САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ

Ряды Фурье

§ 1. Периодические функции и периодические процессы. Свойства периодических функций

В естествознании и технике часто приходится иметь дело с периодическими процессами: колебательными и вращательными движениями различных деталей, машин и приборов, периодическими движениями тел и элементарных частиц, акустическими и электромагнитными колебаниями и т.д. Периодические процессы — это процессы, которые повторяются через определенный промежуток времени, называемый периодом. Математически все такие процессы описываются периодическими функциями.

Def. Функция $f(x)$, определенная на множестве D, называется периодической, если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in D$ числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат множеству D, и выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Число $T \neq 0$ называют периодом функции.

Из определения следует, что периодическая функция имеет бесчисленное множество периодов. Из всех периодов выбирают *наименьший положительный* период, который называют основным периодом.

Наименьшим положительным периодом функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является $T = 2\pi$.

Наименьшим положительным периодом функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = ctg\ x$ является число $T = \pi$.

Свойства периодических функций

1. Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих один и тот же основной период T, есть периодическая функция с периодом T.

2. Если функция $f(x)$ имеет основной период T, то функция $f(kx + b)$ будет также периодической с основным периодом, равным $\frac{T}{|k|}$ $(k \neq 0)$.

3. Для того чтобы сумма двух периодических функций с периодами T_1 и T_2 была периодической функцией, достаточно, чтобы отношение $\frac{T_1}{T_2}$ было рациональным числом, т.е. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$. Число $T_1 q = T_2 p$ и будет периодом суммы.

4. Если функция $f(x)$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[x_0, x_1]$, $(x_0, x_1 \in R)$, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)dx$ для любых a и b, принадлежащих отрезку $[x_0, x_1]$.

Свойства 1-3 известны из школьного курса математики.

Докажем свойство 4.

Пусть, например, $0 < a < b < T$, тогда по свойству определенных интегралов

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{a+T} f(x)dx. \qquad (1)$$

Но, с другой стороны,

$$\int_b^{b+T} f(x)dx = \int_b^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx. \qquad (2)$$

Так как $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \left[\begin{array}{l} x = u + T,\ u = x - T \\ dx = du \\ u_H = a, u_B = b \end{array}\right] = \int_a^b f(u+T)du = \int_a^b f(x)dx$,

то равенство (2) примет вид $\int_a^{b+T} f(x)dx = \int_b^{a+T} f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$,

а $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b+T} f(x)dx - \int_b^{a+T} f(x)dx$.

Тогда из равенства (1) получим:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx - \int_b^{a+T} f(x)dx + \int_b^{a+T} f(x)dx,$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

В частности, $\int_0^T f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$.

Пример 1. Найдите сумму значений параметра a, при которых период функции $y = tg((3a - 1)x)$ равен π.

Решение

Период $f(x) = tg\, x$ равен π. По свойству 2 периодических функций: если $f(x)$ имеет основной период T, то функция $f(kx + b)$ имеет основной период, равный $\frac{T}{|k|}$.

Так как $k = 3a - 1$, то $\frac{\pi}{|3a-1|} = \pi$.

Отсюда $|3a - 1| = 1$,

$$\left[\begin{array}{l} 3a-1=1, \\ 3a-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{3}. \\ a=0 \end{array}\right.$$

Сумма значений параметра a равна $\dfrac{2}{3}+0=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

Пример 2. На рисунке 1 изображен график периодической функции $y = f(x)$.

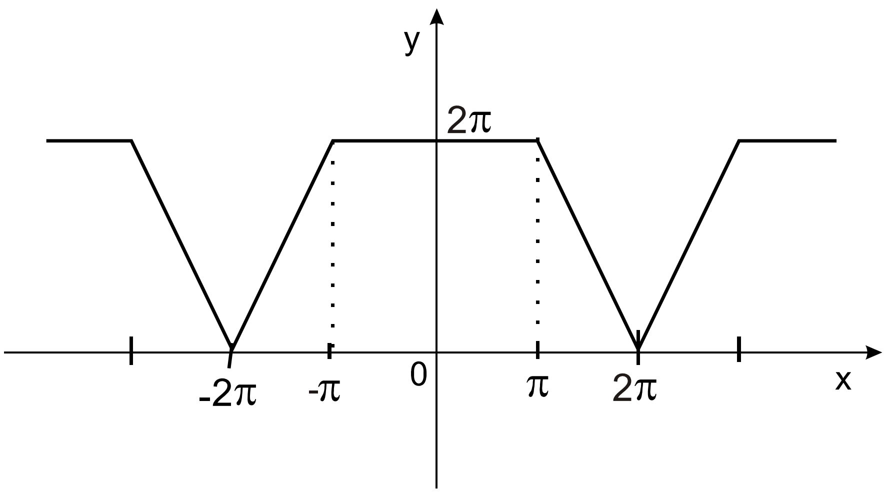

Рис. 1

Тогда ее аналитическое представление на отрезке [– 2π, 2π] будет иметь вид…

Варианты ответа

1) $f\left(x\right)=\begin{cases} x-2\pi, \text{ если } -2\pi \le x \le -\pi, \\ 2\pi, \text{ если } -\pi < x < \pi, \\ 2\pi + x, \text{ если } \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$

2) $f\left(x\right)=\begin{cases} 2x-4\pi, \text{ если } -2\pi \le x \le -\pi, \\ 2\pi, \text{ если } -\pi < x < \pi, \\ 4\pi + 2x, \text{ если } \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$

3) $f\left(x\right)=\begin{cases} x+2\pi, \text{ если } -2\pi \le x \le -\pi, \\ 2\pi, \text{ если } -\pi < x < \pi, \\ 2\pi - x, \text{ если } \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$

4) $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+4\pi, \text{ если } -2\pi\le x\le-\pi,\\ 2\pi, \text{ если } -\pi<x<\pi,\\ 4\pi-2x, \text{ если } \pi\le x\le 2\pi.\end{cases}$

Решение

1) На отрезке [– 2π; – π] графиком функции $f(x)$ является отрезок прямой, проходящей через точки (– 2π; 0) и (– π; 2π).

Угловой коэффициент этой прямой $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

$$k=\frac{2\pi-0}{-\pi-(-2\pi)}=2.$$

Уравнение прямой: $y-y_1=k(x-x_1)$,

$y-0=2(x+2\pi)$; $y=2x+4\pi$.

2) $f(x)=2\pi$ при $-\pi<x<\pi$.

3) На отрезке [π, 2π] графиком функции $f(x)$ является отрезок прямой $y=4\pi-2x$.

Тогда $f(x)=\begin{cases}2x+4\pi, \text{ если } -2\pi\le x\le-\pi,\\ 2\pi, \text{ если} -\pi<x<\pi,\\ 4\pi-2x, \text{ если } \pi\le x\le 2\pi.\end{cases}$

Ответ: 4).

Пример 3. Наименьший положительный период функции

$y=3\sin x+\cos\dfrac{x}{2}$ равен…

Варианты ответа

1) 3π; 2) 4π; 3) 2π; 4) $\dfrac{\pi}{2}$.

Решение

Используем 3-е свойство периодических функций.

Функция $y=\sin x$ имеет основной период $T_1=2\pi$.

Функция $y=\cos\dfrac{x}{2}$ имеет основной период $T_2=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

$\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{2\pi}{4\pi}$; $4T_1=2T_2$ или $T_2=2T_1=4\pi$.

Ответ: 2).

§ 2. Гармонические колебания

Гармоническими колебаниями называется закон движения, определяемый функцией

$$S(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \text{ или } S(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где t — время;

ω — частота;

φ — начальная фаза.

Def. Функции вида $S(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ или $S(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ называются *простыми гармониками*.

Простые гармоники являются периодическими функциями с периодом

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}.$$

Линейная комбинация $a\cos\omega t + b\sin\omega t$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, является простой гармоникой.

Докажем это:

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega t\right),$$

так как $$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

то можно ввести вспомогательный угол φ такой, что

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ а } \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\cos\omega t + \cos\varphi\sin\omega t).$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega t + \varphi)$$

Получили простую гармонику с амплитудой колебаний $A = \sqrt{a^2+b^2}$, частотой ω и начальной фазой φ.

Пример 3. Гармонические колебания с амплитудой B, частотой n и начальной фазой φ описываются законом…

Варианты ответа

1) $f(x) = B\cos(nx - \varphi);$

2) $f(x) = \dfrac{B}{(nx-\varphi)};$

3) $f(x) = B(nx-\varphi)^2;$

4) $f(x) = B\sqrt{nx-\varphi}.$

Ответ: 1).

Пример 4. Гармонические колебания с амплитудой, равной 2, частотой 3 и начальной фазой $\frac{4\pi}{3}$, описывается законом…

Варианты ответа

1) $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$; 3) $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right)$;

2) $f(x) = \frac{4\pi}{3}\sin(3x+2)$; 4) $f(x) = 2\sin\left(\frac{4\pi x}{3} + 3\right)$.

Ответ: 3).

Пример 5. Найдите амплитуду гармонических колебаний

$3\sin 2x + 4\cos 2x$.

Решение

$A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = 3$, $b = 4$. Тогда $A = \sqrt{9+16} = 5$.

Ответ: 5.

Пример 6. Если число $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ рациональное, то сумма двух гармоник $A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$ является…

Варианты ответа

1) периодической функцией; 3) квадратичной;

2) общего вида; 4) непериодической.

Решение

Так как $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ — рациональное число, то по свойству периодических функций сумма $A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$ является периодической функцией.

Ответ: 1).

Пример 7. Функция $f(t) = \sin 2t \cos^2 2t - \sin 5t \cos 3t$, представленная суммой гармоник, имеет вид…

Варианты ответа

1) $f(t) = \sin 2t + \sin 6t - \sin 8t$;

2) $f(t) = \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\cos 6t - \frac{1}{2}\sin 8t$;

3) $f(t) = -\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 6t - \frac{1}{2}\sin 8t$;

4) $f(t)=\frac{1}{2}\sin 4t\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 8t$.

Решение

Преобразуем функцию $f(t)=\sin 2t\cos^2 2t-\sin 5t\cos 3t$, используя формулы тригонометрии:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right), \text{ получим}$$

$$f(t)=\sin 2t\frac{1+\cos 4t}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin 8t+\sin 2t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\quad\cos 4t-\frac{1}{2}\sin 8t-\frac{1}{2}\sin 2t=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin 6t+\sin(-2t)\right)-\frac{1}{2}\sin 8t=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 6t-\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin 8t.$$

Итак, $f(x)=-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 6t-\frac{1}{2}\sin 8t$, что соответствует 3-му варианту ответов.

Ответ: 3).

§ 3. Тригонометрические ряды

Def. Функциональный ряд вида

$$\begin{aligned}&\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots\\&\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots=\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\end{aligned}\qquad(3)$$

называется тригонометрическим рядом, а постоянные a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) — коэффициентами ряда.

Частичные суммы $S_n(x)$ тригонометрического ряда (3) являются линейными комбинациями из системы функций: 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, …, которая называется *тригонометрической* системой

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Так как все слагаемые суммы $S_n(x)$ являются периодическими функциями с периодом 2π, то в случае сходимости ряда (3) его сумма $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ будет также периодической функцией с периодом $T = 2\pi$.

Def. Разложить периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$ в тригонометрический ряд (3) означает найти сходящийся тригонометрический ряд, сумма которого равна $f(x)$, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Возникают следующие вопросы:

1. Всякую ли периодическую функцию с периодом $T = 2\pi$ можно разложить в тригонометрический ряд?

2. Как найти коэффициенты a_0, a_n, b_n, если это разложение возможно?

3. Какова зависимость между характером сходимости ряда (1) и свойствами функции $f(x)$?

Для определения коэффициентов a_0, a_n, b_n введем понятие ортогональности тригонометрической системы.

§ 4. Ортогональность тригонометрической системы функций

Def. Функции $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные на отрезке $[a; b]$, называются ортогональными на этом отрезке, если выполняется условие

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Например, функции $f(x) = x$ и $g(x) = x^4$ ортогональны на $[-2; 2]$, так как

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x\,x^4 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_{-2}^{2} = 0.$$

Def. Конечная или бесконечная система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$,…, где $\varphi_n(x) \not\equiv 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$, интегрируемых на отрезке $[a, b]$, называется ортогональной системой на отрезке $[a, b]$, если для любых номеров m и n таких, что $m \neq n$, выполняется равенство

$$\int_a^b \varphi_m(x) \quad \varphi_n(x)dx = 0.$$

Теорема. Тригонометрическая система функций: 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, …, $\cos nx$, $\sin nx$… ортогональна на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Доказательство

1. Докажем, что при любом $n \neq 0$ функции 1 и $\cos nx$ ортогональны.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ при } n \neq 0.$$

Таким образом, имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} 0 \text{ при } n \neq 0 \text{ и } n \in Z, \\ 2\pi \text{ при } n = 0. \end{cases}$$

Функции 1 и $\sin nx$ ортогональны на $[-\pi; \pi]$ при $n \neq 0$, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$, при $n \neq 0$, $n \in Z$.

Используя известные из тригонометрии формулы

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

для любых целых m и n ($m \neq n$), находим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

т.к. синусы углов, кратных π, равны нулю.

Если $m = n$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4n}\sin 2nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Таким образом, имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ при } m \neq n,\ m \in Z,\ n \in Z, \\ \pi \text{ при } m = n. \end{array}\right.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \quad \sin nx dx = \left[\begin{array}{l} 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \quad m, n \in Z, \\ \pi \quad \text{при} \quad m = n, \end{array}\right.$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$ для любых m, $n \in Z$.

§ 5. Тригонометрический ряд Фурье

Теорема. Пусть равенство

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (4)$$

имеет место для всех значений *x*, причем тригонометрический ряд (4) сходится равномерно на отрезке [–π; π]. Тогда справедливы формулы:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ (n=1,\,2,\,3,\,\ldots), \qquad (5)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ (n=1,\,2,\,3,\,\ldots).$$

Доказательство

Равномерно сходящиеся функциональные ряды можно почленно интегрировать по любому замкнутому отрезку, принадлежащему области равномерной сходимости.

Интегрируя обе части равенства (4) по промежутку [–π; π], получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nxdx\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0 \text{ при } n\neq 0 \text{ (см. § 4)},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0 \text{ для всех целых } n \text{ (см. § 4)}.$$

Тогда $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=a_0\pi$, отсюда $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$.

Умножим обе части равенства (4) на cos *mx*, где $m\in N$:

$$f(x)\cos mx=\frac{a_0}{2}\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos mx\cos nx+b_n\cos mx\sin nx\right).$$

Полученный после умножения на cos *mx* ряд сходится равномерно на [–π; π], следовательно, его можно почленно интегрировать:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\ \cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\ \sin nxdx\right).$$

По доказанному в § 4

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx = 0\text{, для } m\in N,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \quad \sin nxdx = 0,\ \text{для любых } m,\, n\in Z,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \sin \cos nxdx = \begin{cases} 0, \text{ если } m \neq n, \\ \pi, \text{ если } m = n. \end{cases}$$

Поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = a_m\,\pi$, откуда

$$a_m = a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx\,.$$

Аналогично после умножения обеих частей равенства (4) на sin mx и почленного интегрирования полученного ряда найдем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx\,.$$

Теорема доказана.

Def. Тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$, коэффициенты которого a_0, a_n, b_n, определяются по формулам (5):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$, n = 1, 2, 3, … называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$, а коэффициенты a_0, a_n, b_n, определяемые по этим формулам, называются коэффициентами Фурье.

Формально каждой интегрируемой на [–π; π] функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$.

Осталось выяснить, когда знак соответствия (~) можно заменить знаком равенства, т.е. при каких условиях полученный ряд будет сходиться к функции $f(x)$.

Замечание. Если функцию $f(x)$, определенную лишь на отрезке [–π; π] и, следовательно, не являющуюся периодической, требуется разложить в ряд Фурье, то по формулам (5) можно определить для этой функции коэффициенты Фурье и написать ряд Фурье.

Если продолжить $f(x)$ периодически на всю числовую ось, то получим функцию $f(x)$, периодическую с периодом 2π, совпадающую с $f(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$:

$$F(x) = f(x) \text{ для } \forall x \in (-\pi; \pi).$$

Эту функцию $F(x)$ называют периодическим продолжением функции $f(x)$. При этом Функция $F(x)$ не имеет однозначного определения в точках $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$

Например, для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-\pi; \pi]$, график которой изображен на рис. 2, периодическим продолжением может быть функция $F(x)$, график которой изображен на рис. 3.

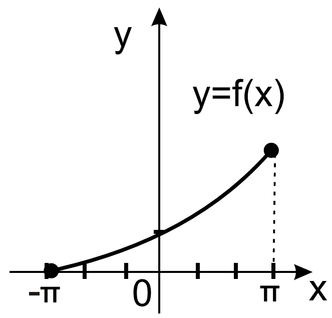

Рис. 2

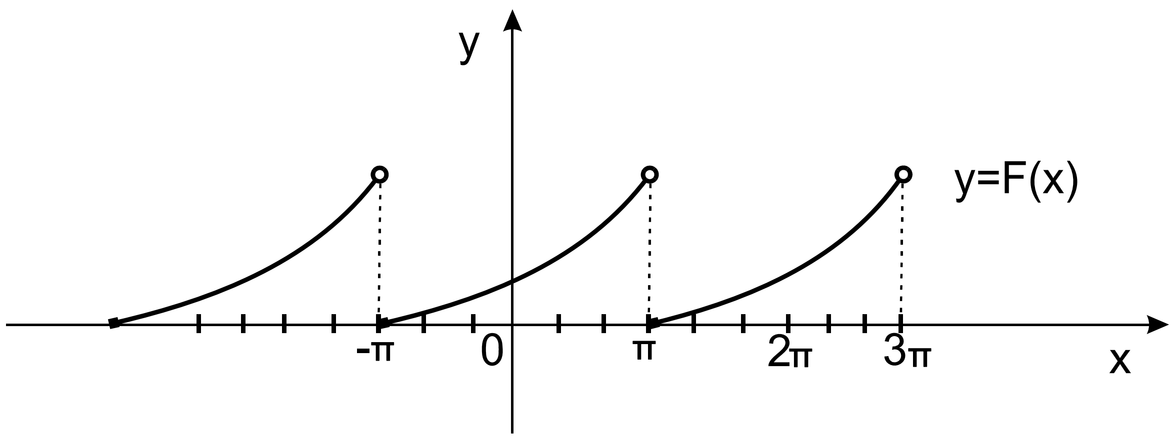

Рис. 3

Ряд Фурье для функции $F(x)$ тождественно равен ряду Фурье для функции $f(x)$. Если ряд Фурье для $F(x)$ сходится к этой функции, то его сумма, являясь периодической функцией, дает периодическое продолжение функции $f(x)$ с отрезка $[-\pi; \pi]$ на всю ось Ox. Поэтому признаки сходимости рядов Фурье достаточно сформулировать лишь для периодических функций.

§ 6. Достаточный признак разложимости функции в ряд Фурье

Def. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на интервалы $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$, на каждом из которых $f(x)$ монотонна, т.е. либо только возрастающая, либо только убывающая, либо постоянна (рис. 4).

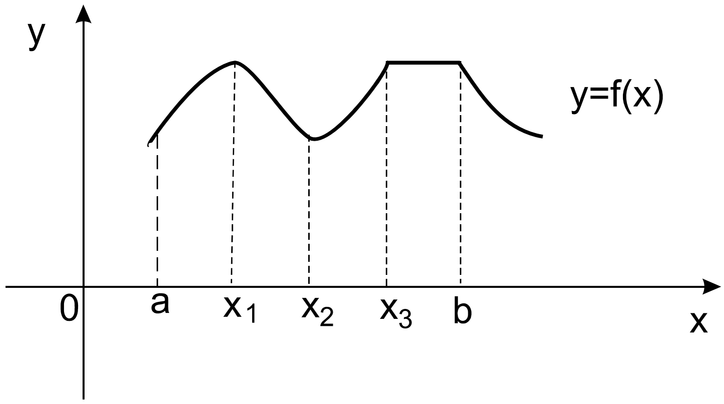

Рис. 4

Можно доказать, что кусочно-монотонная функция, ограниченная на отрезке $[a, b]$, может быть непрерывной на этом отрезке или иметь на нем только точки разрыва первого рода (рис. 5).

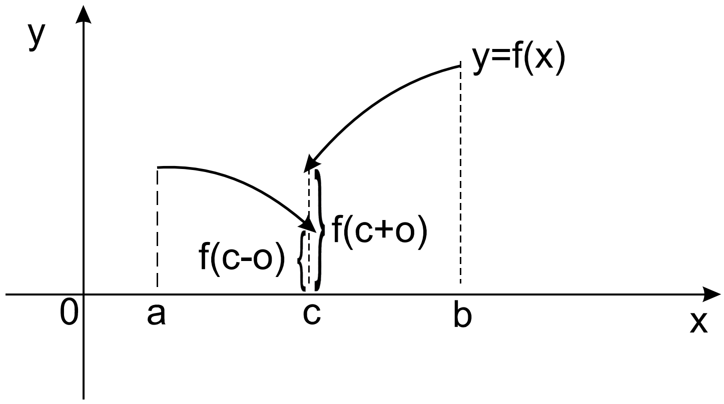

Рис. 5

Сформулируем достаточный признак разложимости функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Теорема (Дирихле). Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-монотонна и ограничена на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке x этого отрезка, причем для суммы

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

этого ряда выполняются равенства:

1) $S(x) = f(x)$, если $-\pi < x < \pi$ и x является точкой непрерывности функции $f(x)$;

2) $S(x)=\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$, если x является точкой разрыва $f(x)$ и $x\in\left(-\pi;\pi\right)$;

3) $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\big(f(-\pi+0)+f(\pi+0)\big)$.

Пример 8. Периодическую функцию $f(x) = \pi - x$, заданную на интервал-периоде (–π; π), разложить в ряд Фурье.

Решение

Изобразим график функции $f(x)$ на рис. 6.

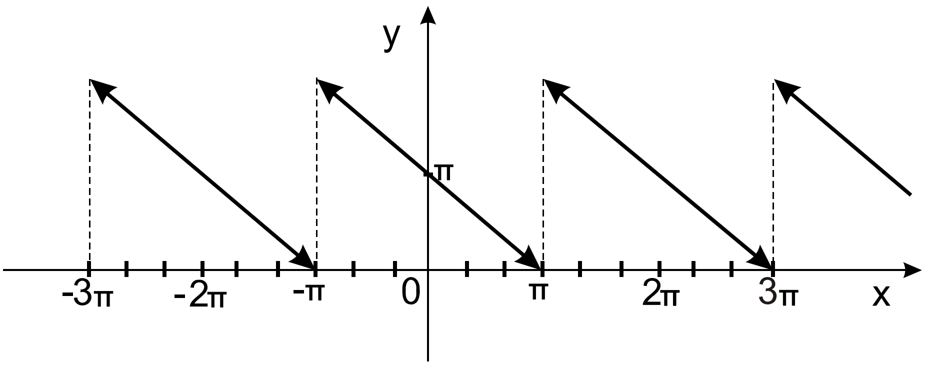

Рис. 6

Функция кусочно-монотонная, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому ее можно разложить в ряд Фурье.

Определяем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)d(\pi-x)=-\frac{(\pi-x)^2}{\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=0+\frac{(2\pi)^2}{2\pi}=2\pi,\quad a_0=2\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx.$$

Используем формулу интегрирования по частям: $\int_a^b udv=uv\big|_a^b-\int_a^b vdu$,

$u = \pi - x,\ du = -dx$,

$dv = \cos nxdx,\ v=\frac{1}{n}\sin nx$.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left((\pi-x)\frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=0,$$

т.к. функции 1 и $\sin nx$ ортогональны на [–π; π] $a_n = 0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx=\left|\begin{array}{l} u=\pi-x,\quad du=-dx \\ dv=\sin nx dx=-\frac{1}{n}\cos nx \\ \int_a^b u dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v du \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi-x}{-n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{2\pi}{n}\cos(-n\pi)-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{n}\cos n\pi,\quad \sin n\pi=\sin(-n\pi)=0,\ \text{так как}\ \cos n\pi=(-1)^n,$$

то $\quad b_n=\dfrac{2(-1)^n}{n}.$

Запишем ряд Фурье для $f(x)=\pi-x$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

$$\pi-x=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin nx \quad \text{или} \quad \pi-x=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}.$$

Данный ряд сходится к $f(x)=\pi-x$ для всех x, кроме $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, …, $\pm(2n-1)\pi$, $n\in N$.

В точках разрыва сумма ряда равна π, т.е.

$$S\left(\pm(2n-1)\pi\right)=\pi.$$

Ответ: $f(x)=\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin nx$, $S(\pm\pi)=\pi$.

Пример 9. Удовлетворяет ли функция, график которой изображен на рисунке 7, условиям Дирихле, т.е. является ли она кусочно-монотонной на отрезке $[a;\ b]$?

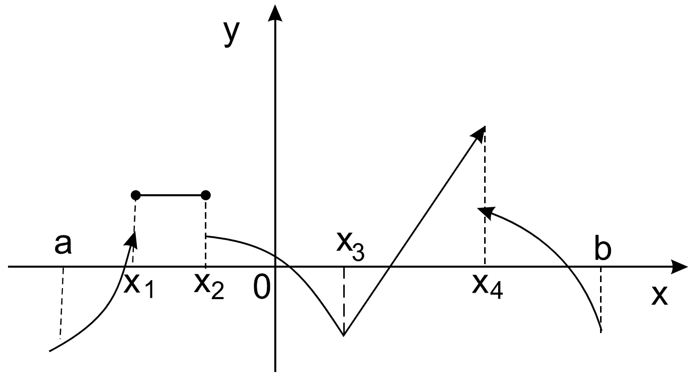

Рис. 7

Решение

Функция является кусочно-монотонной, так как отрезок $[a; b]$ можно точками x_1, x_2, x_3, x_4 разбить на 5 интервалов, в каждом из которых $f(x)$ либо только возрастающая, либо только убывающая, либо постоянна.

Функция $f(x)$ возрастает на (a, x_1); (x_3, x_4), убывает на интервалах (x_2, x_3); (x_4, b), постоянна на интервале (x_1, x_2).

Ответ: функция является кусочно-монотонной на отрезке $[a, b]$.

Пример 10. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье (рис. 8) на интервале $(-\pi; \pi)$. Используя полученное разложение, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

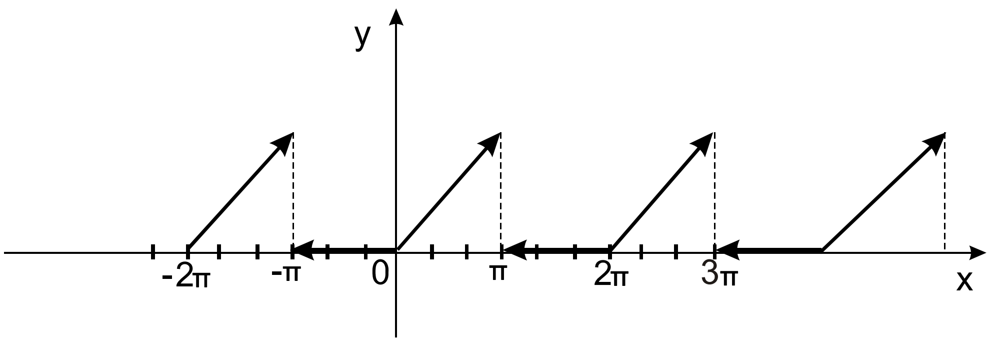

Рис. 8

Решение

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{x^2}{2\pi}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xd\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(x \quad \sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nxdx\right) = \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \sin nxdnx =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \left[\begin{array}{ll} 0, & \text{если} \quad n = 2k, \\ -\dfrac{2}{\pi n^2}, & \text{если} \quad n = 2k-1, \end{array}\right.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x \quad \sin nxdx=-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}xd\cos nx=-\frac{1}{\pi n}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$
$$=-\frac{1}{\pi n}\left(\pi\cos n\pi-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\right),\ -\pi<x<\pi.$$

В точках разрыва $x = -\pi$ и $x = \pi$.

Сумма ряда $S(-\pi)=S(\pi)=\dfrac{0+\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$.

Если в найденном ряде Фурье положить $x = 0$, то $f(0) = 0$.

$$0=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{\pi(2k-1)^2};\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{4},\text{ отсюда }\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Сумма ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ равна $\dfrac{\pi^2}{8}$.

§ 7. Замечания о разложении периодической функции в ряд Фурье

В § 1 было доказано свойство периодической функции:

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_b^{b+T}f(x)dx. \tag{6}$$

Если $f(x)$ имеет период $T = 2\pi$, то при $a = -\pi$ равенство (6) примет вид:

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_b^{b+2\pi}f(x)dx$ для любого числа b.

На основании этого свойства при вычислении коэффициентов Фурье можно заменить промежуток интегрирования $(-\pi;\ \pi)$ промежутком интегрирования $(b;\ b + 2\pi)$, т.е.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_b^{b+2\pi}f(x)dx;\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_b^{b+2\pi}f(x)\cos nxdx;\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_b^{b+2\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Эти формулы часто бывают полезны при вычислении коэффициентов Фурье для периодической функции, особенно в тех случаях, когда эта функция на каком-либо промежутке $[b;\ b + 2\pi]$ имеет более простое аналитическое выражение, чем на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

Пример 11. Дана функция $f(x) = x^2$. Разложить ее в ряд Фурье в интервале $(0;\ 2\pi)$.

Решение

Поскольку интервал (0; 2π) не симметричен относительно, но имеет длину 2π, то коэффициенты Фурье будем находить по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx,\;\; a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx\,,\; b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{x^3}{3\pi}\bigg|_0^{\pi}=\frac{8\pi^3}{3},$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\cos nxdx}_{dv}=\left|\begin{array}{l}\int_u^b udv=uv\big|_a^b-\int_u^b vdu\\ \text{формула интегрирования}\\ \text{по частям}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right)=-\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin nxdx}_{dv}=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=\frac{2\cdot 2\pi\cos 2\pi n}{\pi n^2}-\frac{2}{\pi n^3}\sin nx\bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{4\cos 2\pi n}{n^2}-0=\frac{4}{n^2},\text{ т.к. }\cos 2\pi n=0,\text{ если }n=1,2,3,\ldots\quad a_n=\frac{4}{n^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\sin nxdx}_{dv}=\frac{1}{\pi}\left(-x^2\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{2x\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=-\frac{4\pi^2\cos 2\pi n}{\pi n}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n}\left(x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{-4\pi}{n}-\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\sin nxdx=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{-4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos 2\pi n-\cos 0\right)=-\frac{4\pi}{n},\text{ т.е. }\; b_n=-\frac{4\pi}{n}.$$

Запишем разложение x^2 в ряд Фурье в интервале (0, 2π):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

$$x^2=\frac{4\pi^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$$

Данное разложение имеет место для всех значений $x\in\left(0,\,2\pi\right)$, а ряд, стоящий в правой части равенства, сходится при любом x к функции, график которой изображен на рисунке 9.

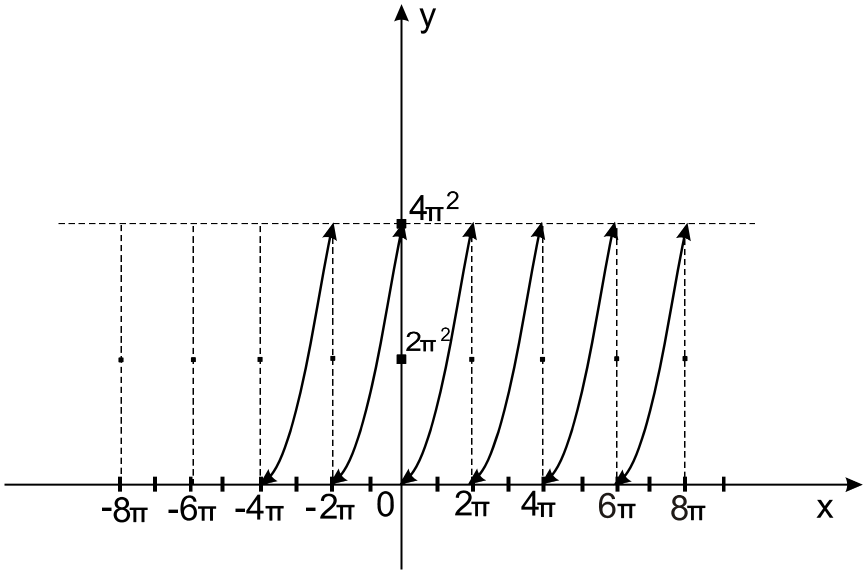

Рис. 9

§ 8. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Def. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l,\ l]$, где $l > 0$, называется чётной, если $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in [-l, l]$.

Графики чётных функций симметричны относительно оси Oy.

Def. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l,\ l]$, где $l > 0$ называется нечётной, если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-l, l]$.

Графики нечётных функций симметричны относительно начала координат.

Если $f(x)$ — чётная на промежутке $[-\pi; \pi]$, то

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{-\pi}^{0} f(-x)d(-x) + \int_{0}^{\pi} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Таким образом, для чётной функции $f(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Если $f(x)$ — нечётная на $[-\pi; \pi]$, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \begin{bmatrix} -x = t, & \\ x = -t, \ t_н = \pi & \\ dx = -dt, \ t_в = 0 & \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_{\pi}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(-t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

1. Если в ряд Фурье разлагается нечётная функция $f(x)$, то $f(x)\cos nx$ будет нечётной функцией и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos xdx = 0$ при n = 0, 1, 2, …, т.е. $a_0 = 0$; $a_n = 0$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx$. Так как $f(x)$ sin(nx) будет чётной, то

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Ряд Фурье *нечётной* функции содержит только синусы, т.е. имеет вид $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx$, $a_0 = a_n = 0$.

2. Если в ряд Фурье разлагается *чётная* функция $f(x)$, то $f(x)\sin nx$ — нечётная функция, поэтому $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0$; $b_n = 0$, а $f(x)\cos nx$ — чётная функция, следовательно

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad \text{и} \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Ряд Фурье чётной функции содержит только косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ где } a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx.$$

Полученные формулы значительно упрощают вычисления при нахождении коэффициентов Фурье.

Пример 12. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию $f(x)$, заданную на промежутке (–π; π] формулой $f(x) = x$.

Решение

Построим график $f(x)$ (см. рис. 12).

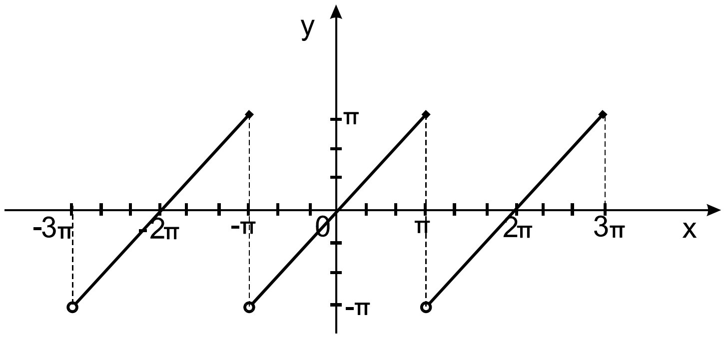

Рис. 12

Эта функция кусочно-монотонная и ограниченная, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

Для всех $x \in (-\pi;\ \pi)$ $f(-x) = -f(x)$, значит, ряд Фурье содержит лишь синусы $a_0 = 0, a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ d\upsilon = \sin nx dx,\ \upsilon = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx dx \right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi \cdot \cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \text{ т.к. } \cos n\pi = (-1)^n, \text{ а } \sin 0 = \sin n\pi = 0;$$

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \text{ — искомое разложение,}$$

$$S(\pm\pi) = 0.$$

$$S(\pi) = \frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0,$$

$$S(-\pi) = \frac{f(-\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2} = 0.$$

Изобразим на рисунке 13 график суммы ряда Фурье $f(x)$.

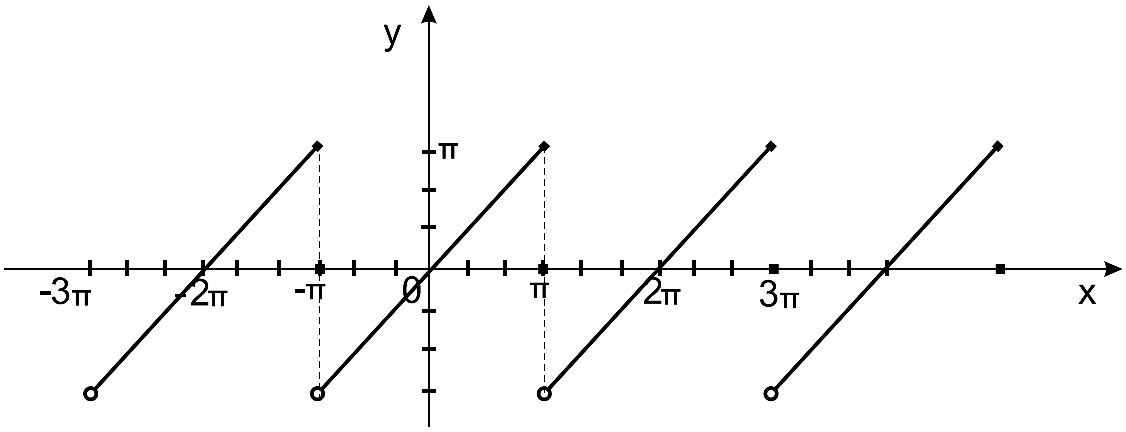

Рис. 13

Пример 13. Разложить функцию $f(x)=|x|$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$.

Решение

Построим график $f(x)=|x|$ при $x\in(-\pi;\pi)$ на рис. 14.

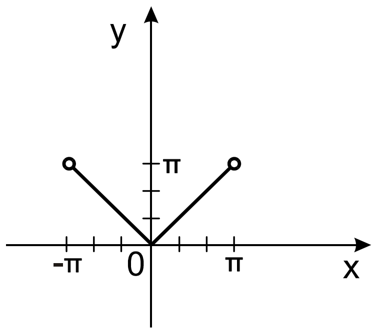

Рис. 14

$f(x)=|x|$ — чётная функция. Её разложение в ряд Фурье будет содержать лишь косинусы $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{\pi}=\pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos nx dx}_{dV} = \frac{2}{\pi}\left(x \quad \frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n} \quad dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2} \quad \cos nx\bigg|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 0, \quad \text{если} \quad n = 2k \\ \dfrac{-4}{\pi n^2}, \quad \text{если} \quad n = 2k-1; \end{array}\right.$$

$$a_k = \frac{-4}{\pi \quad (2k-1)^2}, \quad k = 1, \quad 2, \quad 3, \ldots;$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi \quad (2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Изобразим график суммы найденного ряда Фурье (рис. 15).

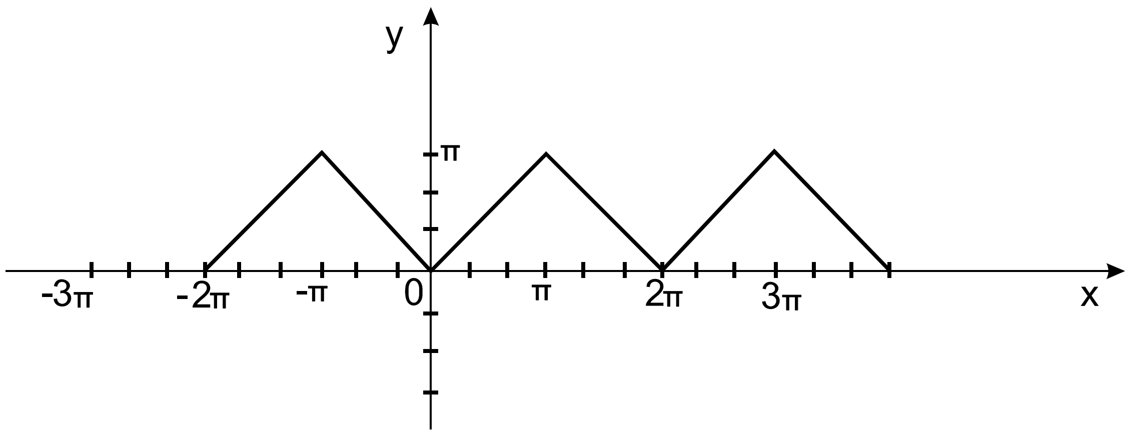

Рис. 15

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

§ 9. Ряд Фурье для функции с периодом 2*l*

Пусть функция $f(x)$ является периодической с периодом $T = 2l$. Чтобы найти коэффициент Фурье, будем использовать формулы для нахождения этих коэффициентов в случае, когда функция задана на промежутке [–π; π]. Для этого сделаем замену переменной $x = \dfrac{lt}{\pi}$, $f(x) = f(x + 2l)$.

Тогда функция $F(t)=f\left(\frac{l\,t}{\pi}\right)$ будет периодической с периодом 2π.

Действительно, $F\left(t+2\pi\right)=f\left(\frac{l}{\pi}\left(t+2\pi\right)\right)=f\left(\frac{l\,t}{\pi}+2l\right)$,

$$f\left(\frac{l\,t}{\pi}+2l\right)=f\left(x+2l\right)=f\left(x\right)=F\left(t\right).$$

Тогда $F\left(t+2\pi\right)=F\left(t\right)$.

$F\left(t\right)$ можно разложить в ряд Фурье на промежутке [–π; π];

$$F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right), \tag{6}$$

где $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\frac{lt}{\pi}dt=\begin{bmatrix}\frac{lt}{\pi}=x, \\ x_H=-l,\quad x_B=l \\ dt=\frac{\pi}{l}dx\end{bmatrix}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\frac{\pi}{l}dx=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx,$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx\,, \tag{7}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ntdt=\begin{bmatrix}x=\frac{lt}{\pi},\ t=\frac{\pi}{l}x \\ dt=\frac{\pi}{l}dx \\ x_H=-l,\ x_B=l\end{bmatrix}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\pi}{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Таким образом, $$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,. \tag{8}$$

Аналогично, можно доказать, что

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,. \tag{9}$$

Тогда равенство (6) можно записать в виде

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$, где коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам (7-9).

Замечание. Все теоремы, которые имеют место для рядов Фурье от периодических функций с периодом 2π, сохраняются и для рядов Фурье от периодических функций с периодом $2l$. В частности, сохраняет свою силу достаточный признак разложимости функции в ряд Фурье, замечание о возможности вычислять коэффициенты ряда, интегрируя по любому отрезку, длина которого равна периоду, а также возможно упрощение вычисления коэффициентов ряда, если функции являются четными или нечетными.

Если $f(x)$ — четная функция, то $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$,

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ и ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Если $f(x)$ — нечетная, то $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ и ряд Фурье будет иметь вид: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$.

Пример 14. Воспользовавшись разложением в ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} -x, \ -4 < x < 0, \\ 1, \ x = 0, \\ 2, \ 0 < x < 4, \end{cases}$$

найдите сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Решение

$T = 2l$, $2l = 8$, $l = 4$.

Построим график функции $f(x)$ (рис. 16)

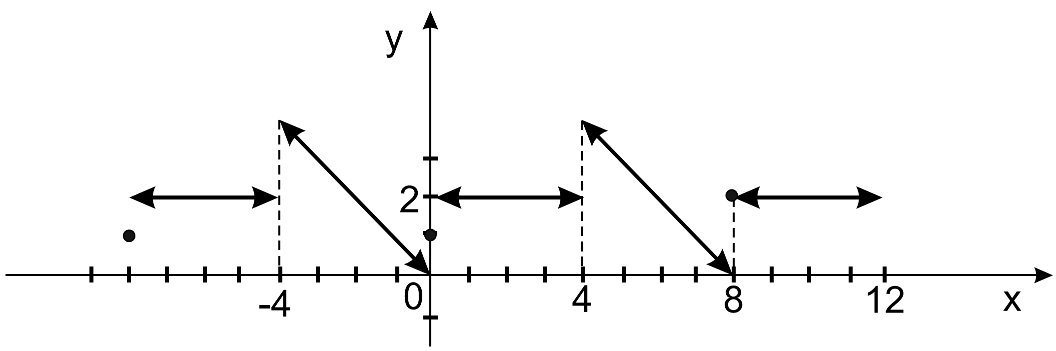

Рис. 16

Функция кусочно-монотонная, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому ее можно разложить в ряд Фурье:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\ a_0=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}(-x)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{4}2dx=-\frac{x^2}{8}\Bigg|_{-4}^{0}+\frac{1}{2}x\Bigg|_{0}^{4}=2+2=4,$$

$a_0 = 4$.

$$a_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx,\ a_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\left(-x\cos\frac{n\pi x}{4}\right)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{4}2\cos\frac{n\pi x}{4}dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}x\cos\frac{n\pi x}{4}dx+\underbrace{\frac{2\sin\frac{n\pi x}{4}}{n\pi}\Bigg|_{0}^{4}}_{=0}=\left|\begin{matrix}u=x\ \ du=dx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{4}dx;\ \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\underbrace{\frac{4x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}}_{=0}\Bigg|_{-4}^{0}-\int_{-4}^{0}\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}dx\right)=\frac{1}{n\pi}\int_{-4}^{0}\sin\frac{n\pi x}{4}dx=$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{4}\Bigg|_{-4}^{0}=-\frac{4}{\pi^2n^2}\left(1-\cos n\pi\right)=-\frac{4}{\pi^2n^2}\left(1-(-1)^n\right)=$$

$$=\left[\begin{matrix}0,\ \text{если}\ n=2k\\ \frac{-8}{\pi^2n^2},\ n=2k-1,\ u=1,2,...\end{matrix}\right.$$

$$a_n=\frac{-8}{\pi^2(2n-1)^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

$$b_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\left(-x\sin\frac{n\pi x}{4}\right)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{4}2\sin\frac{n\pi x}{4}dx=-\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}x\sin\frac{n\pi x}{4}dx-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Bigg|_{0}^{4}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(-x\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Bigg|_{-4}^{0}+\frac{4}{n\pi}\int_{-4}^{0}\cos\frac{n\pi x}{4}dx\right)-\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi-1\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\cos(-n\pi)+\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{4}\Bigg|_{-4}^{0}-\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=\frac{4(-1)^n}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}(-1)^n+\frac{2}{n\pi}=\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n+1\right)=\left[\begin{matrix}\frac{4}{n\pi},\ \text{если}\ n=2k,\\ 0,\ \text{если}\ n=2k-1.\end{matrix}\right.$$

$$b_n=\frac{4}{2n\pi}=\frac{2}{n\pi}.$$

Записываем ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{4}+b_n\sin\frac{n\pi x}{4}\right),$$

$$f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-8}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\frac{n\pi x}{4}+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{4}\right).$$

При $x=0$ $f(0)=1$ и $S(0)=\dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\dfrac{0+2}{2}=1$.

$$1=2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-8}{\pi^2(2n-1)^2}\cos 0+\frac{2}{\pi n}\sin 0\right),$$

$$1=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^2(2n-1)^2},\quad -1=\frac{-8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Из последнего равенства находим, что $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Ответ: сумма ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

§10. Разложение функции, заданной на отрезке, в ряд по косинусам или по синусам

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;\ l]$ и удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда эту функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l;\ 0]$.

1. Если определить функцию $f(x)$ на отрезке $[-l;\ l]$ так, чтобы $f(x)=f(-x)$, то ряд Фурье будет содержать лишь косинусы. В этом случае говорят, что $f(x)$ «продолжена на отрезке $[-l;\ 0]$ четным образом» (рис. 17).

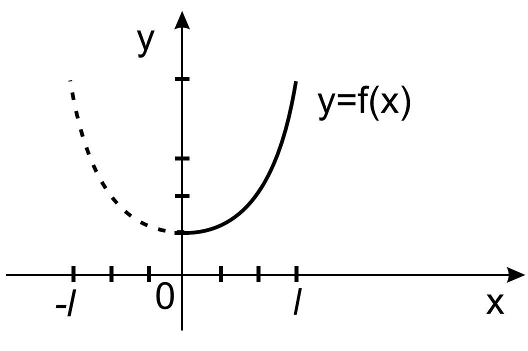

Рис. 17

Тогда разложение функции в ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

где $a_0=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)dx$, $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$.

2. Если функцию $f(x)$ определить на отрезке $[-l; l]$ так, чтобы $f(-x) = -f(x)$, то ряд Фурье будет содержать лишь синусы. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ «продолжена на отрезок $[-l; 0]$ нечетным образом» (рис. 18).

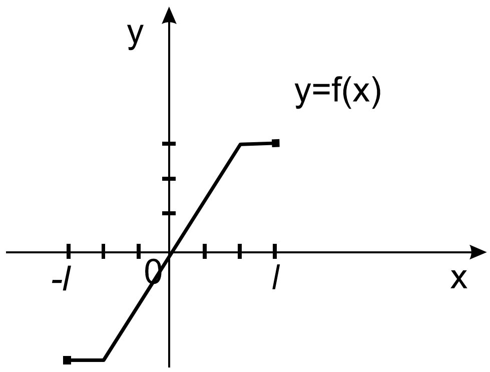

Рис. 18

Тогда разложение функции в ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \text{ где } b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Пример 15. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x) = x^2$ в интервале $(0; \pi)$. Построить графики данной функции и суммы ряда.

Решение

Продолжим функцию нечетным образом в интервал $(-\pi; 0)$ (рис. 19).

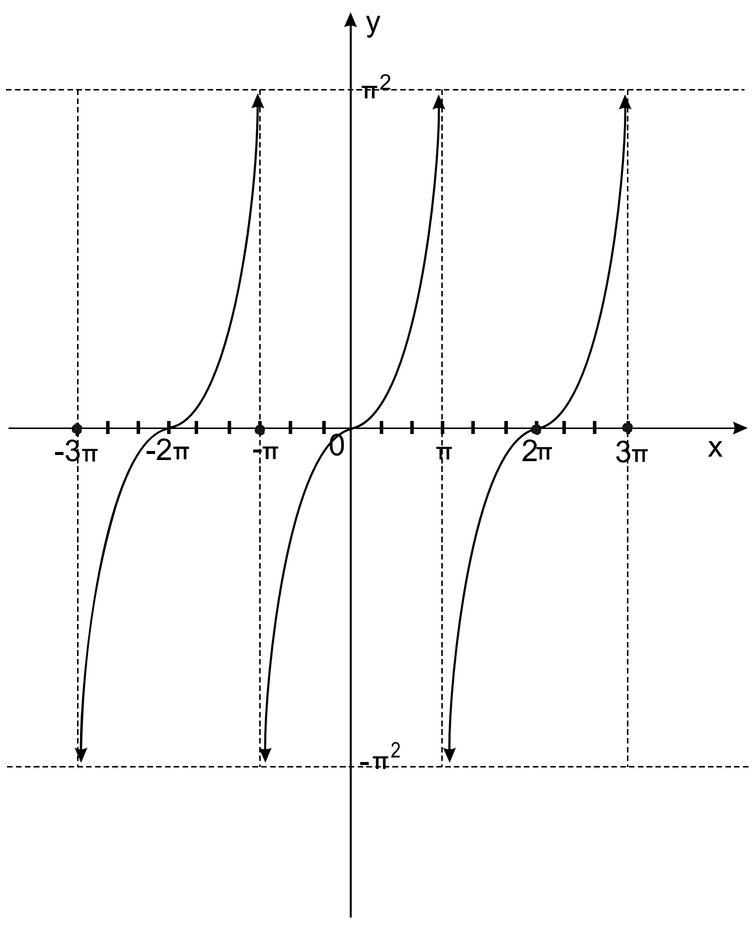

Рис. 19

Так как функция нечетная*, то* $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

а коэффициенты b_n находим по формуле $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2\sin(nx)dx = \begin{bmatrix} \int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu \\ u = x^2 \quad du = 2xdx \\ dv = \sin nxdx, \quad v = \dfrac{-1}{n}\cos nx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-x^2\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi} 2x\cos nxdx \right) = \frac{-2\pi\cos n\pi}{n} + \frac{4}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} x\cos nxdx =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos n\pi = (-1)^n \\ u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos nxdx, \quad v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} = \frac{-2\pi(-1)^n}{n} + \frac{4}{\pi n}\left(\underbrace{\frac{x\sin nx}{n}}_{=0}\Bigg|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx \right) =$$

$$= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-2\pi}{n}, \quad \text{если} \quad n = 2k \\ \dfrac{2\pi}{n} - \dfrac{8}{\pi n^3}, \quad \text{если} \quad n = 2k-1, \quad k = 1, \ 2, \ 3, \ldots \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{2k}\sin 2kx + \left(\frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \right)\sin(2k-1)x \right),$$

$$x^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi \ \sin 2kx}{2k} + \frac{2\pi}{2k-1} \right)\sin(2k-1)x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^3}\sin(2k-1)x,$$

$$x^2 = -\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)}{(2k-1)^3} - 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2kx}{2k} - \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \right).$$

Полученное равенство имеет место для всех значений $x \in (0; \pi)$, а ряд, стоящий справа, сходится для всех значений x и функции, график которой изображен на рис. 19.

Пример 16. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$.

Решение

Продолжим функцию $y = sinx$ четным образом на отрезок [–π; 0] (рис. 20).

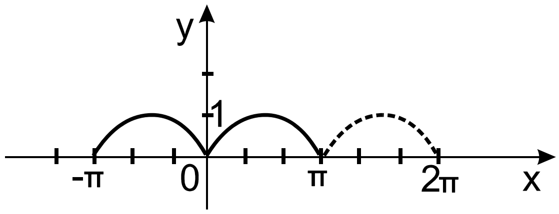

Рис. 20

Находим коэффициенты $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{-2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}$,

$$a_0 = \frac{4}{\pi}, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \left[\begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + siin(\alpha-\beta)\right) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin\left(x+nx\right) + \sin\left(x-nx\right)\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\sin\left(n+1\right)x - \sin\left(n-1\right)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\cos\left(n+1\right)x}{n+1}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{\cos\left(n-1\right)x}{n-1}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{-\cos(n+1)\pi}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi(n+1)} + \frac{\cos(n-1)\pi}{\pi(n-1)} - \frac{1}{\pi(n-1)} =$$

$$= \frac{-(-1)^{n+1}}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi\left(n+1\right)} + \frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\pi(n-1)} - \frac{1}{\pi\left(n-1\right)} = \frac{\left(-1\right)^{n}}{\pi\left(n+1\right)} + \frac{1}{\pi\left(n-1\right)}\left(\left(-1\right)^{n-1} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)}\left(\left(-1\right)^{n} + 1\right) + \frac{1}{\pi(n-1)}\left(\left(-1\right)^{n} - 1\right) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{\pi\left(n+1\right)} - \dfrac{2}{\pi\left(n-1\right)}\text{, если } n = 2k \\ 0\text{, если } n - \text{нечётное} \end{array}\right.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\left(-2\right)}{n^2-1} = \frac{-4}{\pi\left(n^2-1\right)}, \quad n = 2k,$$

$$a_n = \frac{-4}{\pi\left(\left(2k\right)^2 - 1\right)},$$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{\left(2k\right)^2 - 1}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{1-\left(2k\right)^2}=\sin x.$

Пример 17. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

на отрезке [0; 2] и найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2n+1\right)^2}$.

Решение

Продолжим функцию чётным образом (рис. 21) и вычислим коэффициенты Фурье.

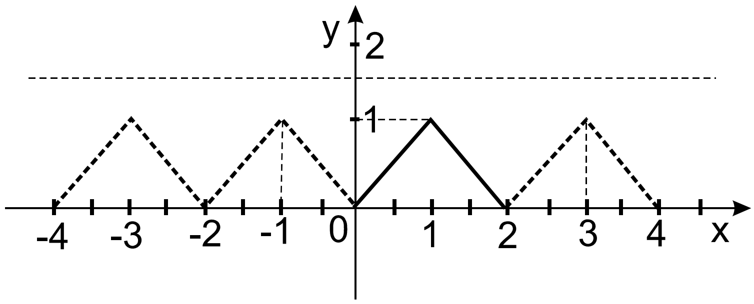

Рис. 21

Находим коэффициенты $a_0=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx;\ l=2;$

$$a_0=\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^1 xdx+\int\limits_1^2(2-x)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\frac{\left(2-x\right)^2}{-2}\right|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1;$$

$$a_0=1.$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$a_n=\int\limits_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int\limits_0^1\underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos\frac{n\pi x}{2}dx}_{dV}+\int\limits_1^2\underbrace{(2-x)}_{u}\underbrace{\cos\frac{n\pi x}{2}dx}_{dV}=$$

$$=\left.\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_0^1-\int\limits_0^1\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\left.(2-x)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_1^2+\int\limits_1^2\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\left(1+(-1)^n\right).$$

Если $n=2k-1$, то $a_n=0.$

Если $n=2k$, то

$$a_n=\frac{8}{(2k)^2\pi^2}\cos k\pi-\frac{8}{(2k)^2\pi^2}=\frac{8}{4k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right)\qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$a_n=\frac{2}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right);$$

$a_k=0,$ если $k=2l;$

$$a_k=\frac{-4}{(2l-1)^2\pi^2},\quad \text{если}\quad k=2l-1,\quad l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$a_n=\frac{2}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right);$$

$a_k=0,$ если $k=2l;$

$$a_k=\frac{-4}{(2l-1)^2\pi^2},\quad \text{если}\quad k=2l-1,\quad l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$a_n=\frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}\quad \text{или}\quad f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

При $x=0$ $\quad f(x)=0.$

Получим, что $0=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$

отсюда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2};\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

§ 11. Разложение в ряд Фурье непериодической функции

Если кусочно-монотонная, ограниченная функция $f(x)$ не является периодической, то не существует такого тригонометрического ряда, сумма которого равнялась бы данной функции во всех точках, так как сумма любого тригонометрического ряда является периодической функцией.

Однако для кусочно-монотонной, ограниченной на отрезке $[a;\ b]$ функции $f(x)$ можно найти такой тригонометрический ряд, сумма которого равнялась бы данной функции на отрезке $[a;\ b]$.

Для этого достаточно рассмотреть новую функцию $f_1(x)$, которая совпадает с данной на $[a;\ b]$ и является периодической с периодом, равным длине отрезка $[a;\ b]$ (рис. 22).

Функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a;\ b]$, кроме точек разрыва, совпадает с заданной функцией $f(x)$. В этом случае говорят, что $f(x)$ разложена в ряд Фурье на $[a;\ b]$.

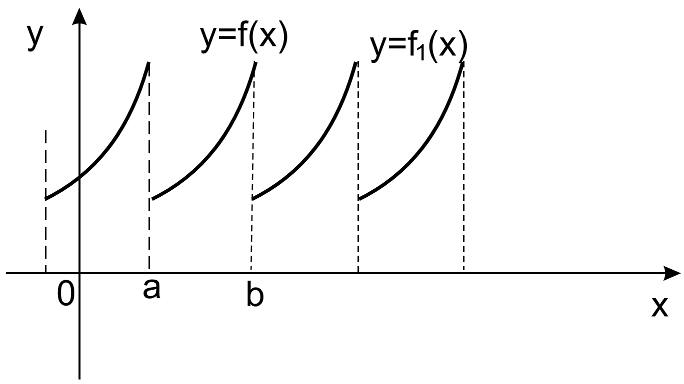

Рис. 22

Функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле на отрезке $[a;\ b]$, можно разложить на этом отрезке в ряд Фурье бесконечным числом способов. Для этого нужно поместить начало координат в точку $x = a$, $l = |b - a|$, $T = 2l$. Тогда функцию $f(x)$ можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l;\ 0]$ (рис. 23).

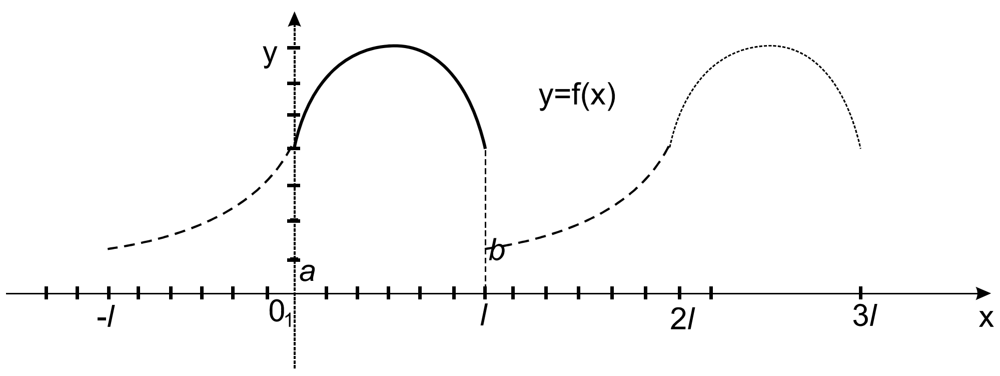

Рис. 23

Пример 18. Функцию $f(x) = 4 - x$ разложить в ряд Фурье в интервале (2; 6).

Решение

Рассмотрим функцию $f_1(x)$, которая является периодической, с периодом, равным длине интервала (2; 6), и на этом интервале совпадающей с $f(x) = 4 - x$ (рис. 24).

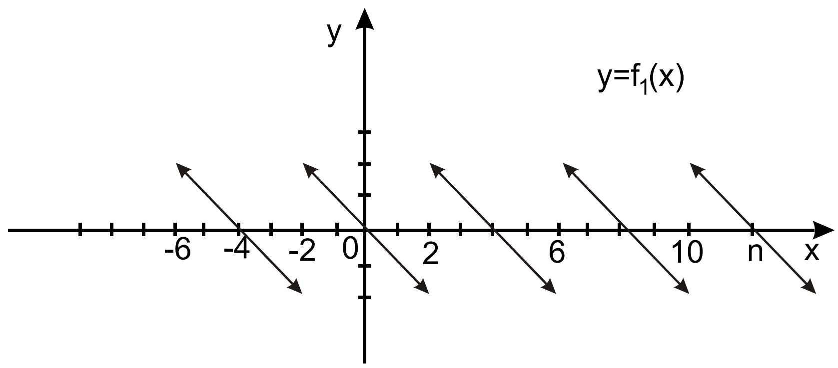

Рис. 24

$T = 6 - 2 = 4$; $2l = 4$, $l = 2$. Функция $f_l(x)$ имеет более простое аналитическое выражение на интервале-периоде (–2; 2); $f_l(x) = - x$ на этом интервале.

$f_l(x) = - x$ — нечетная, следовательно $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \int_0^2 f(-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \begin{bmatrix} u = x;\ du = dx \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ v = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2x}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{4}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2}sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{4(-1)^n}{n}.$$

$$b_n = \frac{4(-1)^n}{n}.$$

Разложение функции $f_l(x)$ в ряд Фурье будет иметь вид

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$ в интервале (2; 6).

Суммой данного ряда является $f(x) = 4 - x$, поэтому разложение этой функции в ряд Фурье в (2; 6) имеет вид

$$4 - x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Ответ: $4-x=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{2}}{n}$.

Использованная литература:

Ряды Фурье : учебное пособие для самостоятельного изучения и выполнения расчётно-графической работы для студентов всех направлений подготовки очной и заочной форм обучения / сост. И.А. Батманова, И.А. Смурова. — Кострома : КГСХА, 2011. — 54 с.