

Основы математической логики

1. Логические выражения и логические операции

Исследования в алгебре логики тесно связаны с изучением *высказываний* (хотя высказывание — предмет изучения формальной логики). *Высказывание* — это языковое образование, в отношении которого имеет смысл говорить о его истинности или ложности (Аристотель).

Простым высказыванием называют повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл говорить, *истинно* оно или *ложно*.

Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Примеры высказываний:

1. Москва – столица России.
2. Число 27 является простым.
3. Волга впадает в Каспийское море.

Высказывания 1 и 3 являются *истинными*. Высказывание 2 – *ложным*, потому что число 27 составное $27=3\cdot3\cdot3$.

Следующие предложения высказываниями не являются:

- Давай пойдем гулять.
- $2\cdot x > 8$.
- $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$.
- Который час?

Итак, отличительным признаком высказывания является свойство быть истинным или ложным, последние четыре предложения этим свойством не обладают.

С помощью высказываний устанавливаются свойства, взаимосвязи между объектами. Высказывание истинно, если оно адекватно отображает эту связь, в противном случае оно ложно.

Примеры высказываний:

1. Сегодня светит солнце.
2. Трава растет.

Каждое из этих высказываний характеризует свойства или состояние конкретного объекта (в первом предложении - погоды, во втором - окружающего мира). Каждое из этих высказываний несет значение «*истина*» или «*ложь*».

В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, *истинно* оно или *ложно*. Поэтому высказывание можно представить некоторой *переменной величиной*, значением которой может быть только 0 или 1. Если высказывание *истинно*, то его значение равно 1, если *ложно* - 0.

Простые высказывания назвали **логическими переменными**, а **сложные - логическими функциями**. Значения логической функции также только **0** или **1**. Для простоты записи высказывания обозначаются латинскими буквами **A, B, C**.

В булевой алгебре простым высказываниям ставятся в соответствие логические переменные, значение которых равно **1**, если высказывание **истинно**, и **0**, если высказывание **ложно**. Обозначаются логические переменные, **большими буквами латинского алфавита**.

Сложные (составные) высказывания представляют собой набор простых высказываний (по крайней мере двух) связанных **логическими операциями**.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно **формализовать**, то есть заменить **логической формулой (логическим выражением)**.

Логическое выражение - это символическая запись высказывания, состоящая из **логических величин (констант или переменных)**, объединенных **логическими операциями (связками)**.

Связки **"НЕ", "И", "ИЛИ"** заменяются логическими операциями **отрицание, конъюнкция, дизъюнкция**. Это **основные логические операции**, при помощи которых можно записать любое логическое выражение.

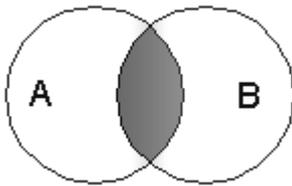
Введем перечисленные **логические операции**.

Конъюнкция - логическое умножение (от латинского conjunctio - союз, связь):

- в естественном языке соответствует союзу **«И»**
- в алгебре высказываний обозначение **« \wedge »**

Конъюнкция - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым (или исходным) высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны. Если хотя бы одно из составляющих высказываний ложно, то и полученное из них с помощью союза **«И»** сложное высказывание также считается ложным.

В алгебре множеств **конъюнкции** соответствует операция **пересечения** множеств, т.е. множеству получившемуся в результате умножения множеств **A** и **B** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно двум множествам.

Таблица истинности			Диаграмма Эйлера-Венна
A	B	A \wedge B	
1	1	1	
1	0	0	
0	1	0	
0	0	0	

Итак, если два высказывания соединены союзом "**И**", то полученное сложное высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны оба исходных высказывания.

Дизъюнкция - логическое сложение (от латинского disjunctio - *разобшение, различие*):

- в естественном языке соответствует союзу «**ИЛИ**»
- в алгебре высказываний обозначение « \vee » или « $+$ »

Дизъюнкция - это логическая операция, которая каждому двум простым (или исходным) высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.

В алгебре множеств **дизъюнкции** соответствует операция **объединения** множеств, т.е. множеству получившемуся в результате сложения множеств **A** и **B** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо множеству **A**, либо множеству **B**.

Таблица истинности			Диаграмма Эйлера-Венна
A	B	A \vee B	
1	1	1	
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	

Итак, если два высказывания соединены союзом "**ИЛИ**", то полученное сложное высказывание истинно когда истинно хотя бы одно из составляющих высказываний.

Рассмотренные выше операции были двуместными (бинарными), т.е. выполнялись над двумя операндами (высказываниями). В алгебре логики определена и широко используется и одноместная (унарная) операция **отрицание**.

Отрицание (от латинского disjunctio - *разобшение, различие*):

- в естественном языке соответствует словам «**неверно, что...**» и частице «**не**»
- в алгебре высказываний обозначение « \bar{A} »

Отрицание - логическая операция, которая с помощью связки «**не**» каждому исходному высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.

В алгебре множеств **логическому отрицанию** соответствует операция **дополнения** до универсального множества, т.е. множеству получившемуся в результате отрицания множества **A** соответствует множество, дополняющее его до универсального множества.

Таблица истинности	Диаграмма Эйлера-Венна						
<table border="1"> <tr> <td>A</td> <td>\bar{A}</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	A	\bar{A}	0	1	1	0	
A	\bar{A}						
0	1						
1	0						

Итак, если исходное выражение истинно, то результат **отрицания** будет ложным, и наоборот, если исходное выражение ложно, то результат **отрицания** будет истинным.

Логическое следование (импликация):

Высказывание, составленное из двух высказываний при помощи связки «**если ..., то ...**», называется **логическим следованием, импликацией** (импликация от латинского *implicare* - **тесно связываю**).

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$A \Rightarrow B$

"Из A следует B"

Итак, новое высказывание, полученное с помощью импликации, является ложным тогда и только тогда, когда условие (посылка **A**) - истинно, а следствие (заключение **B**) - ложно и истинно во всех остальных случаях.

Пример. Дано сложное высказывание: «Если выглянет солнце, то станет тепло». Требуется записать его в виде логической формулы. Обозначим через **A** простое высказывание «выглянет солнце», а через **B** - «станет тепло». Тогда логической формулой этого сложного высказывания будет импликация: $A \Rightarrow B$.

Эквивалентность (логическое тождество):

Высказывание, составленное из двух высказываний при помощи связки «**тогда и только тогда, когда**», называется **эквивалентностью** (эквивалентность - **логическое тождество, равнозначность, взаимная обусловленность**.)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$A \Leftrightarrow B$

"A равносильно B"

Итак, новое высказывание, полученное с использованием эквивалентности, является истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

В алгебре логики логические связки и соответствующие им логические операции имеют специальные названия и обозначаются следующим образом:

Логическая связка	Название логической операции	Обозначения
не	Отрицание	\bar{A}
и, а, но	Конъюнкция, логическое умножение	\cdot, \wedge

или	Дизъюнкция, логическое сложение	$\vee, +$
если ..., то	Импликация, следование	\Rightarrow, \rightarrow
тогда и только тогда, когда	эквивалентность, равнозначность	$\Leftrightarrow, \leftrightarrow$

Примеры записи сложных высказываний с помощью обозначения логических связок:

1. "Быть или не быть - вот в чем вопрос." (В. Шекспир) $A \vee \bar{A} \Leftrightarrow B$
2. "Если хочешь быть красивым, поступи в гусары." (К. Прутков) $A \Rightarrow B$

2. Построение таблиц истинности и логических функций

Логическая функция - это функция, в которой переменные принимают только два значения: **логическая единица** или **логический ноль**. Истинность или ложность сложных суждений представляет собой функцию истинности или ложности простых. Эту функцию называют **булевой функцией суждений** $f(a, b)$.

Любая логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности, в левой части которой записывается набор аргументов, а в правой части - соответствующие значения логической функции. При построении таблицы истинности необходимо учитывать порядок выполнения логических операций.

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении:

1. инверсия;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция;
4. импликация;
5. эквивалентность.

Для изменения указанного порядка выполнения операций используются скобки.

Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:

1. Определить количество строк:
количество строк = 2^n + строка для заголовка,
 n - количество простых высказываний.
2. Определить количество столбцов:
количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;
3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Пример: Составить таблицу истинности логического выражения:

$$D = \bar{A} \wedge (B \vee C).$$

Решение:

1. Определить количество строк:
на входе три простых высказывания: A, B, C поэтому $n=3$ и количество строк $= 2^3 + 1 = 9$.
2. Определить количество столбцов:
 - простые выражения (переменные): A, B, C ;
 - промежуточные результаты (логические операции):
 \bar{A} - инверсия (обозначим через E);
 $B \vee C$ - операция дизъюнкции (обозначим через F);
а также искомое окончательное значение арифметического выражения:
 $D = \bar{A} \wedge (B \vee C)$. т.е. $D = E \wedge F$ - это операция конъюнкции.
3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций.

A	B	C	E	F	E ∧ F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0