Элементы теории вероятностей

Рассматриваются вопросы:

1. События, их виды.
2. Классическое и статистическое определения вероятности события. Свойства вероятности.
3. Действия над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
6. Дискретные случайные величины, способы их задания. Функция распределения дискретной случайной величины и ее свойства. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
7. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины, их свойства. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
8. Законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин. Нормальный закон распределения.

1. События, их виды

- ***Эксперимент, испытание, опыт*** — это возникновение или преднамеренное создание определенного комплекса условий, результатом которого является тот или иной исход.

- ***Событием*** называется исход испытания.

Например, брошена монета — испытание; появление орла или решки — событие.

События обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, … .

Классификация событий:

1. ***Достоверное событие*** — событие, которое обязательно происходит в результате испытания.
2. ***Невозможное событие*** — событие, которое не может произойти в результате данного испытания.
3. ***Случайное событие*** — событие, которое может либо произойти, либо не произойти в результате данного испытания.

Примеры:

1. Выпадение не более шести очков при бросании игральной кости — достоверное событие.

2. Выпадение десяти очков при бросании игральной кости — невозможное событие.

3. Выпадение трех очков при бросании игральной кости —случайное событие.

- ***Элементарными*** называются те из событий, которые нельзя разложить на составляющие их события.

Пример: В опыте с бросанием игральной кости элементарными событиями являются выпадение чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- Множество всех элементарных событий называется ***пространством элементарных событий*** и обозначается Ω

Виды случайных событий:

- Несколько событий называются ***совместными***, если в результате эксперимента наступление одного из них не исключает появления других.

Например, при бросании трех монет выпадение цифры на одной из них не исключает появления цифры на других.

- Несколько событий называются ***несовместными***, если в результате эксперимента наступление одного из них исключает появление других.

Например, при одном бросании игральной кости события, состоящие в появлении цифры 2, 3, представляют два несовместных события.

- События $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n > 2)$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

- Несколько событий называются ***равновозможными***, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

Например, при бросании игральной кости появление каждой из ее граней — события равновозможные.

- ***Противоположным*** событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A (т.е. $\overline{A}$ означает, что событие A не наступило).

Например, выпадения орла или решки при подбрасывании монеты являются противоположными событиями.

- События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу*** несовместных событий, если в результате данного испытания непременно произойдет только одно из них.

Например, выпадения 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при бросании игральной кости образуют полную группу несовместных событий.

2. Классическое и статистическое определения вероятности события. Свойства вероятности

При исследовании большого количества одинаковых испытаний обнаруживаются определенные закономерности, которые можно описать, используя понятие вероятности.

Под вероятностью понимается некоторая числовая характеристика возможности наступления этого события. Существует несколько подходов к определению вероятности.

1. Статистическое определение вероятности.

Пусть при проведении n испытаний некоторое событие A появилось m раз. Число m называют ***частотой*** события A.

- Отношение $\frac{m}{n}$ называется ***относительной частотой*** (или ***частостью***) события A.

При больших n относительная частота колеблется около некоторого числа.

- ***Статистической вероятностью события*** A называется число, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе испытаний.

Например, английский ученый Пирсон произвел 23000 бросаний монеты. При этом герб появился 11512 раз. Значит, частость появления герба равна $\frac{11512}{23000} \approx 0{,}5005$.

Этот пример показывает, что за вероятность появления герба можно взять число 0,5.

2. Классическое определение вероятности.

Пусть проводится опыт с n исходами, которые представляют полную группу несовместных равновозможных исходов.

- Исход называется ***благоприятствующим событию*** A, если он приводит к наступлению события A.

- ***Вероятностью события*** A называется отношение числа m исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n всех исходов, т.е.

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}.$$

Свойства вероятности:

1. Вероятность любого события $0 \le P(A) \le 1$.
2. Вероятность невозможного события равна 0.
3. Вероятность достоверного события равна 1.

Пример.

В урне находится 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

Решение.

A — вынут белый шар.

Общее число всех равновозможных исходов равно количеству шаров в урне, т.е. n = 12+8 = 20.

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно количеству белых шаров, т.е. m = 12.

Тогда $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{12}{20}=0,6.$

3. Действия над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей

- ***Суммой событий*** A и B называется событие $C = A + B$, которое означает наступление или A, или B, или A и B одновременно (т.е. происходит хотя бы одно из них).

Пример:

Рассматривается опыт — выбор одного из чисел от 1 до 10.

A — выбор четного числа (2, 4, 6, 8, 10);

B — выбор числа, кратного 3 (3, 6, 9).

Тогда событие $C = A + B$ означает выбор числа, кратного или 2, или 3, при этом не исключается, что число кратно и 2 и 3, т.е. выбор одного из чисел 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10.

Суммой нескольких событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

- ***Произведением событий*** A и B называется событие $C = A \cdot B$, которое означает появление и A и B одновременно.

Пример:
Рассматривается опыт — выбор одного из чисел от 1 до 10.
A — выбор четного числа (2, 4, 6, 8, 10);
B — выбор числа, кратного 3 (3, 6, 9).
Тогда событие $C = A \cdot B$ означает выбор числа, кратного и 2 и 3 одновременно, т.е. выбор числа 6.

Произведением нескольких событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в появлении всех этих событий в одном эксперименте.

Теорема (о вероятности суммы двух несовместных событий):
Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B)}$$

Вероятность суммы n несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)}$$

Следствие 1: Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Следствие 2: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример:
В урне 10 белых, 3 красных и 5 черных шаров. Наудачу выбирается один шар. Найти вероятность тог, что вынутый шар будет белым или черным.

Решение.
Обозначим события:

A — вынули белый или черный шар;
B — вынули белый шар;
C — вынули черный шар.
Тогда $A = B + C$. События B и C — несовместные.
$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C)$.
$P(B) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, $P(C) = \frac{5}{18}$.
Следовательно, $P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = \frac{5}{9} + \frac{5}{18} = \frac{5}{6}$.

- Два события называются ***независимыми***, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло другое или нет.

Пример:
Игральная кость брошена 2 раза. Событие A — в первом испытании выпало 2 очка, событие B — во втором испытании выпало 2 очка, являются независимыми. Причем $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$.

- События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***независимыми***, если они попарно-независимы и независимыми является каждое из них и произведение $n-1$ остальных.

- Событие B называется ***зависимым*** от события A, если вероятность события B меняется в зависимости от того, произошло событие A или нет.

- Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место другое событие A, называется ***условной вероятностью*** события B и обозначается $P(B / A)$ или $P_A(B)$

Пример:
В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Рассмотрим события: A — первый шар белый, B — второй шар белый. Событие B зависит от события A. При этом $P_A(B) = \frac{4}{11}$.

Если события A и B — независимые, то $P_A(B) = P(B)$, если события A и B — зависимые, то $P_A(B) \neq P(B)$.

Теорема (о вероятности произведения двух независимых событий): Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Пример: Игральная кость брошена 2 раза. Найти вероятность того, что оба раза выпало 2 очка.

Решение.

Обозначим события:

A — в первом испытании выпало 2 очка;

B — во втором испытании выпало 2 очка;

C — оба раза выпало 2 очка.

Тогда событие $C = A \cdot B$. Так как события A и B являются независимыми, то $P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Теорема (о вероятности произведения n независимых событий): Вероятность произведения n независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)}$$

Теорема (о вероятности произведения двух зависимых событий): Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие произошло:

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)}$$

или

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)}$$

Пример:

В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение.

Обозначим события:

A — первый шар белый;

B — второй шар белый;

C — оба шара белые.

Тогда событие $C = A \cdot B$. Так как событие B зависит от события A, то $P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$.

Теорема (о вероятности произведения n зависимых событий): Вероятность произведения n зависимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных в предположении, что все предыдущие события наступили:

$$\boxed{P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n)}$$

Теорема (о вероятности суммы двух совместных событий):

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения:

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Пример:

Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 6 очков.

Решение.

Обозначим события:

A — на первой кости выпадет 6 очков;

B — на второй кости выпадет 6 очков;

C — хотя бы на одной из костей выпадет 6 очков.

Тогда событие $C = A + B$. Так как события A и B являются совместными, то $P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.

Формулы для определения вероятности суммы большего числа совместных событий достаточно громоздки, поэтому удобнее использовать вероятности противоположных событий.

Событие, состоящее в том, что наступит хотя бы одно из нескольких элементарных событий, противоположно событию, состоящему в том, что не наступит ни одно из них.

Поэтому, чтобы найти вероятность того, что произошло хотя бы одно из n событий $A_1, A_2, ..., A_n$, надо из единицы вычесть вероятность произведения им противоположных событий:

$$\boxed{P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n)}$$

Пример:

Три стрелка стреляют по мишени. Вероятности попадания соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок.

Решение.

Обозначим события:

A — в мишень попадет хотя бы один стрелок;

A_1 — в мишень попадет первый стрелок;

A_2 — в мишень попадет второй стрелок;

A_3 — в мишень попадет третий стрелок.

Тогда

$$P(A)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=1-0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}994.$$

Пример:

Вероятность того, что первый автобус прибудет в пункт назначения без опоздания, равна 0,9, для второго автобуса эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что только один автобус опоздает.

Решение

Обозначим события:

A — только один автобус опоздает,

A_1 — первый автобус прибудет без опоздания,

A_2 — второй автобус прибудет без опоздания.

Тогда

$\overline{A_1}$ — первый автобус опоздает,

$\overline{A_2}$ — второй автобус опоздает.

По условию $P(A_1) = 0{,}9$, $P(A_2) = 0{,}8$.

Тогда $P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-0{,}9=0{,}1$,

$$P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-0{,}8=0{,}2.$$

Событие A произойдет в том случае, когда имеет место одно из следующих двух несовместных событий: либо $A_1\overline{A_2}$ — первый автобус прибудет без опоздания, а второй опоздает, либо $\overline{A_1}A_2$ — первый автобус опоздает, а второй прибудет без опоздания. То есть $A=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$.

Тогда

$$P(A)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2).$$

В силу того что события A_1 и A_2, а следовательно, $\overline{A_1}$ и A_2, A_1 и $\overline{A_2}$ независимы, имеем:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)=0{,}9\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}8=0{,}26.$$

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности часто используется на практике в задачах экономического анализа и в научно-исследовательских работах. В тех случаях, когда необходимо определить вероятность какого-то случайного события, наступление которого зависит от внешнего воздействия, необходимо принимать во внимание влияние внешних факторов.

Пусть событие A может произойти только с одним из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу событий (т.е. они попарно несовместны, а их сумма есть достоверное событие). В этом случае события $B_1, B_2, ..., B_n$ называют ***гипотезами***, т.к. неизвестно, какое из них произойдет и повлечет событие A. Тогда вероятность события A вычисляется по ***формуле полной вероятности***:

$$\boxed{P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{Bn}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A)}$$

Пример:

В учебном пособии по физике имеется 45 задач к первому разделу, 30 задач — ко второму и 35 задач — к третьему разделу дисциплины. Шансы студента правильно решить задачу из первого раздела оцениваются в 80%, из второго — в 65%, из третьего — в 85%. Студент наудачу открывает пособие, определите вероятность, что он решит случайно выбранную задачу.

Решение.

Обозначим события:

A — студент решит случайно выбранную задачу.

Это событие может произойти совместно с одной из следующих гипотез:

B_1 — задача из первого раздела;

B_2 — задача из второго раздела;

B_3 — задача из третьего раздела.

Определим вероятности гипотез:

$$P(B_1) = \frac{45}{110} = \frac{9}{22},$$

$$P(B_2) = \frac{30}{110} = \frac{3}{11},$$

$$P(B_3) = \frac{35}{110} = \frac{7}{22}.$$

Определим условные вероятности события A:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}8,$$

$$P_{B_2}(A) = 0{,}65,$$

$$P_{B_3}(A) = 0{,}85.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$

$$= \frac{9}{22} \cdot 0{,}8 + \frac{3}{11} \cdot 0{,}65 + \frac{7}{22} \cdot 0{,}85 \approx 0{,}77.$$

Ответ: вероятность того, что студент решит случайно выбранную задачу, равна примерно 0,77.

При изучении различных процессов исследователь имеет предварительные, *априорные* (доопытные) вероятности интересующих его событий. Он проводит опыт, получает новую информацию и может пересчитать значения априорных вероятностей. Новые значения вероятностей тех же интересующих его событий будут уже *апостериорными* (послеопытными) вероятностями. Формула Байеса позволяет вычислять такие вероятности.

Пусть событие A может произойти только с одной из гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу событий. Пусть известны априорные вероятности каждой гипотезы $P(B_1),\ P(B_2), \ldots,\ P(B_n)$. Известно, что происходит событие A, и известны условные вероятности наступления события A совместно с каждой гипотезой $P_{B_1}(A),\ P_{B_2}(A), \ldots,\ P_{B_n}(A)$. Тогда можно вычислить апостериорные вероятности гипотез по ***формуле Байеса:***

$$\boxed{P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}},$$

где вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности, т.е.

$$\boxed{P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A)}},\ (i = 1,2,...,n).$$

Пример:

Имеются три одинаковые с виду коробки: в первой — 15 белых шаров, во второй — 10 белых и 5 черных, в третьей — 15 черных шаров. Из выбранной наугад коробки вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первой коробки.

Решение.

Обозначим гипотезы:

B_1 — выбрана первая коробка;

B_2 — выбрана вторая коробка;

B_3 — выбрана третья коробка.

Укажем их априорные вероятности гипотез $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \dfrac{1}{3}$.

Обозначим событие A — вынут белый шар.

Укажем условные вероятности наступления события A совместно с каждой гипотезой:

$$P_{B_1}(A) = 1,$$

$$P_{B_2}(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3},$$

$$P_{B_3}(A) = 0.$$

Событие A произошло.

Определим апостериорную вероятность гипотезы B_1 после наступления события A по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Ответ: вероятность того, что белый шар вынут из первой коробки равна 0,6.

5. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

1. Формула Бернулли.

- Пусть проводится n повторных испытаний, удовлетворяющих следующим условиям:

1. все n испытаний — независимые, т.е. вероятность наступления некоторого события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний;
2. в каждом испытании может произойти событие A (его называют *успехом*) с вероятностью $P(A) = p$ или противоположное ему событие $\overline{A}$ (его называют *неудачей*) с вероятностью $P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Такая последовательность испытаний называется ***схемой Бернулли***.

Например, схемой Бернулли является 10 независимых выстрелов по мишени, где событие A — попадание (успех), $P(A) = 0{,}8$; событие $\overline{A}$ — промах (неудача), $P(\overline{A}) = 0{,}2$.

Для вычисления вероятности $P_n(k)$, того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет k раз, определяется по ***формуле Бернулли:***

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}},$$

где n — число испытаний,

k — число появления события A (успеха) в n испытаниях,
p — вероятность появления события A (успеха) в каждом испытании,
q — вероятность непоявления события A (неуспеха) в каждом испытании,
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

Пример:

Вероятность появления бракованной детали равна 0,2. Найти вероятность того, что из четырех случайно отобранных деталей бракованных окажется

а) две;

б) не более двух;

в) хотя бы одна.

Решение.

A — бракованная деталь.

а) $n = 4$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $k = 2$.

Тогда

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}64 = 6 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}64 = 0{,}1536.$$

б) $n = 4$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $0 \le k \le 2$.

$$P_4(0;2) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2).$$

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^4 = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot 0{,}4096 = 0{,}4096,$$

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}512 = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}512 = 0{,}4096,$$

$$P_4(2) = 0{,}1536.$$

Тогда

$$P_4(0;2) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = 0{,}9728.$$

в) $n = 4$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $1 \le k \le 4$.

$$P_4(1;4) = P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) = 1 - 0{,}4096 = 0{,}5904..$$

В n испытаниях Бернулли наиболее вероятное число успехов k_0 удовлетворяет неравенству

$$\boxed{np - q \le k_0 \le np + p}$$

Пример:

Всхожесть семян данного растения 0,8. Найти наиболее вероятное число проросших семян из пяти посеянных.

Решение.

$n = 5$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Тогда

$5\cdot 0{,}8-0{,}2\le k_0\le 5\cdot 0{,}8+0{,}8,$

$3{,}8\le k_0\le 4{,}8.$

Так как $k_0\in Z$, то $k_0=4$.

Итак, наиболее вероятное число проросших семян из пяти посеянных равно четырем.

2. Формула Пуассона.

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико, вероятность появления события A в одном испытании p мала, а произведение $\lambda=np\le 20$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет k раз, определяется по ***формуле Пуассона:***

$$\boxed{P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}},$$

где $\lambda=np$.

Для нахождения значений $P_n(k)$ по формуле Пуассона существуют таблицы.

Пример:

Завод «Золотая балка» (Крым) отправил в Москву 1500 бутылок вина «Каберне». Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться, равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет разбито не более 2-х бутылок.

Решение.

A — бутылка разбилась.

$n=1500$, $p=0{,}002$, $0\le k\le 2$; $\lambda=np=1500\cdot 0{,}002=3$.

$P_{1500}(0;2)=P_{1500}(0)+P_{1500}(1)+P_{1500}(2).$

$$P_{1500}(0)=\frac{3^0}{0!}\cdot e^{-3}\approx 0{,}0498,$$

$$P_{1500}(1)=\frac{3^1}{1!}\cdot e^{-3}\approx 0{,}1494,$$

$$P_{1500}(2)=\frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3}\approx 0{,}2240.$$

Тогда $P_{1500}(0;2)\approx 0{,}0498+0{,}1494+0{,}2240=0{,}4232$

3. Локальная теорема Муавра-Лапласа

В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p не близка к нулю, для вычисления вероятности $P_n(k)$ того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет k раз, используется ***локальная формула Муавра-Лапласа***:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ называется функцией Гаусса.

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы значений.

Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1) функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2) при $x \geq 4$ можно считать, что $\varphi(x) \approx \varphi(4)$.

Пример:

Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена 160 раз.

Решение.

A — мишень поражена.

$n = 200$, $p = 0{,}7$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $k = 160$;.

$$P_{200}(160) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \cdot \varphi\left(\frac{160 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \varphi\left(\frac{20}{\sqrt{42}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{6{,}48} \cdot \varphi\left(\frac{20}{6{,}48}\right) \approx 0{,}15 \cdot \varphi(3{,}09) \approx 1{,}15 \cdot 0{,}0034 \approx 0{,}0005.$$

4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ или $P_n(k_1, k_2)$ того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, используется ***интегральная формула Муавра-Лапласа***:

$$\boxed{P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)},$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — *функция Лапласа*.

Имеются таблицы приближенных значений функции $\Phi(x)$.

Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1) функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

2) при $x\geq 5$ можно считать, что $\Phi(x)\approx\Phi(5)$.

Пример:

Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 и не более 90 раз.

Решение.

A — мишень поражена.

$n=100$, $p=0{,}8$, $q=1-p=1-0{,}8=0{,}2$, $k_1=75$;.$k_2=90$

$$P_{100}(75,90)\approx\Phi\left(\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)\approx\Phi(2{,}5)-\Phi(-1{,}25)\approx$$

$$\approx\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25)\approx 0{,}4938+0{,}3944\approx 0{,}8882.$$

$$P_{200}(160)\approx\frac{1}{\sqrt{200\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}\cdot\varphi\left(\frac{160-200\cdot 0{,}7}{\sqrt{200\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{42}}\cdot\varphi\left(\frac{20}{\sqrt{42}}\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{6{,}48}\cdot\varphi\left(\frac{20}{6{,}48}\right)\approx 0{,}15\cdot\varphi(3{,}09)\approx 1{,}15\cdot 0{,}0034\approx 0{,}0005.$$

6. Дискретные случайные величины, способы их задания. Функция распределения дискретной случайной величины и ее свойства. Числовые характеристики дискретной случайной величины

- Под ***случайной величиной*** (сокращенно с. в.) понимают величину, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем неизвестно заранее какое.

Случайные величины обозначаются обычно прописными латинскими буквами *X*, *Y*, *Z*, …, а принимаемые ими значения соответственно малыми буквами $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...$.

Примеры с. в.:

1) X — число очков, появляющееся при бросании игральной кости;

2) Y — число выстрелов до первого попадания в цель;

3) Z — время безотказной работы прибора и т. п.

- Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений, называется ***дискретной*** (д. с. в.).

- Если же множество возможных значений с. в. несчетно, то такая величина называется ***непрерывной*** (н. с. в.).

То есть д. с. в. принимает отдельные изолированные друг от друга значения, а н. с. в. может принимать любые значения из некоторого промежутка.

Случайные величины X и Y (примеры 1) и 2)) являются дискретными. С. в. Z (пример 3)) является непрерывной.

Для полного описания с. в. необходимо знать не только ее возможные значения, но и вероятности этих значений.

- ***Законом распределения*** д. с. в. называется правило, позволяющее находить вероятности отдельных значений с. в.

Способы задания закона распределения д. с. в.:

1. ***Табличный***, т. е. в виде таблицы, где в первой строке указываются возможные значения с. в., а во второй — соответствующие им вероятности.

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Такая таблица называется ***рядом распределения д. с. в.***

Так как события $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, $\ldots$, $\{X = x_n\}$ несовместные и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пример:

Ряд распределения д. с. в. X — числа очков, появляющегося при бросании игральной кости, имеет вид

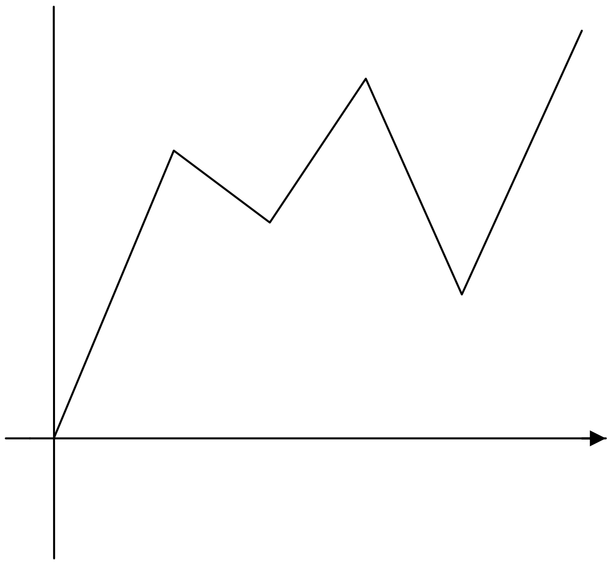
X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. ***Графический.*** На оси абсцисс откладываем возможные значения д. с. в., а на оси ординат — вероятности этих значений. Ломаную, соединяющую последовательно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2), $\ldots$, (x_n, p_n), называют ***многоугольником (или полигоном) распределения***.

Пример:
Д. с. в. задана рядом распределения:

X	1	2	3	4	5
P	0,2	0,15	0,25	0,1	0,3

Построим многоугольник распределения:



3. ***Аналитический.***

- ***Интегральной функцией распределения*** с. в. X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что с. в. X примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Основные свойства интегральной функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(x)$ — неубывающая функция, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
4. $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Пример:
Д. с. в. задана рядом распределения:

X	1	2	3
P	0,2	0,15	0,65

Найдем интегральную функцию распределения:
При $x \le 1$ $F(x) = 0$;
при $1 < x \le 2$ $F(x) = P(X = 1) = 0{,}2$;
при $2 < x \le 3$ $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$;

при $x > 3$ $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}65 = 1$.

Итак, интегральная функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}2 \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}35 \text{ при } 2 < x \le 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Самостоятельно:

Постройте график интегральной функции распределения.

Числовые характеристики дискретной случайной величины.

1. ***Математическим ожиданием*** д. с. в. называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности.

Оно определяет среднее значение д. с. в.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$, где C = const;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$, где C = const;
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$;

2. Для оценки степени рассеивания значений с. в. относительно ее среднего значения вводятся понятия дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

Дисперсией с. в. называется математическое ожидание квадрата отклонения с. в. от ее математического ожидания.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 p_i$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 .$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где C = const;
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где C = const;
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$;

Средним квадратическим отклонением называется величин $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

7. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины, их свойства. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

- Если множество возможных значений с. в. несчетно, то такая величина называется ***непрерывной*** (н. с. в.).

То есть н. с. в. может принимать любые значения из некоторого промежутка.

Каждому промежутку (a,b) из множества значений н. с. в. соответствует определенная вероятность $P(a<X<b)$ того, что значение с. в. X попадает в это промежуток.

- Вероятность $P(a<X<b)$ того, что значение с. в. X попадает в промежуток (a,b), определяется равенством:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ — функция, называемая ***плотностью распределения вероятностей***.

- График функции $f(x)$ называется ***кривой распределения.***

Вероятность $P(a<X<b)$ того, что значение с. в. X попадает в промежуток (a,b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью *Ox* и прямыми $x=a$, $x=b$.

Свойства плотности распределения вероятностей:

1. $f(x)\ge 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

- ***Интегральной функцией распределения*** с. в. X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что с. в. X примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Из последнего равенства следует, что

$$f(x)=F'(x).$$

Функцию $f(x)$ называют также ***дифференциальной функцией распределения.***

Числовые характеристики непрерывной случайной величины:

1. ***Математическое ожидание*** н. с. в.:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

В частности, если все возможные значения $X \in (a,b)$, то

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx.$$

2. ***Дисперсия*** н. с. в.:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx$$

или

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$$

3. ***Среднее квадратическое отклонение*** н. с. в.:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$