\Bigg|_1^5 =$$

$$= 75 - \frac{125}{3} - 25 - 3 + \frac{1}{3} + 5 = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

2) Если криволинейная трапеция расположена ниже оси абсцисс, то есть $f(x) \le 0$ на отрезке $[a, b]$, то ее площадь вычисляется по формуле

$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)dx}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x$, прямыми $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$ и осью *Ox*.

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

$$S = -\int_{\frac{1}{2}}^{3} \left(x^2 - 4x\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{3} = -9 + 18 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2} = 8\frac{13}{24} \text{ (кв. ед.)}$$

3) Площадь фигуры, ограниченной сверху непрерывной кривой $y = f(x)$, снизу — непрерывной кривой $y = g(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 3x$ и прямой $y = 4 - 3x$.

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x, \\ y = 4 - 3x; \end{cases}$$

$$x^2 - 3x = 4 - 3x,$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$

Тогда

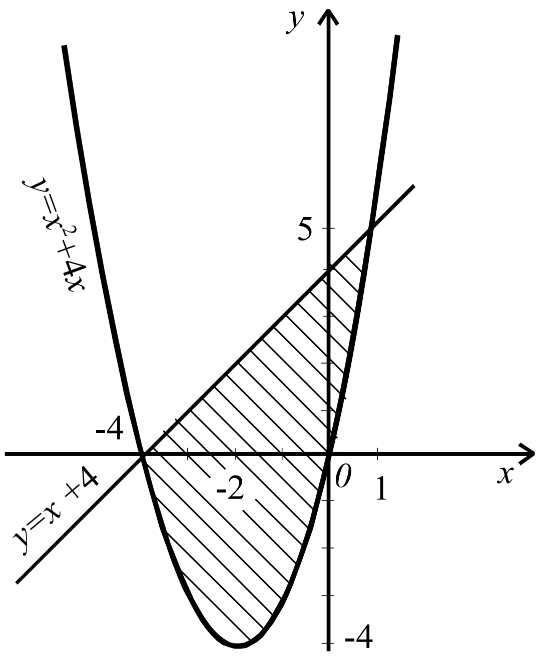
$$S = \int_{-2}^{2} \left(4 - 3x - x^2 + 3x\right)dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)dx = 2\int_{0}^{2} \left(4 - x^2\right)dx =$$

$$= 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$, (сделать чертеж).

Решение

Построим эскиз фигуры:



Площадь S фигуры, ограниченной сверху и снизу графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, пересекающимися в точках с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле $S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx.$

Для нахождения абсцисс точек пересечения данных линий решим систему уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4; \end{cases}$$

$$x^2 + 4x = x + 4,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Тогда

$$S = \int_{-4}^{1} \left(x + 4 - x^2 - 4x \right) dx = \int_{-4}^{1} \left(4 - 3x - x^2 \right) dx = \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6}\left(\text{кв. ед.}\right).$$

4) Если уравнение контура задана ***параметрическими уравнениями***

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt},$$

где t_1 и t_2 определяются из соотношений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом, заданным параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то вычислим вначале четвертую часть искомой площади.

Найдем пределы для параметра t. Так как x изменяется от 0 до a, то имеем:

$$0 = a\cos t,\ t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ — нижний предел;}$$

$$a = a\cos t,\ t_2 = 0 \text{ — верхний предел.}$$

Тогда

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Следовательно, площадь эллипса $S = \pi ab$.

2) Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.

Пусть задана полярная система координат.

- *Криволинейным сектором* наз. плоская фигура, ограниченная непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $r = \alpha$ и $r = \beta$.

Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ и полярной осью.

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2\varphi^3}{6}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3 a^2}{3}.$$

3) Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

а) Длина дуги *AB* кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, где $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}.$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, если $0 \le x \le 5$.

Решение

Найдем производную:

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x dx} = \frac{4}{9}\int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \left.\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^5 = \frac{8}{27}\left.\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right|_0^5 = \frac{8}{27}\left(\frac{7}{3}\right)^3 - \frac{8}{27} = \frac{335}{27} \text{ (ед.)}$$

б) Длина дуги *AB* кривой, заданной ***параметрическими уравнениями*** $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$, где $t_1 \le t \le t_2$, вычисляется по формуле

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt}.$$

Пример. Вычислить длину астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Решение

Рисунок кривой сделайте самостоятельно.

Кривая симметрична относительно осей координат. Вычислим длину той части, которая расположена в первой четверти, в этом случае *t* будет изменяться от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Предварительно найдем производные:

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t,$$
$$y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t.$$

Тогда

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t}\cdot dt=$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\cdot dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\sin t\cdot dt=$$

$$=-3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot d(\cos t)=-3a\cdot\left(\frac{\cos^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-3a\cdot\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\cos^2 0}{2}\right)=\frac{3a}{2}.$$

Следовательно, длина астроиды $l=6a$.

4) Вычисление длины дуги плоской кривой в полярной системе координат.

Длина дуги кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$. вычисляется по формуле

$$\boxed{l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\cdot d\varphi}.$$

Пример. Найти длину кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$.

Решение

Рисунок кривой сделайте самостоятельно.

Кривая симметрична относительно полярной оси. При изменении полярного угла от 0 до π имеем половину кривой.

Найдем производную:

$$r'=-a\sin\varphi.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}l=\int_0^\pi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi=$$

$$=a\int_0^\pi\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\cdot d\varphi=a\int_0^\pi\sqrt{2+2\cos\varphi}\cdot d\varphi=$$

$$=a\int_0^\pi\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\cdot d\varphi=a\int_0^\pi\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\cdot d\varphi=2a\int_0^\pi\cos\frac{\varphi}{2}\cdot d\varphi=$$

$$=4a\int_0^\pi\cos\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=4a.$$

Следовательно, длина кардиоиды $l=8a$.

5) Вычисление объема тела вращения.

а) Вокруг оси *Ox* вращается криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x=a$, $x=b$, снизу — осью *Ox*. Получается тело вращения, объем которого вычисляется по формуле

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b y^2 dx}.$$

Пример.

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейная трапеция, ограниченной параболой $y^2 = 4x$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью *Ox*.

Решение

Рисунок фигуры вращения и тела вращения сделайте самостоятельно.

$$V_x = \pi \int_1^3 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_1^3 = 18\pi - 2\pi = 16\pi \text{ (куб. ед.)}$$

2) Вокруг оси *Oy* вращается криволинейная трапеция, ограниченная справа графиком непрерывной функции $x = g(y)$, снизу и сверху — соответственно прямыми $y = c$, $y = d$, слева — осью *Oy*. Получается тело вращения, объем которого вычисляется по формуле

$$\boxed{V_y = \pi \int_c^d x^2 dy}.$$

Пример.

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 2$, прямыми $y = 2$, $y = 4$ и осью *Oy*.

Решение

Рисунок фигуры вращения и тела вращения сделайте самостоятельно.

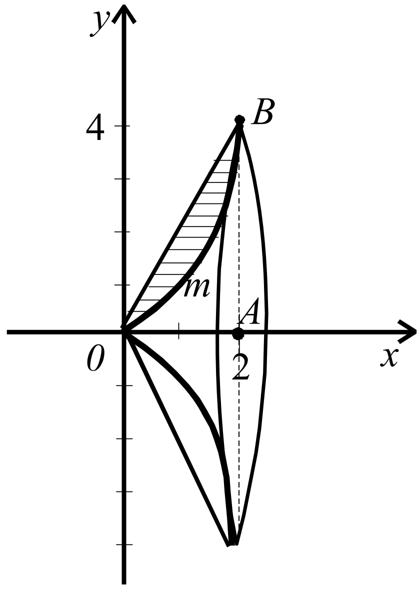
$$V_y = \pi \int_2^4 \left(\frac{2}{y} \right)^2 dy = 4\pi \int_2^4 y^{-2} dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y} \right) \Bigg|_2^4 = -\pi + 2\pi = \pi \text{ (куб. ед.)}$$

Пример.

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x$, вокруг оси *Ox*.

Решение

Построим эскиз тела:



Пусть V_1 — объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры $OABmO$, а V_2 — объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox треугольника OAB. Тогда искомый объем V_x равен разности объемов V_2 и V_1:

$$V_x = V_2 - V_1.$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, находится по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, находим абсциссы точек пересечения данных линий. Для этого решим систему уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x; \end{cases}$$

$$x^2 = 2x,$$

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x(x-2) = 0,$$

$$x_1 = 0, \ \ x_2 = 2.$$

Следовательно,

$$V_x = V_2 - V_1 = \pi \int_0^2 (2x)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 =$$

$$= \pi \left[\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right] = \frac{64}{15}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $V = \dfrac{64}{15}\pi$ (куб. ед.).