МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ФГБОУ ВПО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

**Кафедра высшей математики**

# МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
по организации самостоятельной работы и
выполнению расчетно-графических работ №№ 1-4
для студентов 1 и 2 курсов,
обучающихся по направлению подготовки
35.03.06 «Агроинженерия»
(профиль «Электрооборудование и электротехнологии»)

Караваево 2015

УДК 512(076)
ББК 22.1
М

*Составители:* заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВПО«Костромская ГСХА» *Л.Б. Рыбина*, доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВПО«Костромская ГСХА» *И.А. Батманова*

*Рецензенты*: доктор педагогических наук, профессор кафедры физики ФГБОУ ВПО «Костромская ГСХА» *И.А. Мамаева*, доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВПО «Костромской ГТУ» *Л.А. Секованова*.

*Рекомендовано к изданию*
*методической комиссией факультета электрификации и автоматизации*
*сельского хозяйства ФГБОУ ВПО «Костромская ГСХА»,*
*протокол № от 201 г.*

| | |
|---|---|
| М | МАТЕМАТИКА: учебное пособие по организации самостоятельной работы и выполнению расчетно-графических работ №№ 1-4 для студентов 1 и 2 курсов, обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» (профиль «Электрооборудование и электротехнологии») / сост. Л.Б. Рыбина, И.А. Батманова — Караваево : Костромская ГСХА, 2015. — 81 с. |
| | Учебное пособие содержит задания для расчетно-графических работ №№ 1-4 и индивидуального домашнего задания по дисциплине «Математика», общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями. Содержание и набор задач соответствуют рабочей программе дисциплины. Учебное пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов. |

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по организации самостоятельной работы и выполнению расчетно-графических работ №№ 1-4 предназначено для студентов 1 и 2 курсов, обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» (профиль «Электрооборудование и электротехнологии»).

Издание содержит задания для расчетно-графических работ №№ 1–4, индивидуального домашнего задания, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями. Содержание и набор задач соответствуют рабочей программе дисциплины.

Цель расчетно-графической работы (РГР) и индивидуального домашнего задания (ИДЗ) – помочь студентам закрепить материал, изученный на лекциях и практических занятиях. Для достижения этой цели задания подобраны таким образом, чтобы они охватывали все основные типы задач.

В пособие также включены вопросы и задания по самостоятельному изучению запланированных тем дисциплины.

Сроки выполнения РГР, ИДЗ и самостоятельного изучения отдельных тем указываются рейтинг-плане.

РГР являются одной из основных форм текущего контроля знаний студентов. За РГР выставляется две оценки: по итогам проверки письменной работы и ее защиты.

Самостоятельное изучение каждой запланированной темы дисциплины также оценивается по результатам проверки письменного отчета, представляющего собой конспект, включающий в себя ответы на вопросы и решения задач, предложенных в пособии.

# 1. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ И ИНДИВИДУАЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Расчетно-графическая работа (РГР) и индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) должна выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяет преподаватель.

Работа должна быть выполнена в тетради в клетку, на внешней обложке которой должен быть прикреплен титульный лист. На внутренней стороне обложки размещается лист-задание, выданный преподавателем.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие. Решение задач следует излагать подробно. Все записи, чертежи должны быть аккуратными, четкими и разборчивыми.

На каждой странице тетради необходимо оставить поля шириной 3-5 см для замечаний рецензента. Страницы нумеруются.

Выполненная работа сдается преподавателю в указанный им срок. К выполнению РГР и ИДЗ следует приступать только после прослушивания соответствующих лекций или самостоятельного изучения необходимого материала. Рекомендуется внимательно разобрать решения типовых задач, которые приводятся в данном пособии.

Не зачтенная работа возвращается студенту для исправления ошибок. Все исправления ошибок делаются в конце работы. Исправления в тексте прорецензированной работы не допускаются. Работу с выполненными исправлениями следует сдать преподавателю для повторного рецензирования.

## 2. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1 «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

### *Задание к расчетно-графической работе*

**_Задание №1._**

Даны координаты вершин треугольника $ABC$. Найти:
1) длину стороны $AB$;
2) уравнения сторон $AB$ и $AC$ и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол $A$;
4) уравнение высоты $CD$ и ее длину;
5) уравнение и длину медианы $AE$;
6) уравнение окружности, для которой $CD$ служит диаметром;
7) точку пересечения медиан;
8) уравнение прямой, проходящей через точку $A$, параллельно стороне $CD$.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| 1 | (−3; −2) | (0; 10) | (6; 2) |
| 2 | (1; 1) | (4; 13) | (10; 5) |
| 3 | (0; 3) | (3; 15) | (9; 7) |
| 4 | (−2; 0) | (1; 12) | (7; 4) |
| 5 | (2; −1) | (5; 11) | (11; 3) |
| 6 | (3; −3) | (6; 9) | (12; 1) |
| 7 | (−1; 2) | (2; 14) | (8; 6) |
| 8 | (5; −4) | (8; 8) | (14; 0) |
| 9 | (−4; 5) | (−1; 17) | (5; 9) |
| 10 | (4; 4) | (7; 16) | (13; 8) |
| 11 | (−4; 2) | (4; −4) | (6; 5) |
| 12 | (−2; 1) | (6; −5) | (8; 4) |
| 13 | (−3; −3) | (5; −9) | (7; 0) |
| 14 | (2; 2) | (10; −4) | (12; 5) |
| 15 | (4; −1) | (12; −7) | (14; 2) |
| 16 | (−6; −2) | (2; −8) | (4; 1) |
| 17 | (1; 2) | (13; −7) | (11; 7) |
| 18 | (−7; −1) | (−5;−10) | (3; 4) |
| 19 | (−5; 0) | (7; 9) | (5; −5) |
| 20 | (−7; 2) | (5; 11) | (3; −3) |

***Задание №2.***

Дано уравнение эллипса. Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение | Номер варианта | Уравнение |
|---|---|---|---|
| 1 | $4x^2 + y^2 = 16$ | 11 | $64x^2 + y^2 = 64$ |
| 2 | $9x^2 + 4y^2 = 36$ | 12 | $9x^2 + 16y^2 = 144$ |
| 3 | $4x^2 + y^2 = 36$ | 13 | $25x^2 + 16y^2 = 400$ |
| 4 | $9x^2 + y^2 = 9$ | 14 | $16x^2 + 25y^2 = 400$ |
| 5 | $x^2 + 9y^2 = 9$ | 15 | $x^2 + 16y^2 = 16$ |
| 6 | $x^2 + 4y^2 = 16$ | 16 | $16x^2 + 9y^2 = 144$ |
| 7 | $16x^2 + y^2 = 16$ | 17 | $4x^2 + 3y^2 = 36$ |
| 8 | $3x^2 + 4y^2 = 36$ | 18 | $25x^2 + 9y^2 = 225$ |
| 9 | $x^2 + 9y^2 = 36$ | 19 | $9x^2 + 49y^2 = 441$ |
| 10 | $9x^2 + y^2 = 36$ | 20 | $49x^2 + 9y^2 = 441$ |

***Задание №3.***

Даны действительная полуось $a$ и эксцентриситет $\varepsilon$ гиперболы. Составить уравнение гиперболы и найти координаты ее вершин, фокусов, уравнения асимптот. Построить гиперболу.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | $a$ | $\varepsilon$ | Номер варианта | $a$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $2\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 11 | 8 | $\sqrt{2}$ |
| 2 | $3\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}$ | 12 | $6\sqrt{7}$ | $\sqrt{7}$ |
| 3 | $2\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}$ | 13 | $5\sqrt{7}$ | $2\sqrt{7}$ |
| 4 | $\sqrt{5}$ | $3\sqrt{2}$ | 14 | $4\sqrt{7}$ | $3\sqrt{7}$ |
| 5 | $2\sqrt{5}$ | $\sqrt{3}$ | 15 | $3\sqrt{7}$ | $4\sqrt{7}$ |
| 6 | $3\sqrt{5}$ | $\sqrt{5}$ | 16 | $\sqrt{7}$ | $2\sqrt{7}$ |
| 7 | $4\sqrt{5}$ | $3\sqrt{5}$ | 17 | $3\sqrt{6}$ | $2\sqrt{3}$ |
| 8 | $\sqrt{6}$ | $\sqrt{2}$ | 18 | $4\sqrt{6}$ | 2 |
| 9 | $2\sqrt{6}$ | $\sqrt{3}$ | 19 | $\sqrt{3}$ | $3\sqrt{2}$ |
| 10 | 7 | $\sqrt{3}$ | 20 | $4\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ |

***Задание №4.***

Дано уравнение параболы. Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение | Номер варианта | Уравнение |
|---|---|---|---|
| 1 | $y^2 = -10x$ | 11 | $y^2 = -5x$ |
| 2 | $x^2 = 10y$ | 12 | $x^2 = -5y$ |
| 3 | $y^2 = 9x$ | 13 | $y^2 = 3x$ |
| 4 | $x^2 = -9y$ | 14 | $x^2 = 4y$ |
| 5 | $y^2 = -8x$ | 15 | $y^2 = -3x$ |
| 6 | $x^2 = 8y$ | 16 | $x^2 = 3y$ |
| 7 | $y^2 = 7x$ | 17 | $y^2 = 2x$ |
| 8 | $x^2 = -7y$ | 18 | $x^2 = -2y$ |
| 9 | $y^2 = -6x$ | 19 | $y^2 = -11x$ |
| 10 | $x^2 = 6y$ | 20 | $x^2 = 11y$ |

***Задание №5.***

Даны координаты точек $A$, $B$, $C$, $D$. Требуется:

1) написать уравнение плоскости $ABC$;

2) написать уравнение плоскости, проходящей через точку $D$ параллельно плоскости $ABC$;

3) написать канонические и параметрические уравнения прямой $AB$;

4) написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $D$ перпендикулярно плоскости $ABC$;

5) найти расстояние от точки $D$ до плоскости $ABC$.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Координаты точек | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | *C* | *D* |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | (3; –1; 2) | (4; –1; –1) | (2; 0; 2) | (1; 2; 4) |
| 2 | (2; –1; 2) | (3; –1; –1) | (1; 0; 2) | (0; 2; 4) |
| 3 | (3; 0; 2) | (4; 0; –1) | (2; 1; 2) | (1; 3; 4) |
| 4 | (2; –1; 3) | (3; –1; 0) | (1; 0; 3) | (0; 2; 5) |
| 5 | (3; 1; 2) | (4; 1; –1) | (2; 2; 2) | (1; 4; 4) |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | (2; 1; 2) | (3; 1; –1) | (1; 2; 2) | (0; 4; 4) |
| 7 | (1; 1; 2) | (2; 1; –1) | (0; 2; 2) | (–1; 4; 4) |
| 8 | (0; 1; 2) | (1; 1; –1) | (–1; 2; 2) | (–2; 4; 4) |
| 9 | (0; 2; 2) | (1; 2; –1) | (–1; 3; 2) | (–2; 5; 4) |
| 10 | (0; 2; 1) | (1; 2; –2) | (–1; 3; 1) | (–2; 5; 3) |
| 11 | (2; 1; 0) | (5; 3; 1) | (0; 1; 2) | (4; 3; 1) |
| 12 | (1; 1; 0) | (2; 3; 1) | (1; –1; 2) | (3; 2; 1) |
| 13 | (1; 1; 0) | (3; 4; 5) | (2; 3; 1) | (4; 5; 1) |
| 14 | (2; –1; 0) | (–1; 3; 4) | (1; 1; 1) | (0; 3; 5) |
| 15 | (3; –1; 2) | (7; 9; 1) | (5; 1; 2) | (1; 2; 0) |
| 16 | (2; 4; –3) | (3; 5; –4) | (4; 5; –1) | (3; 4; 0) |
| 17 | (1; 3; –1) | (2; 0; 7) | (–2; 0; 7) | (5; 5; 2) |
| 18 | (1; –1; 1) | (4; 1; 2) | (2; 0; 1) | (5; 2; 8) |
| 19 | (1; 4; –2) | (–2; 5; 0) | (3; 4; 0) | (2; 5; –1) |
| 20 | (2; –1; 1) | (4; –4; 1) | (1; 0; 1) | (3; 4; 6) |

## ***Решение типовых задач***

***Задание № 1.***

Даны координаты вершин треугольника $ABC$: $A(-2;4)$, $B(6;-2)$, $C(8;7)$.

Найти:

1) длину стороны $AB$;
2) уравнения сторон $AB$ и $AC$ и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол $A$;
4) уравнение высоты $CD$ и ее длину;
5) уравнение и длину медианы $AE$;
6) уравнение окружности, для которой $CD$ служит диаметром;
7) точку пересечения медиан;
8) уравнение прямой, проходящей через точку $A$, параллельно стороне $CD$.

*Решение.*

1) Расстояние между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ определяем по формуле:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Подставляя в нее координаты точек $A(-2;4)$ и $B(6;-2)$, найдем длину стороны $AB$:

$$AB = \sqrt{(6-(-2))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставив в него координаты точек $A(-2; 4)$ и $B(6; -2)$, получим уравнение прямой $AB$:

$$\frac{y-4}{-2-4} = \frac{x-(-2)}{6-(-2)},$$

$$\frac{y-4}{-6} = \frac{x+2}{8},$$

$$8(y-4) = -6(x+2),$$

$$4(y-4) - 3(x+2),$$

$$4y - 16 = -3x - 6,$$

$$3x + 4y - 10 = 0.$$

Для нахождения углового коэффициента $k_{AB}$ прямой $AB$ разрешим уравнение этой прямой относительно $y$, то есть запишем в виде

$$y = kx + b,$$

где $k$ — угловой коэффициент:

$$3x + 4y - 10 = 0,$$

$$4y = -3x + 10,$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}.$$

Отсюда определяем угловой коэффициент прямой $AB$:

$$k_{AB} = -\frac{3}{4}.$$

Аналогично по двум точкам $A(-2; 4)$ и $C(8; 7)$, составим уравнение прямой $AC$:

$$\frac{y-4}{7-4} = \frac{x-(-2)}{8-(-2)},$$

$$\frac{y-4}{3} = \frac{x+2}{10},$$

$$10(y-4) = 3(x+2),$$

$$10y - 40 = 3x + 6,$$

$$3x-10y+46=0.$$

Найдем угловой коэффициент $k_{AC}$ прямой $AC$:

$$10y=3x+46,$$

$$y=\frac{3}{10}x+\frac{23}{5},$$

$$k_{AC}=\frac{3}{10}.$$

3) Угол $\varphi$ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны $k_1$ и $k_2$, находится по формуле:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Искомый внутренний угол $A$ образован прямыми $AB$ и $AC$, угловые коэффициенты которых $k_{AB}=-\frac{3}{4}$, $k_{AC}=\frac{3}{10}$. Отмечая на рисунке треугольника $ABC$ в системе координат направление угла $A$ против хода часовой стрелки, определяем порядок прямых: $AB$ — первая, $AC$ — вторая. Следовательно $k_1=k_{AB}=-\frac{3}{4}$, $k_2=k_{AC}=\frac{3}{10}$. Подставляем угловые коэффициенты в формулу угла между прямыми:

$$tgA=\frac{\frac{3}{10}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{10}}=\frac{\frac{6+15}{20}}{1-\frac{9}{40}}=\frac{\frac{21}{20}}{\frac{31}{40}}=\frac{21\cdot 40}{20\cdot 31}=\frac{42}{31}.$$

Тогда

$$\angle A=arctg\frac{42}{31}.$$

4) Высота $CD$ перпендикулярна стороне $AB$, поэтому угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, то есть

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ в заданном угловым коэффициентом *k* направлении, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Для составления уравнения высоты *CD*, подставим в эту формулу координаты точки $C(8; 7)$ и угловой коэффициент $k_{CD} = \frac{4}{3}$:

$$y - 7 = \frac{4}{3}(x - 8),$$

$$3(y - 7) = 4(x - 8),$$

$$3y - 21 = 4x - 32,$$

$$4x - 3y - 11 = 0.$$

Найдем длину высоты *CD*, то есть расстояние от точки *C* до прямой *AB*. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $C(8; 7)$ и коэффициенты из уравнения прямой *AB* $3x + 4y - 10 = 0$:

$$CD = \frac{|3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{42}{\sqrt{25}} = \frac{42}{5} = 8{,}4.$$

5) Точка *E* — середина отрезка *BC*. Для определения ее координат применим формулы деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Подставляем в них координаты точек $B(6; -2)$ и $C(8; 7)$:

$$x_E = \frac{6 + 8}{2} = 7, \quad y_E = \frac{-2 + 7}{2} = \frac{5}{2}.$$

То есть $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$.

Найдем длину медианы *AE*, то есть расстояние между точками $A(-2;4)$ и $E\left(7;\dfrac{5}{2}\right)$:

$$AE=\sqrt{(7-(-2))^2+\left(\frac{5}{2}-4\right)^2}=\sqrt{9^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{81+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{333}{4}}=\frac{3\sqrt{37}}{2}$$

.

6) Точка *D* — точка пересечения прямых *AB* и *CD*. Чтобы найти ее координаты, решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases}3x+4y-10=0,\\4x-3y-11=0.\end{cases}$$

Применим правило Крамера:

$$\begin{cases}3x+4y=10,\\4x-3y=11;\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-4\cdot4=-9-16=-25,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}10 & 4\\11 & -3\end{vmatrix}=10\cdot(-3)-4\cdot11=-30-44=-74,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 10\\4 & 11\end{vmatrix}=3\cdot11-10\cdot4=33-40=-7,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{74}{25},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{7}{25}.$$

Итак, $D\left(\dfrac{74}{25};\dfrac{7}{25}\right)$.

Найдем координаты центра окружности, то есть середину отрезка *CD*, где $C(8;7)$, $D\left(\dfrac{74}{25};\dfrac{7}{25}\right)$:

$$x=\frac{8+\frac{74}{25}}{2}=\frac{274}{50}=\frac{137}{25},$$

$$y=\frac{7+\frac{7}{25}}{2}=\frac{182}{50}=\frac{91}{25}.$$

Итак, $M\left(\frac{137}{25};\frac{91}{25}\right)$ — центр окружности.

Радиус окружности $R$ равен половине длины отрезка $CD$:

$$R=\frac{CD}{2}=\frac{42}{10}=\frac{21}{5}.$$

Уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где $(a;b)$ — координаты центра окружности; $R$ — ее радиус. Подставив в него координаты точки $M\left(\frac{137}{25};\frac{91}{25}\right)$ и $R=\frac{21}{5}$, получим уравнение окружности, для которой $CD$ является диаметром:

$$\left(x-\frac{137}{25}\right)^2+\left(y-\frac{91}{25}\right)^2=\left(\frac{21}{5}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{137}{25}\right)^2+\left(y-\frac{91}{25}\right)^2=\frac{441}{25}.$$

7) Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2:1$, начиная от вершины. Найдем координаты точки $N$, делящей медиану $AE$ в отношении $\lambda=\frac{AN}{NE}=\frac{2}{1}=2$. Используем формулы деления отрезка в данном отношении:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Подставим в них координаты точек $A(-2;4)$, $E\left(7;\frac{5}{2}\right)$ и $\lambda=2$:

$$x_N=\frac{-2+2\cdot 7}{1+2}=4,\quad y_N=\frac{4+2\cdot\frac{5}{2}}{1+2}=3.$$

Итак, $N(4;3)$ — точка пересечения медиан.

8) Составим уравнение прямой $l$, проходящей через точку $A$, параллельно стороне $CD$. Из условия параллельности прямых $l$ и $CD$ следует, что их угловые коэффициенты равны, то есть $k_l = k_{CD} = \frac{4}{3}$. Подставляя в формулу $y - y_1 = k(x - x_1)$ координаты точки $A(-2;4)$ и $k_l = \frac{4}{3}$, получим уравнение прямой $l$:

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - (-2)),$$

$$3y - 12 = 4x + 8,$$

$$4x - 3y + 20 = 0.$$

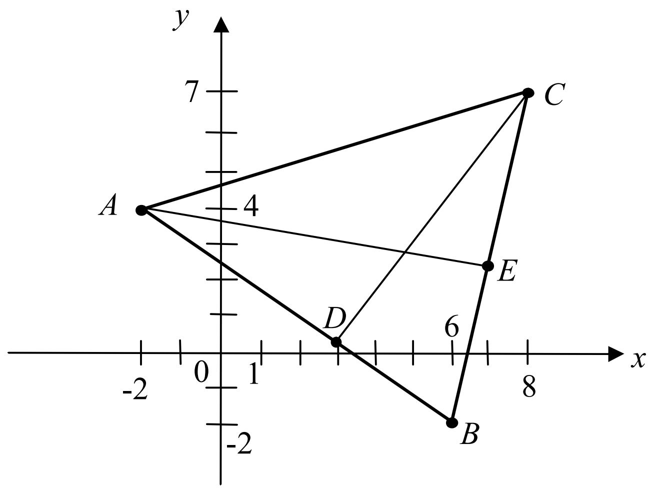


*Рис. 1.* Треугольник *ABC*

***Задание № 2***.

Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Построить эллипс. Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

*Решение.*

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1,$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$ — каноническое уравнение эллипса.

Так как $a^2=9$, то $a=3$ — большая полуось, $b^2=4$, $b=2$ — малая полуось.

$A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-2)$, $B_2(0;2)$ — вершины эллипса.

Найдем $c$ — расстояние от центра эллипса до каждого фокуса по формуле связи $c^2=a^2-b^2$, получим $c^2=9-4=5$, $c=\sqrt{5}$. Тогда $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5};0\right)$ — фокусы эллипса.

Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$, получим $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

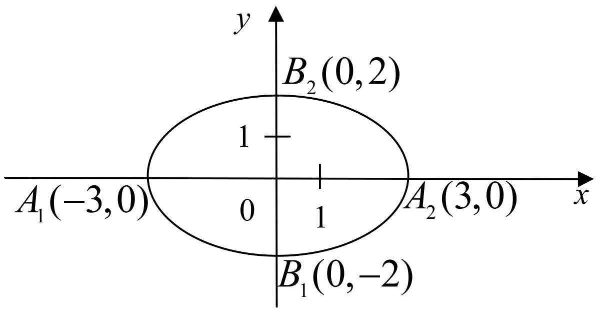


*Рис. 2.* Эллипс.

***Задание № 3***.

Даны действительная полуось $a=2\sqrt{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{3}$ гиперболы. Составить уравнение гиперболы и найти координаты ее вершин, фокусов, уравнения асимптот. Построить гиперболу.

*Решение.*

$A_1\left(-2\sqrt{3};0\right)$, $A_2\left(2\sqrt{3};0\right)$ — вершины гиперболы.

Из формулы для нахождения эксцентриситета гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}$ найдем значение $c$ — расстояние от центра гиперболы до каждого фокуса:

$$c=\varepsilon a=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=6.$$

Тогда $F_1(-6;0)$, $F_2(6;0)$ — фокусы гиперболы.

Из формулы связи $c^2=a^2+b^2$ найдем мнимую полуось $b$:

$$b^2=c^2-a^2=6^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=36-12=24,$$

$$b=\sqrt{24}=2\sqrt{6}.$$

Составим каноническое уравнение гиперболы, которое имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Получим

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1.$$

Уравнения асимптот гиперболы:

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Подставив $a=2\sqrt{3}$, и $b=2\sqrt{6}$, получим:

$$y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}x.$$

После преобразований имеем уравнения асимптот данной гиперболы:

$$y=\pm\sqrt{2}x.$$

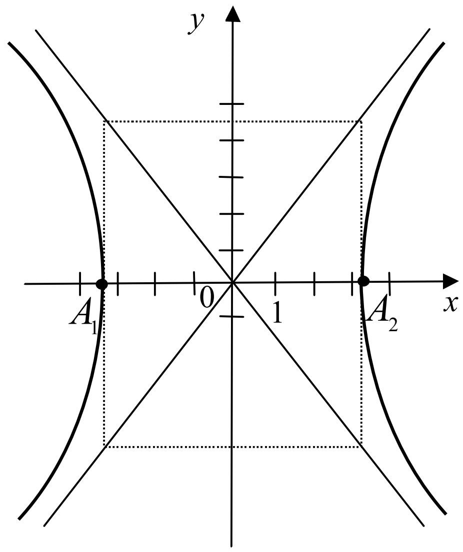


*Рис. 3.* Гипербола

***Задание № 4***.

Дано уравнение параболы $y^2=4x$. Построить параболу и найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

*Решение.*

$y^2=4x$ — уравнение параболы, с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси *Ox*, с ветвями, идущими вправо. $y^2 = 2px$ — общий вид уравнения такой параболы, где $p$ — расстояние между фокусом и директрисой.

Из уравнения находим: $2p = 4$, откуда $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$.

Директрисой параболы $y^2 = 2px$ является прямая, параллельная оси $Oy$, с уравнением $x = -\frac{p}{2}$, а фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Таким образом, для данной параболы директрисой служит прямая $x = -1$, а точка $F(1; 0)$ — фокусом.

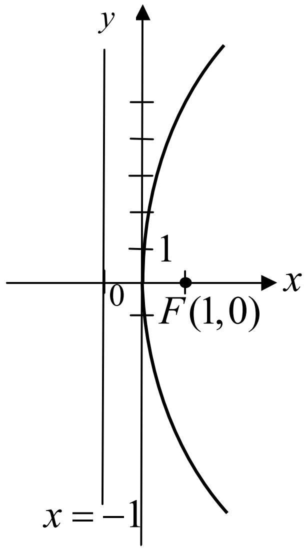


*Рис. 4.* Парабола

***Задание № 5***.

Даны координаты точек $A(4; 1; -5)$, $B(-2; 3; -4)$, $C(-2; 1; 3)$, $D(0; -1; 2)$.

Требуется:

1) написать уравнение плоскости *ABC*;

2) написать уравнение плоскости, проходящей через точку *D* параллельно плоскости *ABC*;

3) написать канонические и параметрические уравнения прямой *AB*;

4) написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку *D* перпендикулярно плоскости *ABC*;

5) найти расстояние от точки *D* до плоскости *ABC*.

*Решение.*

1) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим в него координаты точек $A(4;1;-5)$, $B(-2;3;-4)$, $C(-2;1;3)$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+5 \\ -2-4 & 3-1 & -4+5 \\ -2-4 & 1-1 & 3+5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+5 \\ -6 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-4)\cdot 2\cdot 8+(y-1)\cdot 1\cdot(-6)+(z+5)\cdot(-6)\cdot 0-$$

$$-(z+5)\cdot 2\cdot(-6)-(x-4)\cdot 1\cdot 0-(y-1)\cdot(-6)\cdot 8=0,$$

$$16x-64-6y+6+12z+60+48y-48=0,$$

$$16x+42y+12z+46=0,$$

$$8x+21y+6z+23=0.$$

Таким образом, $8x+21y+6z+23=0$ — уравнение плоскости *ABC*.

2) Для составления уравнения плоскости $\alpha$, проходящей через точку *D* параллельно плоскости *ABC*, найдем координаты ее нормального вектора, в качестве которого можно взять нормальный вектор плоскости *ABC* в силу их параллельности.

Если общее уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, то ее нормальный вектор имеет координаты $\vec{n}=(A;B;C)$.

Для плоскости *ABC* с уравнением $8x+21y+6z+23=0$ нормальным вектором является вектор $\vec{n}=(8;21;6)$. Он же служит и нормальным вектором для плоскости $\alpha$.

Если плоскость проходит через точку $M(x_1;y_1;z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}=(A;B;C)$, то ее уравнение имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Подставим в него координаты точки $D(0; -1; 2)$ и нормального вектора $\vec{n} = (8; 21; 6)$:

$$8(x-0) + 21(y-(-1)) + 6(z-2) = 0,$$

$$8x + 21y + 21 + 6z - 12 = 0,$$

$$8x + 21y + 6z + 9 = 0.$$

Таким образом, $8x + 21y + 6z + 9 = 0$ — уравнение плоскости $\alpha$, проходящей через точку *D* параллельно плоскости *ABC*.

3) Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Подставив в них координаты точек $A(4; 1; -5)$ и $B(-2; 3; -4)$, получим канонические уравнения прямой *AB*:

$$\frac{x-4}{-2-4} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-(-5)}{-4-(-5)},$$

$$\frac{x-4}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{1}.$$

От канонических уравнений прямой *AB*, введя параметр *t*, перейдем к ее параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-4}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{1} = t,$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{-6} = t, \\ \dfrac{y-1}{2} = t, \\ \dfrac{z+5}{1} = t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -6t + 4, \\ y = 2t + 1, \\ z = t - 5. \end{cases}$$

4) Составим канонические уравнения прямой *l*, проходящей через точку *D* перпендикулярно плоскости *ABC*. В качестве направляющего вектора $\vec{s}$ прямой *l* можно взять нормальный вектор перпендикулярной ей плоскости *ABC*, то есть $\vec{s} = \vec{n} = (8; 21; 6)$.

Если прямая проходит через точку $M(x_1; y_1; z_1)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, то ее канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Подставив в них координаты точки $D(0;-1;2)$ и направляющего вектора $\vec{s}=(8;21;6)$, получим канонические уравнения прямой $l$, проходящей через точку $D$ перпендикулярно плоскости $ABC$:

$$\frac{x-0}{8}=\frac{y-(-1)}{21}=\frac{z-2}{6},$$

$$\frac{x}{8}=\frac{y+1}{21}=\frac{z-2}{6}.$$

5) Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости с уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ находим по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Подставим в нее координаты точки $D(0;-1;2)$ и коэффициенты из уравнения плоскости $ABC$ $8x+21y+6z+23=0$:

$$d=\frac{|8\cdot 0+21\cdot(-1)+6\cdot 2+23|}{\sqrt{8^2+21^2+6^2}}=\frac{14}{\sqrt{541}}=\frac{14\sqrt{541}}{541}\approx 0{,}6.$$

Таким образом, расстояние от точки $D$ до плоскости $ABC$ равно $d=\dfrac{14\sqrt{541}}{541}$.

## *Защита РГР № 1 «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»*

*Теоретические вопросы:*

1. Расстояние между двумя точками на плоскости.
2. Деление отрезка в данном отношении. Координаты середины отрезка
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Определение углового коэффициента.
4. Уравнение прямой, проходящей через точку в данном направлении
5. Уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки.
6. Общее уравнение прямой, его частные случаи
7. Уравнение прямой в «отрезках на осях».
8. Формула для нахождения угла между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых..

9. Расстояние от точки до прямой.

10. Определение и каноническое уравнение окружности.

11. Определение и каноническое уравнение эллипса. Эксцентриситет, фокусы эллипса.

12. Определение и каноническое уравнение гиперболы. Эксцентриситет, фокусы, уравнения асимптот гиперболы.

13. Определение и каноническое уравнение параболы. Фокус, уравнение директрисы параболы (рассмотреть 4 вида параболы).

14. Парабола, как график квадратного трехчлена.

15. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

16. Общее уравнение плоскости и его частные случаи.

17. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

18. Уравнение плоскости в «отрезках».

19. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

20. Расстояние от точки до плоскости.

21. Параметрические уравнения прямой в пространстве.

22. Канонические уравнения прямой в пространстве.

23. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две данные точки.

24. Общие уравнения прямой в пространстве и переход от них к каноническим уравнениям.

25. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

26. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости;

27. Нахождение точки пересечения прямой с плоскостью;

28. Нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве.

*Задачи:*

№ 1. Даны координаты вершин треугольника $ABC$: $A(-2;4)$, $B(6;-2)$, $C(8;7)$.

Найдите:

1) длину стороны $AB$;
2) уравнения сторон $AB$ и $AC$ и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол $A$;
4) уравнение высоты $CD$ и ее длину;

5) уравнение и длину медианы $AE$;

6) уравнение окружности, для которой $CD$ служит диаметром;

7) точку пересечения медиан;

8) уравнение прямой, проходящей через точку $A$, параллельно стороне $CD$.

9) систему линейных неравенств, определяющих треугольник $ABC$.

№ 2. Найдите координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$.

№ 3. Найдите полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 144$. Постройте кривую.

№ 4. Составьте каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами, которые лежат на оси $Ox$, равно 10, а большая ось равна 16.

№ 5. Составьте каноническое уравнение эллипса, зная, что один из фокусов имеет координаты $(-5; 0)$, а малая полуось равна 4.

№ 6. Составьте каноническое уравнение эллипса, зная, что большая полуось $a$ =12, а эксцентриситет равен 0,5.

№ 7. Постройте гиперболу $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$. Найдите: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

№ 8. Составьте уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если ее фокусы лежат на оси $Ox$, и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

№ 9. Составьте уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если один из ее фокусов имеет координаты (–13; 0), а эксцентриситет равен $\frac{13}{12}$.

№ 10. Постройте параболу $y^2 = 6x$. Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.

№ 11. Составьте уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а фокус имеет координаты (0; –3).

№ 12. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $(-5; 4; 3)$ параллельно плоскости $2x - 7y + 3z - 15 = 0$.

№ 13. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1; -2; 3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+7}{2} = \frac{y+4}{3} = z$.

№ 14. Найдите расстояние от точки $(5;-1;2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(2;4;-2)$, $M_2(-3;1;0)$, $M_3(4;7;-2)$.

№ 15. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $(4;-5;7)$, $(2;9;-4)$.

№ 16. Найдите координаты направляющего вектора прямой $\begin{cases} 2x-7y+3z-10=0, \\ x+3y-5z-7=0. \end{cases}$

№ 17. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(2;-5;7)$ параллельно прямой $\dfrac{x+7}{4}=\dfrac{y+4}{-3}=z$.

№ 18. Найдите угол между прямой $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z}{4}$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $(2;-1;6)$.

№ 19. Найдите угол между прямой $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z}{4}$ и плоскостью $4x+y-3z+5=0$.

№ 20. Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ с плоскостью $x+2y+3z=29$.

№ 21. Найдите расстояние от точки $(2;3;1)$ до прямой $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$.

# 3. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 «ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ»

## *Задания к расчетно-графической работе*

***Задание № 1.***

Найти наибольшее и наименьшее значения данной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | $y = f(x)$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ | $-1$ | 3 |
| 2 | $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ | $-1$ | 2 |
| 3 | $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ | 2 | 4 |
| 4 | $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ | $-1$ | 2 |
| 5 | $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ | 0 | 4 |
| 6 | $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ | $-2$ | 3 |
| 7 | $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ | $-3$ | 0 |
| 8 | $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$ | $-3$ | 1 |
| 9 | $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$ | 1 | 4 |
| 10 | $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$ | $-1$ | 4 |
| 11 | $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$ | $-4$ | 1 |
| 12 | $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$ | $-4$ | 0 |
| 13 | $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$ | $-5$ | 0 |
| 14 | $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ | 0 | 3 |
| 15 | $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$ | $-3$ | 5 |
| 16 | $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$ | $-5$ | 3 |
| 17 | $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$ | $-5$ | $-1$ |
| 18 | $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$ | $-5$ | 2 |

| Номер варианта | $y = f(x)$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| 19 | $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$ | $-2$ | 3 |
| 20 | $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$ | 1 | 5 |

***Задание № 2.***

Исследовать данную функцию $y = f(x)$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование функции рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на непрерывность;
3) исследовать функцию на четность;
4) найти интервалы возрастания (убывания) функции, точки экстремума;
5) найти интервалы выпуклости (вогнутости), точки перегиба графика функции;
6) найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно);
7) по результатам исследования построить график функции.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | $y = f(x)$ |
|---|---|
| 1 | $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$ |
| 2 | $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$ |
| 3 | $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$ |
| 4 | $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ |
| 5 | $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$ |
| 6 | $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$ |
| 7 | $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$ |
| 8 | $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$ |
| 9 | $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$ |
| 10 | $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$ |

| Номер варианта | $y = f(x)$ |
|---|---|
| 11 | $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ |
| 12 | $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ |
| 13 | $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ |
| 14 | $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ |
| 15 | $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ |
| 16 | $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ |
| 17 | $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ |
| 18 | $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$ |
| 19 | $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$ |
| 20 | $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$ |

***Задание № 3.***

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

Исследование функции рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на непрерывность;
3) исследовать функцию на четность;
4) найти интервалы возрастания (убывания) функции, точки экстремума;
5) найти интервалы выпуклости (вогнутости), точки перегиба графика функции;
6) найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно);
7) найти асимптоты графика функции;
8) по результатам исследования построить график функции.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | $y = f(x)$ |
|---|---|
| 1 | $y = \frac{x^2 - 14}{x - 4}$ |
| 2 | $y = \frac{x^2 + 16}{x + 3}$ |
| 3 | $y = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$ |
| 4 | $y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$ |
| 5 | $y = \frac{x^2 + 9}{x}$ |
| 6 | $y = \frac{x^2 - 15}{x + 4}$ |
| 7 | $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ |
| 8 | $y = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$ |
| 9 | $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ |
| 10 | $y = \frac{x^2 + 4}{x}$ |
| 11 | $y = \frac{x^2 + 9}{x + 4}$ |
| 12 | $y = \frac{x^2 - 8}{x - 3}$ |
| 13 | $y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$ |
| 14 | $y = \frac{x^2}{x - 1}$ |
| 15 | $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ |
| 16 | $y = \frac{x^2 + 24}{x + 1}$ |

| Номер варианта | $y = f(x)$ |
|---|---|
| 17 | $y = \dfrac{x^2 - 14}{x - 4}$ |
| 18 | $y = \dfrac{x^2 + 16}{x + 3}$ |
| 19 | $y = \dfrac{x^2 + 21}{x - 2}$ |
| 20 | $y = \dfrac{x^2 + 8}{x + 1}$ |

***Задание № 4.***

Решите задачу:

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Задача |
|---|---|
| 1 | Требуется вырыть силосную яму $V = 32$ м$^3$ с квадратным дном таких размеров, чтобы на облицовку ее стен и дна пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы? |
| 2 | Скорость роста $y$ популяции $x$ задана формулой $y = 0{,}001x(100 - x)$. При каком размере популяции эта скорость максимальна? |
| 3 | Найти положительное число $x$, чтобы разность $x - x^2$ была наибольшей. |
| 4 | Площадь прямоугольного участка земли 144 м$^2$. При каких размерах участка длина окружающего его забора будет наименьшей? |
| 5 | Число 20 разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим. |
| 6 | Проволокой длиной 20 м требуется огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей? |

| Номер варианта | Задача |
|---|---|
| 7 | Найти число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение. |
| 8 | Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 м$^2$ и разделить, затем этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей? |
| 9 | Огород прямоугольной формы огорожен изгородью, длина которой 72 м. Каковы должны быть размеры огорода, чтобы его площадь была наибольшей? |
| 10 | Деталь из листового железа имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 см. Каким должно быть основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей? |
| 11 | Какое положительное число, будучи сложенным, с обратным ему числом, дает наименьшую сумму? |
| 12 | Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей. |
| 13 | Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей. |
| 14 | Зависимость между урожаем озимой пшеницы $y$ (ц/га) и нормой посева семян $x$ (млн. зерен/га) выражается формулой $y = 5{,}6 + 8{,}1x - 0{,}7x^2$. Найдите норму посева семян для того, чтобы получить максимальный урожай. |
| 15 | Из прямоугольного листа жести размером $24 \times 9$ см требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей? |
| 16 | Зависимость суточного удоя $y$ в литрах от возраста коров $x$ в годах определяется уравнением |

| Номер варианта | Задача |
|---|---|
| | $y=-9{,}53+6{,}86x-0{,}49x^2$, $x>2$. Найти возраст дойных коров, при котором суточный удой будет наибольшим. |
| 17 | Площадь прямоугольного треугольника 6 см$^2$. Найдите наименьшее значение площади квадрата, построенного на гипотенузе треугольника. |
| 18 | Длина, ширина и высота бака, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, составляют в сумме 36 см. Чему равен наибольший объем такого бака? |
| 19 | Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольший? |
| 20 | Открытый чан имеет форму цилиндра объема $V=27\pi$ м$^3$. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала? |

## Решение типовых задач

***Задание № 1.***

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^4-2x^2+5$ на отрезке $[-2;3]$.

*Решение.*

Найдем производную функции:

$$y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right).$$

Найдем критические точки:

$$y'=0,\ 4x\left(x^2-1\right)=0,$$

$$x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1.$$

Все критические точки принадлежат отрезку $[-2;3]$.

Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$y(0)=5,$$

$$y(-1)=4,$$

$$y(1)=4,$$

$$y(-2)=12,$$

$$y(3)=68.$$

Итак, $y_{наиб}=y(3)=68$, $y_{наим}=y(-1)=y(1)=4$.
*Ответ:* $y_{наиб}=y(3)=68$, $y_{наим}=y(-1)=y(1)=4$.

***Задание № 2***.

Исследовать функцию $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$ методами дифференциального исчисления и построить ее график. Исследование рекомендуется проводить по плану:

1. найти область определения функции;
2. исследовать функцию на непрерывность;
3. исследовать функцию на четность (нечетность);
4. исследовать функцию на экстремумы и промежутки монотонности;
5. найти точки перегиба графика функции и определить промежутки выпуклости (вогнутости) графика функции;
6. найти асимптоты графика (если они имеются);
7. построить график функции, используя результаты исследования.

*Решение.*

1. Область определения функции: $D(y)=R$.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения.

3. Исследуем функцию на четность:

$$y(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-(-x)^2-3(-x)+5=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+5.$$

Так как $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, то есть это функция общего вида. Ее график не будет обладать симметрией относительно начала координат и оси $Oy$.

4. Найдем первую производную:

$$y'=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5\right)'=x^2-2x-3.$$

Найдем критические точки функции. Приравняем производную к нулю и решим уравнение:

$$x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1},$$

$$x_1 = -1, \; x_2 = 3.$$

Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критические точки. Эти точки разбивают область определения на три интервала: $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$, $(3; +\infty)$. В полученных интервалах расставляем знак производной $y'$ (рис. 5).

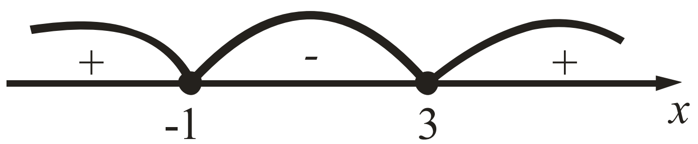


*Рис. 5.* Исследование на экстремум

Данная функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; 3)$.

$x = -1$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 5 = 6\frac{2}{3},$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 5 = -4.$$

5. Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(x^2 - 2x - 3\right)'' = 2x - 2.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем производную $y''$ к нулю и решим уравнение:

$$2x - 2 = 0,$$

$$x = 1.$$

Точек, в которых вторая производная $y''$ не существует, нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критическую точку второго рода. Область определения разбивается на два интервала: $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$. В полученных интервалах расставим знак второй производной $y''$ (рис. 6).

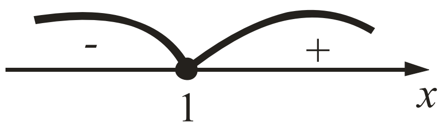


*Рис.6.* Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на интервале $(-\infty;1)$ и вогнутый на интервале $(1;+\infty)$.

При переходе через критическую точку второго рода $x=1$ вторая производная меняет знак, следовательно, $x=1$ – абсцисса точки перегиба.

Вычислим значение функции в точке $x=1$:

$$y(1)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-1^2-3\cdot 1+5=\frac{1}{3}-1-3+5=1\frac{1}{3}.$$

$y=1\frac{1}{3}$ – ордината точки перегиба.

Итак, $\left(1;1\frac{1}{3}\right)$ – точка перегиба.

6. Для нахождения точки пересечения графика функции с осью $Oy$ подставим в уравнение функции значение $x=0$. Тогда $y=5$. Значит, график функции пересекает ось $Oy$ в точке $(0;5)$.

Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью $Ox$ следует решить кубическое уравнение $\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5=0$. Оно имеет не более трех решений. Следовательно, график функции пересекает ось $Ox$ не более чем в трех точках.

7. По результатам исследования построим график функции (рис. 7).

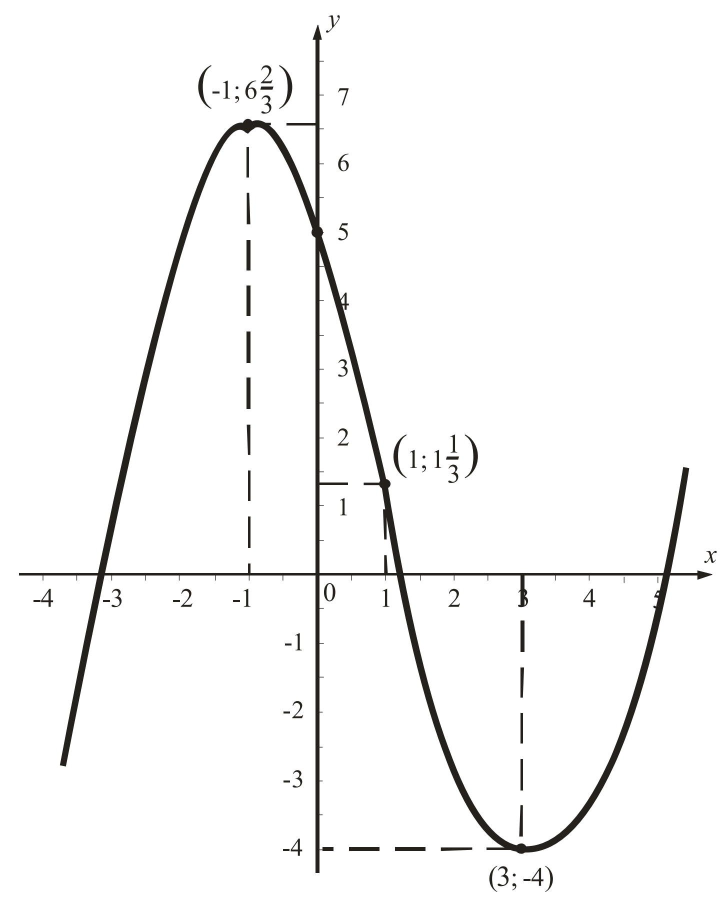


*Рис.7.* График функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

***Задание № 3.***

Исследовать данную функцию $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$ и построить ее график.

Исследование рекомендуется проводить по плану:

1. найти область определения функции;
2. исследовать функцию на непрерывность;
3. исследовать функцию на четность (нечетность);
4. исследовать функцию на экстремумы и промежутки монотонности;
5. найти точки перегиба графика функции и определить промежутки выпуклости (вогнутости) графика функции;
6. найти асимптоты графика (если они имеются);
7. построить график функции, используя результаты исследования.

*Решение.*

1. Найдем область определения функции: $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

2. Исследуем функцию на непрерывность: $x=3$ – точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=-\infty,\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=+\infty.$$

Следовательно, $x=3$ – точка разрыва второго рода.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-6(-x)+13}{-x-3}=\frac{x^2+6x+13}{-x-3};$$

$$y(-x)\neq y(x),\ y(-x)\neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y'=\frac{(2x-6)(x-3)-\left(x^2-6x+13\right)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

Найдем критические точки:

$y'=0$, если $x^2-6x+5=0$, откуда $x_1=1$ и $x_2=5$.

Производная не существует при $x=3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 8).

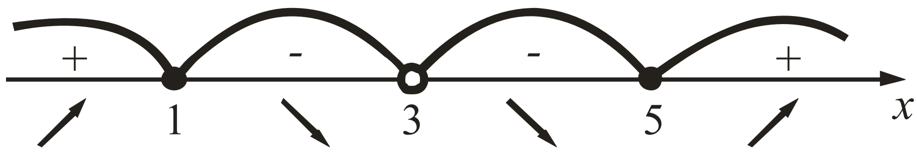


*Рис. 8.* Исследование на экстремум

Функция возрастает на $(-\infty;1)$ и на $(5;+\infty)$.

Функция убывает на $(1;3)$ и на $(3;5)$.

$x=1$ – точка максимума, $x=5$ – точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max}=y(1)=-4,$$
$$y_{\min}=y(5)=4.$$

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)'=\frac{\left(x^2-6x+5\right)'(x-3)^2-\left(x^2-6x+5\right)\left((x-3)^2\right)'}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{(2x-6)(x-3)^2-\left(x^2-6x+5\right)2(x-3)}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{2(x-3)\left((x-3)^2-x^2+6x-5\right)}{(x-3)^4}=\frac{2\left(x^2-6x+9-x^2+6x-5\right)2(x-3)}{(x-3)^3}=\frac{8}{(x-3)^3}$$

.

Найдем критические точки второго рода. Приравняем вторую производную $y''$ к нулю и решим уравнение $\frac{8}{(x-3)^3}=0$. Оно не имеет решений.

Вторая производная не существует при $x=3$, но данная точка не является точкой перегиба, так как является точкой разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

На числовую ось нанесем область определения функции. В полученных интервалах расставим знак второй производной $y''$ (рис. 9).

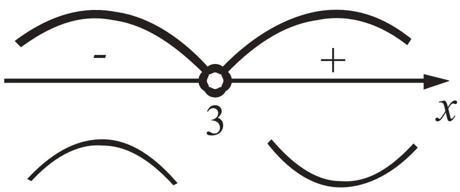


*Рис. 9.* Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на $(-\infty;3)$ и вогнутый на $(3;+\infty)$.

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как $x=3$ – точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением $x=3$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y=kx+b$. Найдем параметры $k$ и $b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x(x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x^2-3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{13}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1$$

,

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-6x+13}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13-x^2+3x}{x-3}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+13}{x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3+\frac{13}{x}}{1-\frac{3}{x}} = -3.$$

Итак, $y = x - 3$ – уравнение наклонной асимптоты.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

При $x = 0$ получим $y = \frac{13}{-3} = -4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0; -4\frac{1}{3}\right)$ – точка пересечения с осью $Oy$.

При $y = 0$ получим $\frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} = 0$, $x^2 - 6x + 13 = 0$;

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0.$$

Следовательно, точек пресечения с осью $Ox$ нет.

8. По результатам исследования строим график функции (рис. 10).

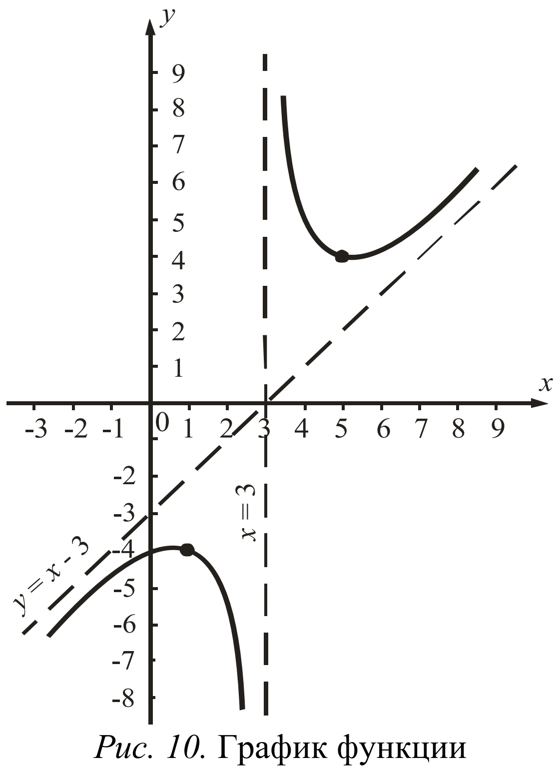


*Рис. 10.* График функции

***Задание № 4.***

Определить размеры силосного сооружения, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, объемом 108 м$^3$, чтобы суммарная площадь поверхности дна и стенок была минимальной.

*Решение.*

Пусть $x$ м – сторона основания силосного сооружения, а $y$ м – его глубина. Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x,\ y) = x^2 + 4xy.$$

Так как объем сооружения 108 м$^3$ и $V = x^2 y$, то $y = \dfrac{108}{x^2}$.

Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}, \text{ где } x > 0.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое значение $x$, при котором функция $S(x)$ принимает наименьшее значение.

Найдем производную:

$$S' = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0.$$

Решая это уравнение относительно $x$, получим $x = 6$.

На числовую ось нанесем область определения функции $S(x)$ и критическую точку $x = 6$. В полученных промежутках расставляем знак производной $S'$ (рис. 11).


*Рис. 11.* Знаки производной

По достаточному условию экстремума в точке $x = 6$ функция $S(x)$ имеет минимум. Так как функция $S(x)$ непрерывна при $x > 0$ и имеет единственную точку экстремума $x = 6$ и это точка минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение, то есть $S_{наим} = S(6)$. Тогда глубина сооружения $y = \dfrac{108}{x^2} = \dfrac{108}{36} = 3$ (м).

*Ответ:* длина основания 6 м, глубина 3 м.

## *Защита РГР № 2 «Исследование функций с помощью производных и построение графиков»*

*Теоретические вопросы:*

1. Определения возрастающей и убывающей функций. Необходимые условия возрастания и убывания функции.
2. Достаточные условия возрастания и убывания функции.
3. Определения точек максимума и минимума функции одной переменной. Необходимое условие экстремума функции.
4. Достаточные условия экстремума функции одной переменной.
5. Определения выпуклого и вогнутого графиков функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции.
6. Определение точки перегиба. Достаточные условия существования точки перегиба.
7. Определение асимптоты графика функции. Виды асимптот.
8. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке.

*Задачи для подготовки к защите РГР:*

№ 1. Для указанных функций найти интервалы возрастания, убывания и экстремумы:

1) $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \dfrac{11}{3}$,

2) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$.

№ 2. Для указанных функций найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба:

1) $y = x^7 + 7x + 1$,

2) $y = x^4 + 6x^2$.

№ 3. Провести полное исследование функции и построить ее график:

1) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2\dfrac{1}{3}$,

2) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$.

№ 4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 2]$.

№ 5. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x^2}{2x-1}$.

# 4. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

***Задание № 1.***

Найти алгебраическую форму комплексного числа $z$, выполнив действия в показательной форме. Найти модуль $|z|$ и значение аргумента $\arg z$ комплексного числа $z$.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | $z$ | Номер варианта | $z$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $z=\dfrac{4-4i}{(2-2i)^6}$ | 11 | $z=\dfrac{(\sqrt{3}-i)^5}{(\sqrt{3}+i)^7}$ |
| 2 | $z=\dfrac{(2-2i)^6}{(1-\sqrt{3}i)^6}$ | 12 | $z=\dfrac{(3-3i)^3}{(1+\sqrt{3}i)^5}$ |
| 3 | $z=\dfrac{(1-i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^5}$ | 13 | $z=\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}{\left(-2-2i\right)^6}$ |
| 4 | $z=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{(1-i)^4}$ | 14 | $z=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^5}$ |
| 5 | $z=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^3}{(1+i)^4}$ | 15 | $z=\dfrac{\left(2+2i\right)^2}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}$ |
| 6 | $z=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{(-2-2i)^4}$ | 16 | $z=\dfrac{\left(4+4i\right)^8}{\left(2-2i\right)^6}$ |
| 7 | $z=\dfrac{(1-i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$ | 17 | $z=\dfrac{\left(2+2i\right)^6}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^6}$ |
| 8 | $z=\dfrac{(1-i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3}$ | 18 | $z=\dfrac{\left(1-i\right)^6}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^5}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 9 | $z=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{20}}{(1-i)^{20}}$ | 19 | $z=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{3}}{\left(1-i\right)^{4}}$ |
| 10 | $z=\dfrac{(1+i)^{9}}{(1-i)^{7}}$ | 20 | $z=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{3}}{\left(1+i\right)^{4}}$ |

***Задание № 2.***

Решить квадратное уравнение. Корни уравнения найти в алгебраической форме.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение | Номер варианта | Уравнение |
|---|---|---|---|
| 1 | $z^2+2z+26=0$ | 11 | $2z^2+6z+5=0$ |
| 2 | $z^2-4iz-13=0$ | 12 | $3z^2+5iz+2=0$ |
| 3 | $z^2+2iz-5=0$ | 13 | $z^2+8iz-7=0$ |
| 4 | $10z^2+2z+1=0$ | 14 | $z^2+6iz-18=0$ |
| 5 | $z^2-4z+20=0$ | 15 | $5z^2+2iz+3=0$ |
| 6 | $z^2+iz+2=0$ | 16 | $z^2-2z+2=0$ |
| 7 | $z^2-8z+17=0$ | 17 | $z^2-2z+17=0$ |
| 8 | $z^2+2iz+8=0$ | 18 | $z^2-10iz-9=0$ |
| 9 | $2z^2+3iz+2=0$ | 19 | $5z^2-2iz-1=0$ |
| 10 | $5z^2+2z+1=0$ | 20 | $z^2+2z+10=0$ |

***Задание № 3.***

Дано уравнение. Найти $z$, выполнив действия в алгебраической форме.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение | Номер варианта | Уравнение |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $z(1+4i)=-1+i$ | 11 | $z\left(3-i\right)=2+i$ |
| 2 | $z\left(3-i\right)=1+2i$ | 12 | $z\left(1+4i\right)=-2+i$ |
| 3 | $z\left(2-i\right)=3+i$ | 13 | $z\left(-1+2i\right)=3+i$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 4 | $z(1-i)=-2+i$ | 14 | $z(1-i)=1-2i$ |
| 5 | $z(1+i)=2-4i$ | 15 | $z(2+3i)=-1+i$ |
| 6 | $z(1+i)=-3+2i$ | 16 | $z(3-i)=1-2i$ |
| 7 | $z(2+i)=1-i$ | 17 | $z(3-i)=-2+i$ |
| 8 | $z(3+i)=-2+i$ | 18 | $z(-2+3i)=i-5$ |
| 9 | $z(1+3i)=1+2i$ | 19 | $z(1+4i)=-1+2i$ |
| 10 | $z(2+3i)=1+i$ | 20 | $z(1-i)=-2-i$ |

***Задание № 4.***

1) Найти значение многочлена $P(x)$ в точке $x_0$.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Многочлен $P(x)$ | $x_0$. |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | $P(x)=x^2-2ix-5$ | $x_0=2-i$ |
| 2 | $P(x)=7x^3-9x^2+x-6$ | $x_0=2+i$ |
| 3 | $P(x)=x^2+4x+20$ | $x_0=1-i$ |
| 4 | $P(x)=2x^2+4x-4$ | $x_0=-1-2i$ |
| 5 | $P(x)=x^2-4ix-13$ | $x_0=3+2i$ |
| 6 | $P(x)=x^3+3x^2-24x-80$ | $x_0=5+i$ |
| 7 | $P(x)=-x^3-3x^2+24x-80$ | $x_0=5+i$ |
| 8 | $P(x)=2x^3-5x^2-4x+12$ | $x_0=2+2i$ |
| 9 | $P(x)=x^2+2ix-5$ | $x_0=2+i$ |
| 10 | $P(x)=x^2-8x+12$ | $x_0=2+i$ |
| 11 | $P(x)=x^2+8ix-7$ | $x_0=1-7i$ |
| 12 | $P(x)=5x^2-3ix-5$ | $x_0=3-i$ |
| 13 | $P(x)=6x^3+3x^2-9x+11$ | $x_0=-2-3i$ |
| 14 | $P(x)=2x^3-3x^2-4x+4$ | $x_0=1+2i$ |
| 15 | $P(x)=x^2-x+1$ | $x_0=4-i$ |
| 16 | $P(x)=x^2-4ix-13$ | $x_0=3-2i$ |
| 17 | $P(x)=x^3+3x^2-24x-80$ | $x_0=3+i$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 18 | $P(x)=x^3+3x^2-24x-80$ | $x_0=5-2i$ |
| 19 | $P(x)=2x^3-5x^2-4x+12$ | $x_0=2-3i$ |
| 20 | $P(x)=x^2+2ix-5$ | $x_0=2-i$ |

2) Найти значение многочлена $P(x)$ в точке $x_0$.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Многочлен $P(x)$ | $x_0$. |
|---|---|---|
| 1 | $P(x)=x^5+10x^3-20x^2+15x-4$ | $x_0=-i$ |
| 2 | $P(x)=8x^5-16x^4+16x^2-8x$ | $x_0=i$ |
| 3 | $P(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$ | $x_0=i$ |
| 4 | $P(x)=-10x^3+20x^2-15x+30$ | $x_0=2i$ |
| 5 | $P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$ | $x_0=-3i$ |
| 6 | $P(x)=x^4+2x^3-11$ | $x_0=-3i$ |
| 7 | $P(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$ | $x_0=i$ |
| 8 | $P(x)=x^4+7x^3+15x^2+13x+4$ | $x_0=-i$ |
| 9 | $P(x)=x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2$ | $x_0=2i$ |
| 10 | $P(x)=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$ | $x_0=-3i$ |
| 11 | $P(x)=x^4-2x^3+2x-1$ | $x_0=3i$ |
| 12 | $P(x)=x^4+11x^3-45x^2-81x+54$ | $x_0=2i$ |
| 13 | $P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$ | $x_0=-2i$ |
| 14 | $P(x)=x^6+6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$ | $x_0=-i$ |
| 15 | $P(x)=5x^3-6x^2-3x+4$ | $x_0=4i$ |
| 16 | $P(x)=x^4+7x^3-15x^2+13x+4$ | $x_0=i$ |
| 17 | $P(x)=x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2$ | $x_0=i$ |
| 18 | $P(x)=x^4+11x^3+45x^2+81x+54$ | $x_0=i$ |
| 19 | $P(x)=x^4-2x^3+2x-1$ | $x_0=-4i$ |
| 20 | $P(x)=x^4+11x^3+45x^2+81x+54$ | $x_0=-2i$ |

***Задание № 5.***

Найти все значения корня.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Корень | Номер варианта | Корень |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sqrt[5]{2+2i}$ | 11 | $\sqrt[6]{2-2i}$ |
| 2 | $\sqrt[5]{-5-5i}$ | 12 | $\sqrt[4]{4-4i}$ |
| 3 | $\sqrt[6]{\sqrt{3}+i}$ | 13 | $\sqrt[5]{-4+4i}$ |
| 4 | $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$ | 14 | $\sqrt[8]{1+i}$ |
| 5 | $\sqrt[7]{\sqrt{3}-i}$ | 15 | $\sqrt[4]{-2+2i}$ |
| 6 | $\sqrt[6]{-2-2i}$ | 16 | $\sqrt[8]{1-i}$ |
| 7 | $\sqrt[5]{-3+3i}$ | 17 | $\sqrt[6]{-4-4i}$ |
| 8 | $\sqrt[8]{-1-i}$ | 18 | $\sqrt[6]{3-3i}$ |
| 9 | $\sqrt[6]{\sqrt{3}i-1}$ | 19 | $\sqrt[5]{-1-\sqrt{3}i}$ |
| 10 | $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$ | 20 | $\sqrt[8]{-\sqrt{3}+i}$ |

***Задание № 6.***

На комплексной плоскости построить множество точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | 1-е условие | 2-е условие | 3-е условие |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $\operatorname{Im} z^2 = 4$ | $\operatorname{Re}(2z+1) = 2$ | $\begin{cases} \lvert z\rvert \le 4, \\ \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z \end{cases}$ |
| 2 | $\operatorname{Im}(z^2-2) = 2$ | $\operatorname{Re}(z-2i) = 3$ | $\begin{cases} \lvert z\rvert < 3, \\ \operatorname{Im} z \le 2 \end{cases}$ |
| 3 | $\operatorname{Im}(z^2-3) = 6$ | $\operatorname{Im}(2z+yi) = 4$ | $\begin{cases} \lvert z\rvert \le 3, \\ \lvert\operatorname{Re} z\rvert > 2 \end{cases}$ |
| 4 | $\operatorname{Re} z^2 = 4$ | $\operatorname{Re}(z+y) = 2$ | $\begin{cases} \lvert z\rvert < 2, \\ \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 5 | $\mathrm{Re}\left(z^2-2i\right)=4$ | $\mathrm{Re}\left(3z-y\right)=3$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert<3,\\ \mathrm{Im}\,z\ge 1\end{cases}$ |
| 6 | $\mathrm{Re}\left(z^2+3i\right)=4$ | $\mathrm{Im}\left(z+xi\right)=2$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert\le 4,\\ \lvert\mathrm{Re}\,z\rvert<2\end{cases}$ |
| 7 | $\mathrm{Re}\left(z^2-4i\right)=1$ | $\mathrm{Im}\left(z+xi\right)=3$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert<4,\\ \mathrm{Re}\,z\ge 2\end{cases}$ |
| 8 | $\mathrm{Im}\left(z^2-1\right)=2$ | $\mathrm{Re}\left(2z-y\right)=4$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert<2,\\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\end{cases}$ |
| 9 | $\mathrm{Im}\left(z^2+1\right)=6$ | $\mathrm{Re}\left(3z+y\right)=6$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert\le 2,\\ \mathrm{Im}\,z<0\end{cases}$ |
| 10 | $\mathrm{Im}\left(z^2-5\right)=4$ | $\mathrm{Im}\left(z+2xi\right)=4$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert<3,\\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\end{cases}$ |
| 11 | $\mathrm{Im}\left(z^2-5\right)=2$ | $\mathrm{Im}\left(z-2xi\right)=6$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert\le 3,\\ \mathrm{Re}\,z<0\end{cases}$ |
| 12 | $\mathrm{Re}\,z^2=9$ | $\mathrm{Re}\left(z+2\right)=y$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert<2,\\ \mathrm{Im}\,z\le 0\end{cases}$ |
| 13 | $\mathrm{Re}\left(z^2+y^2\right)=4$ | $\mathrm{Im}\left(z-4i\right)=x$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert\le 4,\\ \mathrm{Im}\,z>0\end{cases}$ |
| 14 | $\mathrm{Re}\left(z^2+y^2\right)=9$ | $\mathrm{Im}\left(z-3i\right)=x$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert<4,\\ \lvert\mathrm{Re}\,z\rvert\ge 1\end{cases}$ |
| 15 | $\mathrm{Re}\left(z^2-x^2\right)=-1$ | $\mathrm{Im}\left(z+2i\right)=x$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert\le 2,\\ \lvert\mathrm{Re}\,z\rvert>1\end{cases}$ |
| 16 | $\mathrm{Re}\left(z^2-x^2\right)=-4$ | $\mathrm{Re}\left(3z-6\right)=y$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert<3,\\ \lvert\mathrm{Im}\,z\rvert\le 2\end{cases}$ |
| 17 | $\mathrm{Im}\left(z^2+y^2\right)=2$ | $\mathrm{Re}\left(z-2\right)=y$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert\le 3,\\ \lvert\mathrm{Im}\,z\rvert>1\end{cases}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 18 | $\operatorname{Im}\left(z^2-y^2\right)=6$ | $\operatorname{Re}\left(2z-4\right)=y$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert<4,\\ \lvert\operatorname{Re}z\rvert\geq 2\end{cases}$ |
| 19 | $\operatorname{Im}\left(z^2+y^2\right)=4$ | $\operatorname{Re}\left(3z-3\right)=y$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert\leq 4,\\ \lvert\operatorname{Re}z\rvert<1\end{cases}$ |
| 20 | $\operatorname{Re}\left(3z+y\right)=6$ | $\operatorname{Im}\left(z+4i\right)=x$ | $\begin{cases}\lvert z\rvert\leq 4,\\ \lvert z\rvert>1\end{cases}$ |

## *Решение типовых задач*

***Задание № 1.***

Найти алгебраическую форму комплексного числа $z=\dfrac{4-4i}{\left(2-2i\right)^6}$, выполнив действия в показательной форме. Найти модуль $\lvert z\rvert$ и значение аргумента $\arg z$ комплексного числа $z$.

*Решение.*

Запишем комплексные числа $z_1=4-4i$ и $z_2=2-2i$ в показательной форме.

Показательная форма комплексного числа $z=x+iy$ имеет вид:

$$z=re^{i\varphi},$$

где $r=\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ — модуль комплексного числа $z$,

$\varphi=argz$ — аргумент комплексного числа $z$, который находится по формуле:

$$\varphi=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \text{ если точка, изображающая число } z\text{, лежит в I или IV четверти,}\\ arctg\dfrac{y}{x}+\pi, \text{ если точка, изображающая число } z\text{, лежит во II четверти,}\\ arctg\dfrac{y}{x}-\pi, \text{ если точка, изображающая число } z\text{, лежит во II четвертию.}\end{cases}$$

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z_1=4-4i$:

$$\lvert z_1\rvert=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2},$$

$$\arg z_1=arctg\left(\frac{-4}{4}\right)=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа $z_1$ имеет вид:

$$z_1 = 4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z_2 = 2 - 2i$:

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\arg z_2 = arctg\left(\frac{-2}{2}\right) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа $z_2$ имеет вид:

$$z_2 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Найдем сначала показательную форму комплексного числа $z$. При этом при возведении в степень комплексного числа в показательной форме его модуль возводится в степень, а аргумент умножается на показатель степени, то есть, если $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = r^n e^{in\varphi}$. При делении двух комплексных чисел в показательной форме их модули делятся, а аргументы вычитаются. Таким образом, получим

$$z = \frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\left(2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^6} = \frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\left(2\sqrt{2}\right)^6 e^{-\frac{\pi}{4}i\cdot 6}} = \frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{512e^{-\frac{6\pi}{4}i}} = \frac{4\sqrt{2}}{512}e^{-\frac{\pi}{4}i-\left(-\frac{6\pi}{4}i\right)} = \frac{\sqrt{2}}{128}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

Отсюда $|z| = \frac{\sqrt{2}}{128}$ — модуль комплексного числа $z$. Так как $\varphi = \arg z \in (-\pi; \pi]$, то $\varphi = \arg z = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$ — аргумент комплексного числа $z$.

Тогда показательная форма комплексного числа $z$ имеет вид:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{128}e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тогда $z = \frac{\sqrt{2}}{128}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ — тригонометрическая форма данного комплексного числа $z$.

Получим его алгебраическую форму:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{128}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{128}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{1}{128} - \frac{1}{128}i.$$

Итак, $z=-\frac{1}{128}-\frac{1}{128}i$.

*Ответ:* $z=-\frac{1}{128}-\frac{1}{128}i$, $|z|=\frac{\sqrt{2}}{128}$, $\arg z=-\frac{3\pi}{4}$.

***Задание № 2.***

Решить квадратное уравнение $z^2+2z+26=0$. Корни уравнения найти в алгебраической форме.

*Решение.*

Воспользуемся известным алгоритмом нахождения корней квадратного уравнения:

$$z^2+2z+26=0;$$

$$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot 26=4-104=-100;$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{-100}=\pm 10i;$$

$$z_1=\frac{-2+10i}{2}=-1+5i,\ \ z_2=\frac{-2-10i}{2}=-1-5i.$$

*Ответ:* $z_1=-1+5i$, $z_2=-1-5i$.

***Задание № 3.***

Дано уравнение $z(1+4i)=-1+i$. Найти $z$, выполнив действия в алгебраической форме.

*Решение.*

Найдем $z$:

$$z=\frac{-1+i}{1+4i}.$$

Чтобы выполнить деление в алгебраической форме, умножаем числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$z=\frac{-1+i}{1+4i}=\frac{(-1+i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{-1+4i+i-4i^2}{1-16i^2}=\frac{-1+5i+4}{1+16}=$$

$$=\frac{3+5i}{17}=\frac{3}{17}+\frac{5}{17}i.$$

*Ответ:* $z=\frac{3}{17}+\frac{5}{17}i$.

***Задание № 4.***

Найти значение многочлена $P(x)$ в точке $x_0$.

а) $P(x)=x^2-2ix-5$, $x_0=2-i$;

б) $P(x)=x^5+10x^3-20x^2+15x-4$, $x_0=-i$.

*Решение.*

а) Найдем значение многочлена $P(x)=x^2-2ix-5$ в точке $x_0=2-i$:

$$P(x_0)=P(2-i)=(2-i)^2-2i\cdot(2-i)-5=4-2\cdot2\cdot i+i^2-4i+2i^2-5=$$
$$=4-4i-1-4i-2-5=-4-8i.$$

б) Найдем значение многочлена $P(x)=x^5+10x^3-20x^2+15x-4$ в точке $x_0=-i$:

$$P(x_0)=P(-i)=(-i)^5+10(-i)^3-20(-i)^2+15(-i)-4=$$
$$=-i+10i-20\cdot(-1)-15i-4=-i+10i+20-15i-4=16-6i.$$

*Ответ:* а) $-4-8i$; б) $16-6i$.

***Задание № 5.***

Найти все значения корня $\sqrt[3]{-1+i}$.

*Решение.*

Запишем число $z=-1+i$ в тригонометрической форме, для этого найдем его модуль и аргумент, используя формулы:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\varphi=arctg\frac{y}{x}+\pi.$$

Получим:

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},$$
$$\varphi=\arg z=arctg\left(-\frac{1}{1}\right)+\pi=-arctg1+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z=-1+i$ имеет вид:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Корень $n$-ой степени из комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, не равного нулю, имеет $n$ различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ ...,n-1$.

Тогда

$$\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\text{ где } k=0,1,2.$$

Получаем три значения корня:

$$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

*Ответ:* $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$, $z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

***Задание № 6.***

На комплексной плоскости построить множества точек, которые задаются условиями:

1) $\operatorname{Re} z=2$;

2) $|z|<2$;

3) $\operatorname{Im} z^2=2$.

*Решение.*

1) Для комплексного числа $z=x+iy$ действительная часть $\operatorname{Re} z=x$. Так как по условию $\operatorname{Re} z=2$, то $x=2$. Это уравнение прямой, перпендикулярной оси *Ox* (рис. 12).

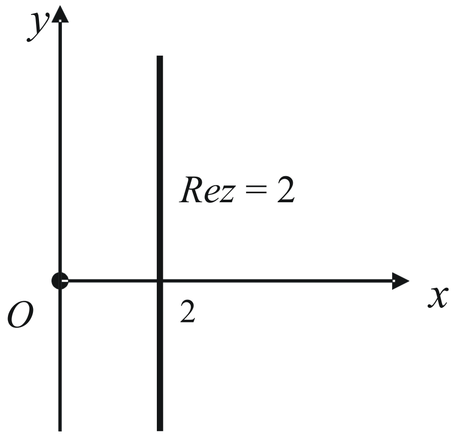


*Рис. 12*. Множество точек *z*,
для которых Re*z* = 2

2) Для комплексного числа $z = x + iy$ имеем $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как $|z| < 2$, то $\sqrt{x^2 + y^2} < 2$, откуда $x^2 + y^2 < 4$. Это неравенство определяет внутреннюю часть круга с центром в начале координат и радиусом, равным 2 (рис. 13).

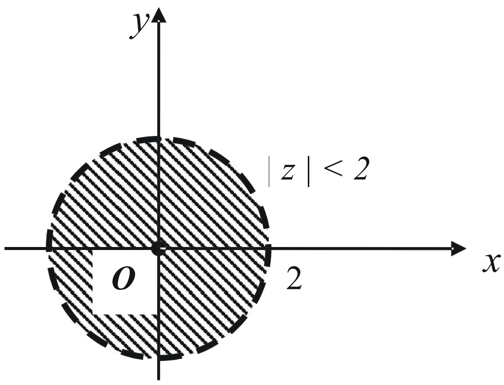


*Рис. 13. Множество точек z,*
для которых | *z* | < *2*

3) Если $z = x + iy$, то $z^2 = x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Тогда мнимая часть $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. Так как по условию $\operatorname{Im} z^2 = 2$, то $2xy = 2$, откуда $y = \dfrac{1}{x}$. Это уравнение гиперболы (рис. 14).

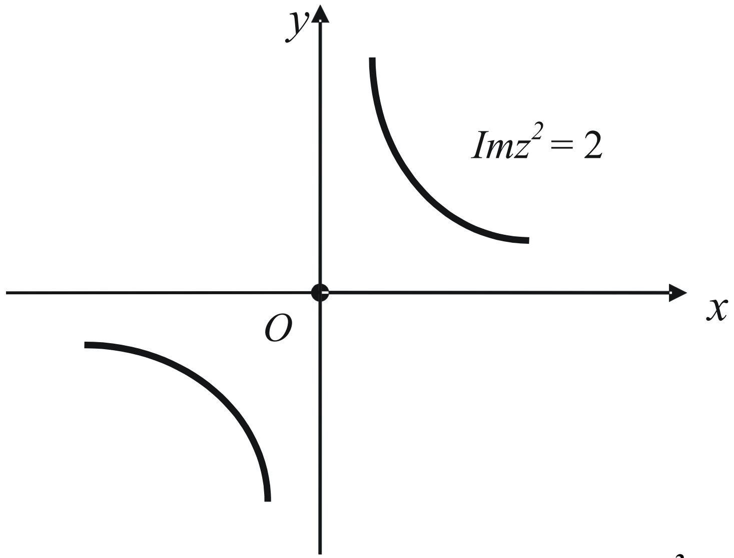


*Рис. 14.* Множество точек $z$, для которых $Imz^2 = 2$

## 5. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

### *Задание к расчетно-графической работе*

***Задание № 1.***

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | $y - xy = (1 + x^2)y'$ |
| 2 | $x(1 + y^2) + y(1 - x^2)y' = 0$ |
| 3 | $y' = (2y + 1)ctgx$ |
| 4 | $(1 + x^2)y' = y\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$ |
| 5 | $(1 + x^2)y^3 + (1 - y^2)x^3 y' = 0$ |
| 6 | $x(1 + y^2) + (1 + y^3)y' = 0$ |
| 7 | $y' \cos x = (y + 1)\sin x$ |
| 8 | $(2 + y)dx - (2 - x)dy = 0$ |
| 9 | $(e^{2x} + 1)dy + ye^{2x}dx = 0$ |
| 10 | $y'tgx - y = 0$ |
| 11 | $y' \sin x - y \ln y = 0$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| 12 | $y' = e^{x-y}$ |
| 13 | $(e^x + 2)y' = ye^x$ |
| 14 | $(e^x + 1)dy + e^x dx = 0$ |
| 15 | $x^2 dy + (y-1)dx = 0$ |
| 16 | $y' \cos x - y \sin x = 0$ |
| 17 | $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$ |
| 18 | $e^y(1 + x^2)y' - 2x(1 + e^y) = 0$ |
| 19 | $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ |
| 20 | $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$ |

***Задание № 2.***

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | $xye^{\frac{x}{y}} + y^2 = x^2 y' e^{\frac{x}{y}}$ |
| 2 | $(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$ |
| 3 | $x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0$ |
| 4 | $xyy' = y^2 + 8x^2$ |
| 5 | $y' = \frac{x-y}{x+y}$ |
| 6 | $2x^2 y' + x^2 + y^2 = 0$ |
| 7 | $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ |
| 8 | $4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$ |
| 9 | $y' = \frac{8x + 5y}{5x - 2y}$ |
| 10 | $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$ |
| 11 | $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| 12 | $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$ |
| 13 | $xy' = y\ln\frac{y}{x}$ |
| 14 | $\left(x^2 - y^2\right)y' = 2xy$ |
| 15 | $y' = \frac{x+y}{x-y}$ |
| 16 | $\left(x^2 + y^2\right)dx - xydy = 0$ |
| 17 | $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$ |
| 18 | $xy' - y - \sqrt{xy} = 0$ |
| 19 | $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$ |
| 20 | $y' = \frac{y^2}{x^2 + xy}$ |

***Задание № 3.***

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | $\left(1 + x^2\right)y' + y = arctgx$ |
| 2 | $y'\cos^2 x + y = tgx$ |
| 3 | $xy' + y - x - 1 = 0$ |
| 4 | $x^2 y' = 2xy + 3$ |
| 5 | $xy' + y - 3 = 0$ |
| 6 | $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$ |
| 7 | $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ |
| 8 | $x^3 y' + 3x^2 y = 2$ |
| 9 | $xy' - y = -2\ln x$ |
| 10 | $xy' - y = x^3$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| 11 | $y' - y = e^x$ |
| 12 | $2xy' + y = 2x^3$ |
| 13 | $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$ |
| 14 | $xy' - y = -\ln x$ |
| 15 | $y' - y\cos x = -\sin 2x$ |
| 16 | $xy' + y = x + 1$ |
| 17 | $y'\cos x + y\sin x = 2x\cos^2 x$ |
| 18 | $xy' - 3y = x^4\ln x$ |
| 19 | $xy' - 2y = 4x^3\cos^2 x$ |
| 20 | $xy' - 5y = e^x x^7$ |

***Задание № 4.***

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$ |
| 2 | $2y' - \frac{2x-5}{x^2}y = \frac{5}{y}$ |
| 3 | $y' - ytgx = -\frac{2}{3}y^4\sin x$ |
| 4 | $y' - y = xy^2$ |
| 5 | $y' + 2y = (x+1)y^{-2}$ |
| 6 | $xy^2y' = x^2 + y^3$ |
| 7 | $y' + 2y = y^2e^x$ |
| 8 | $2xyy' - y^2 + x = 0$ |
| 9 | $y' = -\frac{y}{x} - xy^2$ |
| 10 | $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$ |
| 11 | $y' + 2y = 2x^3y^3$ |
| 12 | $xy' - y = x^3y^2$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| 13 | $xy' + y = -x^2 y^2$ |
| 14 | $xy' + 2y = 3x^5 y^2$ |
| 15 | $y' + y = -e^{2x} y^2$ |
| 16 | $xy' - 2y = x^2 \sqrt{y}$ |
| 17 | $y' - ytgx = y^2 \sin x \cos x$ |
| 18 | $xy' + y = 2xy^2 \ln x$ |
| 19 | $y' - ytgx = -y^2 \cos x$ |
| 20 | $xy' = x^5 y^2 - 2y$ |

***Задание № 5.***

Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка, при указанных начальных условиях.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение | Начальные условия |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | $(y-2)y'' = 2(y')^2$ | $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$ |
| 2 | $y'y'' = 2y$ | $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ |
| 3 | $y'' - e^y y' = 0$ | $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ |
| 4 | $x^3 y'' = 4\ln x$ | $y(1) = 4$, $y'(1) = 0$ |
| 5 | $y'' + y'tgx = \cos x$ | $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ |
| 6 | $xy'' = \ln x + 1$ | $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$ |
| 7 | $xy'' - 2y' = 2x^4$ | $y(1) = \frac{1}{5}$, $y'(1) = 4$ |
| 8 | $y'' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ | $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ |
| 9 | $y'' - y'ctgx = \sin x$ | $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ |
| 10 | $xy'' - y' - x^2 = 0$ | $y(1) = \frac{4}{3}$, $y'(1) = 3$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 11 | $2y'' = e^{4y}$ | $y(0)=0$, $y'(0)=\dfrac{1}{2}$ |
| 12 | $y''y^3 = 1$ | $y(0)=1$, $y'(0)=0$ |
| 13 | $y'y'' = 1$ | $y(0)=\dfrac{1}{3}$, $y'(0)=1$ |
| 14 | $yy'' = (y')^2$ | $y(0)=1$, $y'(0)=2$ |
| 15 | $2(y')^2 = (y-1)y''$ | $y(0)=0$, $y'(0)=1$ |
| 16 | $y'' = xe^x$ | $y(0)=1$, $y'(0)=0$ |
| 17 | $(x^2+1)y'' = 2xy'$ | $y(0)=1$, $y'(0)=3$ |
| 18 | $2y'' - 3y^2 = 0$ | $y(-2)=1$, $y'(-2)=-1$ |
| 19 | $2yy'' = (y')^2$ | $y(0)=4$, $y'(0)=2$ |
| 20 | $2yy'' = 1+(y')^2$ | $y(0)=1$, $y'(0)=1$ |

***Задание № 6.***

Найти общее решение дифференциального уравнения.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | $y'' + 2y' - 3y = 6x$ |
| 2 | $y'' - 4y' = 4x^2 - 8x$ |
| 3 | $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 1$ |
| 4 | $y'' - 4y' = 8x + 4$ |
| 5 | $y'' - 4y' = x^2 + x$ |
| 6 | $y'' + 2y' + 2y = 3x^2 + x$ |
| 7 | $y'' + 2y' + 2y = x + 2$ |
| 8 | $y'' + 2y' + 2y = x^3 + x + 1$ |
| 9 | $y'' - 4y' = 12x^2$ |
| 10 | $y'' - 3y' = 2 - 6x$ |
| 11 | $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$ |
| 12 | $y'' + 2y' + 2y = x^3 + 2x^2 + 3$ |
| 13 | $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 1$ |

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 14 | $y'' - 4y' = x^2 + x - 4$ |
| 15 | $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 2x + 1$ |
| 16 | $y + 2y' + 2y = 2x^3 + 2x^2$ |
| 17 | $y'' + 2y' - 3y = 6x$ |
| 18 | $y'' + 2y' - 3y = 6x$ |
| 19 | $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$ |
| 20 | $y'' - y = x^2$ |

***Задание № 7.***

Найти общее решение дифференциального уравнения.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | $9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}$ |
| 2 | $3y'' + 2y' - y = \sqrt[3]{e^x}$ |
| 3 | $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ |
| 4 | $y'' - 4y' + 4y = 3e^x$ |
| 5 | $4y'' - 12y' + 9y = \sqrt{e^{3x}}$ |
| 6 | $y'' - 4y' + 4y = 2e^{-2x}$ |
| 7 | $y'' - 4y' + 4y = 5e^{-x}$ |
| 8 | $y'' - 4y' + 4y = \frac{9}{4}\sqrt{e^x}$ |
| 9 | $4y'' - 20y' + 25y = \sqrt{e^{5x}}$ |
| 10 | $9y'' + 6y' + y = 2\sqrt[3]{e^{-x}}$ |
| 11 | $y'' - 4y' + 4y = 8e^{4x}$ |
| 12 | $y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{4}\sqrt{e^{3x}}$ |
| 13 | $y'' - 4y' + 4y = 36e^{-4x}$ |
| 14 | $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ |
| 15 | $y'' - 4y' + 4y = \frac{25}{4}\sqrt{e^{-x}}$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| 16 | $y'' - 3y' - 4y = 3e^{-x}$ |
| 17 | $9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}$ |
| 18 | $9y'' - 6y' + y = \sqrt[3]{e^x}$ |
| 19 | $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$ |
| 20 | $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ |

***Задание № 8.***

Найти общее решение дифференциального уравнения.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | $y'' + 9y = \sin 3x + \cos 3x$ |
| 2 | $4y'' + 9y = \sin \frac{3}{2} x$ |
| 3 | $y'' + 4y = 2\sin 2x$ |
| 4 | $y'' - 4y = 5\sin 3x - 10\cos 3x$ |
| 5 | $y'' - 4y = 5\sin x + \cos x$ |
| 6 | $y'' + y = 4\sin x$ |
| 7 | $y'' - 4y = 13\cos 3x$ |
| 8 | $y'' + 9y = 3\cos 3x$ |
| 9 | $2y'' + y = \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$ |
| 10 | $y'' - 4y = \sin 4x + 16\cos 4x$ |
| 11 | $y'' - 4y = \sin 2x - 2\cos 2x$ |
| 12 | $y'' + 2y' + 2y = x^3 + 2x^2 + 3$ |
| 13 | $y'' + 2y = \sin \sqrt{2x}$ |
| 14 | $y'' - 4y = 5\sin x + \cos x$ |
| 15 | $y'' - 4y = 29\cos 5x$ |
| 16 | $y'' - 4y = 4\sin 4x + \cos 4x$ |
| 17 | $y'' + 9y = \cos 3x$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| 18 | $6y'' + y = \cos\frac{x}{\sqrt{6}}$ |
| 19 | $y'' - 4y = 4\sin 2x$ |
| 20 | $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ |

### *Решение типовых задач*

***Задание № 1.*** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$.

*Решение.*

Уравнение $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$ является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, деля обе части уравнения на $\left(1+x^2\right)\sqrt{1+y^2}$, получим:

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = 0.$$

Интегрируем обе части:

$$\int\frac{x}{1+x^2}\,dx + \int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = C,$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1+y^2\right) = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \sqrt{1+y^2} = C.$$

Получили общий интеграл данного уравнения.

*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \sqrt{1+y^2} = C$.

***Задание № 2.*** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\left(xy+y^2\right)dx - x^2dy = 0$.

*Решение.*

Уравнение $\left(xy+y^2\right)dx - x^2dy = 0$ является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части уравнения на $dx$:

$$\left(xy+y^2\right) - x^2\frac{dy}{dx} = 0.$$

Так как $\frac{dy}{dx} = y'$, получим:

$$\left(xy+y^2\right) - x^2y' = 0,$$

$$x^2y' = xy + y^2,$$

$$y' = \frac{xy+y^2}{x^2},$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}.$$

Сделаем замену $u = \frac{y}{x}$, где $u$ — некоторая функция переменной $x$. Тогда $y = ux$. Дифференцируя, получим $y' = u'x + u$.

В результате замены заданное уравнение примет вид:

$$u'x + u = u + u^2$$

или

$$u'x = u^2,$$

$$x\frac{du}{dx} = u^2.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные, проинтегрируем и получим его общий интеграл:

$$xdu = u^2dx,$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{u^2} = \int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C,$$

Так как $u = \dfrac{y}{x}$, то имеем:

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C,$$

откуда

$$y = -\frac{x}{\ln|x| + C}.$$

Получили общее решение данного однородного дифференциального уравнения.

*Ответ:* $y = -\dfrac{x}{\ln|x| + C}$.

***Задание № 3.*** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x^2 y' - 5xy - 1 = 0$.

*Решение.*

Уравнение $x^2 y' - 5xy - 1 = 0$ является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части уравнения на $x^2$:

$$y' - \frac{5}{x} y = \frac{1}{x^2}.$$

Сделаем замену $y = uv$, где $u$ и $v$ — некоторые функции переменной $x$. Дифференцируя, получим $y' = u'v + uv'$.

В результате замены заданное уравнение примет вид:

$$u'v + uv' - \frac{5}{x} uv = \frac{1}{x^2}$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{5}{x} v\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Выберем функцию $v$ так, чтобы имело место равенство

$$v' - \frac{5}{x} v = 0.$$

Найдем из него функцию $v$, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{5v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{5dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = 5\int \frac{dx}{x},$$
$$\ln|v| = 5\ln|x|,$$
$$\ln|v| = \ln\left|x^5\right|,$$
$$v = x^5.$$

Найдем из него функцию $v$, как частное решение:

$$u'v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v = x^5$, получим уравнение:

$$x^5 u' = \frac{1}{x^2}.$$

Найдем из него функцию $u$, как общее решение:

$$x^5 \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2},$$
$$x^5 du = \frac{dx}{x^2},$$
$$du = \frac{dx}{x^7},$$
$$\int du = \int \frac{dx}{x^7},$$
$$u = -\frac{1}{6x^6} + C.$$

Тогда

$$y = uv = \left(-\frac{1}{6x^6} + C\right)x^5 = Cx^5 - \frac{1}{6x}.$$

Итак, $y = Cx^5 - \dfrac{1}{6x}$ — общее решение данного линейного дифференциального уравнения.

*Ответ:* $y = Cx^5 - \dfrac{1}{6x}$.

***Задание № 4.*** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy' + 2y - y^2 = 0$.

*Решение.*

Уравнение $xy' + 2y = y^2$ является уравнением Бернулли.

Разделим обе части уравнения на $y^2$, получим:

$$\frac{xy'}{y^2}+\frac{2}{y}=1.$$

Введем новую переменную

$$z=\frac{1}{y},$$

где $z$ — функция переменной $x$. Дифференцируя ее по правилу производной сложной функции, имеем:

$$z'=-\frac{1}{y^2}y'.$$

В результате замены получим линейное уравнение

$$-xz'+2z=1$$

или

$$z'-\frac{2}{x}z=-\frac{1}{x}.$$

Решим его с помощью замены $z=uv$, $z'=u'v+uv'$, которая приводит уравнение к виду:

$$u'v+uv'-\frac{2}{x}uv=-\frac{1}{x}$$

или

$$u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=-\frac{1}{x}.$$

Выберем функцию $v$ так, чтобы имело место равенство

$$v'-\frac{2}{x}v=0.$$

Найдем из него функцию $v$, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2}{x}v,$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=2\ln|x|,$$

$$\ln|v|=\ln\left|x^2\right|,$$

$$v=x^2.$$

При таком выборе функции $v$ функция $u$ находится из уравнения

$$u'v=-\frac{1}{x}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v = x^2$, получим уравнение:

$$x^2 u' = -\frac{1}{x}.$$

Найдем из него функцию *u*, как общее решение:

$$x^2 \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x},$$

$$x^2 du = -\frac{dx}{x},$$

$$du = -\frac{dx}{x^3},$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x^3},$$

$$u = \frac{1}{2x^2} + C.$$

Тогда

$$z = uv = \left(\frac{1}{2x^2} + C\right)x^2 = \frac{1}{2} + Cx^2.$$

Так как $z = \frac{1}{y}$, то

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} + Cx^2,$$

откуда

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2} + Cx^2}$$

или

$$y = \frac{2}{1 + 2Cx^2}.$$

Получили общее решение данного дифференциального уравнения.

*Ответ:* $y = \frac{2}{1 + 2Cx^2}$.

***Задание № 5.*** Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y'}{x}$, если $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

*Решение.*

Уравнение $y'' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y'}{x}$ не содержит явным образом функцию *y*, поэтому является дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка с помощью замены $y' = p$, где $p = p(x)$. Тогда $y'' = p'$.

В результате замены уравнение примет вид:

$$p' = \frac{1}{x^2} - \frac{p}{x}$$

или

$$p' + \frac{p}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения применим замену $p = uv$, $p' = u'v + uv'$. В результате которой уравнение примет вид:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2}$$

или

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Выберем функцию *v* так, чтобы имело место равенство

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

Найдем из него функцию *v*, как частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

$$v=\frac{1}{x}.$$

При таком выборе функции $v$ функция $u$ находится из уравнения

$$u'v=\frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в него найденную функцию $v=\frac{1}{x}$, получим уравнение:

$$\frac{1}{x}u'=\frac{1}{x^2}.$$

Найдем из него функцию $u$, как общее решение:

$$\frac{du}{xdx}=\frac{1}{x^2},$$

$$du=\frac{dx}{x},$$

$$\int du=\int\frac{dx}{x},$$

$$u=\ln|x|+C_1.$$

Тогда

$$p=uv=\left(\ln|x|+C_1\right)\frac{1}{x}=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{C_1}{x}.$$

Так как $p=y'$, то имеем:

$$y'=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{C_1}{x}.$$

Используем начальное условие $y'(1)=2$. Подставляя в последнее равенство $x=1$, $y'=2$, найдем $C_1$:

$$2=\frac{\ln 1}{1}+\frac{C_1}{1},$$

$$C_1=2.$$

Тогда

$$y'=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{2}{x}.$$

Интегрированием найдем из полученного уравнения функцию $y$:

$$y=\int\left(\frac{\ln|x|}{x}+\frac{2}{x}\right)dx=\int\ln|x|d\left(\ln|x|\right)+2\int\frac{dx}{x}=\frac{\ln^2|x|}{2}+2\ln|x|+C_2.$$

Итак, получили:

$$y=\frac{\ln^2|x|}{2}+2\ln|x|+C_2.$$

Используем начальное условие $y(1)=1$. Подставляя в последнее равенство $x=1$, $y=1$, найдем $C_2$:

$$1=\frac{\ln^2 1}{2}+2\ln 1+C_2,$$

$$C_2=1.$$

Следовательно,

$$y=\frac{\ln^2|x|}{2}+2\ln|x|+1.$$

Получили частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

*Ответ*: $y=\dfrac{\ln^2|x|}{2}+2\ln|x|+1$.

***Задание № 6.*** Решить дифференциальное уравнение $y''+2y'=x^2+2x-1$.

*Решение.*

Уравнение $y''+2y'=x^2+2x-1$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y''+2y'=0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2+2k=0.$$

Его корни: $k_1=0$ и $k_2=-2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{oo} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x}$$

или

$$y_{oo} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой многочлен второй степени и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y''_{чн} = 6Ax + 2B.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$6Ax + 2B + 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = x^2 + 2x - 1$$

или

$$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2 + 2x - 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 2, \\ 2B + 2C = -1. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$A = \frac{1}{6},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{3}{4}.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн} = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

*Ответ:* $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$.

***Задание № 7.*** Решить дифференциальное уравнение $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$.

*Решение.*

Уравнение $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Его корни: $k_1 = -1$ и $k_2 = 2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой показательную функцию вида $f(x) = ae^{mx}$ и $m = 2$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = Axe^{2x}.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$

$$y''_{чн} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x}-Ae^{2x}-2Axe^{2x}-2Axe^{2x}=9e^{2x}.$$

Приведя подобные слагаемые и разделив обе части уравнения на $e^{2x}$, определим коэффициент $A$:

$$3Ae^{2x}=9e^{2x},$$
$$3A=9,$$
$$A=3.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн}=3xe^{2x}.$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+3xe^{2x}.$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+3xe^{2x}.$$

*Ответ:* $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+3xe^{2x}$.

***Задание № 8.*** Решить дифференциальное уравнение $y''+4y=4\cos 2x-12\sin 2x$.

*Решение.*

Уравнение $y''+4y=4\cos 2x-12\sin 2x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;
$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;
$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1) Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y''+4y=0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2+4=0$$

или

$$k^2 = -4.$$

Его корни: $k_1 = -2i$ и $k_2 = 2i$.

Так как корни характеристического уравнения комплексные сопряженные вида $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то $y_{oo}$ находим по формуле:

$$y_{oo} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right).$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{oo} = e^{0x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$$

или

$$y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2) Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой тригонометрическую функцию вида $f(x) = a\cos nx + b\sin nx$ и числа $k = \pm ni = \pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = A\cos 2x + B\sin 2x + x\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right),$$

$$y''_{чн} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x +$$
$$+ x\left(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x\right) =$$
$$= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x +$$
$$+ 4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x$$

или

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получим:

$$\begin{cases} -4A = -12, \\ 4B = 4; \end{cases}$$

Тогда $A = 3$, $B = 1$.

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = x\left(3\cos 2x + \sin 2x\right).$$

3) Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x\left(3\cos 2x + \sin 2x\right).$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x\left(3\cos 2x + \sin 2x\right).$$

*Ответ:* $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x)$.

### *Защита РГР № 3 «Дифференциальные уравнения»*

*Теоретические вопросы:*

1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
4. Уравнения Бернулли.
5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
6. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $P_n(x)$.
8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $ae^{mx}$.
9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $a\cos nx + b\sin nx$.

*Задачи:*

№ 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0$;

2) $xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx$;

3) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$;

4) $x^3 dy = (x^2 - y^2)ydx$;

5) $\left(2x + y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx = x\cos\dfrac{y}{x}dy$;

6) $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$;

7) $y' - yctgx = 2x\sin x$;

8) $(1 + x^2)y' + y = arctgx$;

9) $y' + \frac{2}{x} y = x^2 y^2$;

10) $y' - \frac{y}{x} = \frac{(x-1)^2}{y}$.

№ 2. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения первого порядка $(\sqrt{y}+1)\sqrt{x}y' - y = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

№ 3. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

1) $y'' = 6x + \sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

2) $y'' = \frac{y'}{x} + xe^x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$;

3) $y'' = \frac{y'}{x \ln x}$, $y(e) = 0$, $y'(e) = 1$;

4) $(1-y)y'' + 2(y')^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

№ 4. Решить дифференциальные уравнения второго порядка:

1) $y'' - 2y' = 4x^2 - 3x + 5$;

2) $y'' - 2y' + 10y = 3x^2 + x + 6$;

3) $9y'' + 6y' + y = 3\sqrt[3]{e^{-x}}$;

4) $y'' + 9y = 2\sin 3x$;

5) $2y'' + y' = \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$.

## 6. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4 «РЯДЫ»

### *Задание к расчетно-графической работе*

***Задание № 1.***

Для заданного ряда записать общий член и с его помощью, если возможно, выяснить вопрос о сходимости (расходимости) ряда.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Задание | Номер варианта | Задание |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{6}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\dots$ | 11 | $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}\dots$ |
| 2 | $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots$ | 12 | $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\dots$ |
| 3 | $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\dots$ | 13 | $\frac{1}{5}+\frac{2}{9}+\frac{3}{13}+\dots$ |
| 4 | $\frac{1}{11}+\frac{2}{21}+\frac{3}{31}+\dots$ | 14 | $\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{3}{7}+\dots$ |
| 5 | $\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\dots$ | 15 | $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\dots$ |
| 6 | $\frac{2}{11}+\frac{4}{21}+\frac{6}{31}+\dots$ | 16 | $2+4+6\dots$ |
| 7 | $1+3+5+\dots$ | 17 | $\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{3}{7}+\dots$ |
| 8 | $\frac{7}{2}+\frac{7}{4}+\frac{7}{6}+\dots$ | 18 | $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\dots$ |
| 9 | $6+\frac{6}{2^3}+\frac{6}{3^3}+\dots$ | 19 | $\frac{1}{9}+\frac{2}{10}+\frac{3}{11}+\dots$ |
| 10 | $\frac{5}{2}+\frac{10}{3}+\frac{15}{4}+\dots$ | 20 | $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\dots$ |

***Задание № 2.***

Для данного ряда записать три его первых члена и найти сумму ряда.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Ряд 1 | Ряд 2 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{40n^2-28n-45}$ |
| 2 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$ |
| 3 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 4 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ | $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$ |
| 5 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ | $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$ |
| 6 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$ |
| 7 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$ |
| 8 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$ |
| 9 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$ |
| 10 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$ |
| 11 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$ |
| 12 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2+35n-6}$ |
| 13 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$ |
| 14 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$ |
| 15 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$ |
| 16 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$ |
| 17 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$ |
| 18 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 19 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^n$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$ |
| 20 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$ |

***Задание № 3.***

С помощью признака Даламбера или Коши исследовать на сходимость данные ряды.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Ряд 1 | Ряд 2 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ |
| 2 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^3+2}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ |
| 3 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^3$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$ |
| 4 | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^4$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$ |
| 5 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ |
| 6 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ |
| 7 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}$ |
| 8 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ |
| 9 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ |
| 10 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 11 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+25}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ |
| 12 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$ |
| 13 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ |
| 14 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ |
| 15 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$ |
| 16 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$ |
| 17 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{2^n}$ |
| 18 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{4^n}$ |
| 19 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+8}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5n+2}$ |
| 20 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+4}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{2^n}$ |

***Задание № 4.***

Дан ряд. Требуется:

1) исследовать его на сходимость по признаку Лейбница,

2) вычислить приближенное значение суммы, взяв три первых члена ряда;

3) оценить допускаемую при этом погрешность.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Задание | Номер варианта | Задание |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10^n}$ | 11 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ |
| 2 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{5^n}$ | 12 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{6^n}$ |
| 3 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+5}{10^n}$ | 13 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+3}{5^n}$ |
| 4 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{5^n}$ | 14 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{10^n}$ |
| 5 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4n+2}{10^n}$ | 15 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4n+1}{5^n}$ |
| 6 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{5^n}$ | 16 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{4^n}$ |
| 7 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{10^n}$ | 17 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n+1}{5^n}$ |
| 8 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n-2}{5^n}$ | 18 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^5}$ |
| 9 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n+1}{10^n}$ | 19 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n}{10^n}$ |
| 10 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n-1}{5^n}$ | 20 | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^4}$ |

***Задание № 5.***

Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n x^n}{b^n\sqrt{n+1}}$. При заданных значениях $a$ и $b$ написать первые три члена ряда, найти область сходимости ряда.

*Исходные данные для решения задачb*

| Номер варианта | *a* | *b* | Номер варианта | *a* | *b* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 11 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 7 | 12 | 5 | 9 |
| 3 | 7 | 6 | 13 | 2 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 14 | 4 | 3 |
| 5 | 5 | 2 | 15 | 6 | 4 |
| 6 | 3 | 7 | 16 | 4 | 5 |
| 7 | 8 | 3 | 17 | 7 | 4 |
| 8 | 5 | 7 | 18 | 2 | 6 |
| 9 | 3 | 4 | 19 | 7 | 5 |
| 10 | 5 | 8 | 20 | 2 | 4 |

***Задание № 6.***

Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка с начальным условием. Найти решение задачи Коши в виде ряда Маклорена (ограничиться тремя первыми ненулевыми членами разложения).

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Уравнение, начальное условие |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | $y'=2y^2+3x^4+4x-18,\ y(0)=3$ |
| 2 | $y'=3y^2+4x^4+2x-3,\ y(0)=1$ |
| 3 | $y'=y^2+8x^4+9x-4,\ y(0)=2$ |
| 4 | $y'=2y^2+6x^3-6x-8,\ y(0)=2$ |
| 5 | $y'=3y^2+3x^2-2x-27,\ y(0)=3$ |
| 6 | $y'=4y^2+4x^3+6x-4,\ y(0)=1$ |
| 7 | $y'=5y^2-8x^4+3x-5,\ y(0)=1$ |
| 8 | $y'=3y^2+x^4+4x-12,\ y(0)=2$ |
| 9 | $y'=y^2-x^4+2x-9,\ y(0)=3$ |
| 10 | $y'=2y^2+x^3-3x-8,\ y(0)=2$ |
| 11 | $y'=6y^2+2x^4+2x-6,\ y(0)=1$ |
| 12 | $y'=3y^2-4x^3+2x-12,\ y(0)=2$ |
| 13 | $y'=8y^2+x^3-3x-8,\ y(0)=1$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| 14 | $y'=4y^2+2x^3+3x-16,\ y(0)=2$ |
| 15 | $y'=y^2+x^4-2x-9,\ y(0)=3$ |
| 16 | $y'=2y^2-2x^3+3x-2,\ y(0)=1$ |
| 17 | $y'=5y^2+4x^4-x-20,\ y(0)=2$ |
| 18 | $y'=y^2-3x^3+2x-9,\ y(0)=3$ |
| 19 | $y'=6y^2+3x^3+4x-6,\ y(0)=1$ |
| 20 | $y'=3y^2-4x^4-5x-12,\ y(0)=2$ |

***Задание № 7.***

Вычислить приближенное значение определенного интеграла с точностью δ=0,001.

*Исходные данные для решения задачи*

| Номер варианта | Интеграл | Номер варианта | Интеграл |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $\int_0^{0,4} x^2 \sin x^2 dx$ | 11 | $\int_0^{0,8} \frac{x^4}{1+x^6} dx$ |
| 2 | $\int_0^{0,4} x \sin x^3 dx$ | 12 | $\int_0^{0,5} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ |
| 3 | $\int_0^{0,5} x^3 \sin x^2 dx$ | 13 | $\int_0^{0,4} x^2 \ln\left(1+x^2\right) dx$ |
| 4 | $\int_0^{0,3} x^2 \cos x^2 dx$ | 14 | $\int_0^{0,4} x \ln\left(1+x^3\right)' dx$ |
| 5 | $\int_0^{0,4} x^4 \cos x^2 dx$ | 15 | $\int_0^{0,4} x^2 arctgx^2 dx$ |
| 6 | $\int_0^{0,5} x^5 \cos x^3 dx$ | 16 | $\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ |
| 7 | $\int_0^{0,4} x^4 e^{-x} dx$ | 17 | $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
| --- | --- | --- | --- |
| 8 | $\int\limits_0^{0,5} x^5 e^{-x} dx$ | 18 | $\int\limits_0^{0,4} \frac{e^x - 1}{x} dx$ |
| 9 | $\int\limits_0^{0,6} x^6 e^{-x} dx$ | 19 | $\int\limits_0^{0,1} \sqrt[3]{1 + x^3}\, dx$ |
| 10 | $\int\limits_0^{0,6} \frac{x^6}{1 + x^8} dx$ | 20 | $\int\limits_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx$ |

## *Решение типовых задач*

***Задание № 1.***

Для данного ряда

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \ldots$$

записать общий член и с его помощью, если возможно, выяснить вопрос о сходимости (расходимости) ряда.

*Решение.*

Найдем формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \ldots u_n + \ldots.$$

Числители членов ряда образуют числовую последовательность, состоящую из натуральных чисел:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots .$$

Знаменатели членов ряда образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 6$ и разностью $d = 1$:

$$6, 7, 8, \ldots, a_n, \ldots$$

$n$-й член арифметической прогрессии находится по формуле:

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

Поэтому

$$a_n = 6 + 1 \cdot (n - 1) = 6 + n - 1 = n + 5.$$

Таким образом, общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{n}{n + 5}.$$

Итак,

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{n + 5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + 5}.$$

Проверим, выполняется ли необходимый признак сходимости, состоящий в том, что если ряд сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{5}{n}} = 1 \neq 0.$$

Необходимый признак не выполняется, значит, ряд расходится.

*Ответ:* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ расходится.

***Задание №2.***

Для данного ряда записать три его первых члена и найти сумму ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{40n^2 - 28n - 45}$

*Решение.*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \ldots$.

Это геометрический ряд, его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = \frac{1}{4}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Этот ряд сходится.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии находится по формуле:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Тогда сумма данного ряда

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

*Ответ:* $S = \frac{1}{2}$.

2) По формуле общего члена ряда $a_n = \dfrac{14}{49n^2 - 28n - 45}$ найдем несколько первых членов ряда:

при $n = 1$ $a_1 = \dfrac{14}{49 \cdot 1^2 - 28 \cdot 1 - 45} = \dfrac{14}{-24} = -\dfrac{7}{12}$,

при $n = 2$ $a_2 = \dfrac{14}{49 \cdot 2^2 - 28 \cdot 2 - 45} = \dfrac{14}{95}$,

при $n = 3$ $a_3 = \dfrac{14}{49 \cdot 3^2 - 28 \cdot 3 - 45} = \dfrac{14}{312} = \dfrac{7}{156}$.

Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{40n^2 - 28n - 45} = -\frac{7}{12} + \frac{14}{95} + \frac{7}{156} + \ldots .$$

Преобразуем формулу общего члена ряда $a_n = \dfrac{14}{49n^2 - 28n - 45}$, разложив знаменатель $49n^2 - 28n - 45$ на множители:

$$49n^2 - 28n - 45 = 0;$$

$$D = 14^2 + 45 \cdot 49 = 49(4 + 45) = 49^2;$$

$$n_{1,2} = \frac{14 \pm 49}{49};$$

$$n_1 = \frac{63}{49} = \frac{9}{7}, \quad n_2 = -\frac{35}{49} = -\frac{5}{7}.$$

Тогда

$$49n^2 - 28n - 45 = 49\left(n - \frac{9}{7}\right)\left(n + \frac{5}{7}\right) = (7n - 9)(7n + 5).$$

Итак,

$$a_n = \frac{14}{(7n - 9)(7n + 5)}.$$

Разложим полученную дробь на сумму простых дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$a_n = \frac{14}{(7n - 9)(7n + 5)} = \frac{A}{7n - 9} + \frac{B}{7n + 5} = \frac{A(7n + 5) + B(7n - 9)}{(7n - 9)(7n + 5)}.$$

Записываем равенство числителей:

$$14 = A(7n + 5) + B(7n - 9);$$

$$14 = 7An + 5A + 7Bn - 9B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $n$ в левой и правой частях полученного равенства:

$$\begin{cases} 7A+7B=0, & \Big| n \\ 5A-9B=14; & \Big| n^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-B, \\ -14B=14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1; \\ B=-1. \end{cases}$$

Тогда общий член ряда примет вид

$$a_n = \frac{A}{7n-9} + \frac{B}{7n+5} = \frac{1}{7n-9} - \frac{1}{7n+5}.$$

Используя его, выпишем первые $n$ членов ряда:

$$a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12},$$

$$a_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{19},$$

$$a_3 = \frac{1}{12} - \frac{1}{26},$$

$$a_4 = \frac{1}{19} - \frac{1}{32},$$

$$a_5 = \frac{1}{26} - \frac{1}{40}, \ \dots ,$$

$$a_{n-3} = \frac{1}{7n-30} - \frac{1}{7n-16},$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{7n-23} - \frac{1}{7n-9},$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{7n-16} - \frac{1}{7n-2},$$

$$a_n = \frac{1}{7n-9} - \frac{1}{7n+5}.$$

Найдем сумму первых $n$ членов ряда ($n$-ю частичную сумму) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$.

Получим:

$$S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5}.$$

Найдем предел $n$-й частичной суммы ряда при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

Так как предел $n$-й частичной суммы при $n \to \infty$ существует и конечен, то ряд сходится и его сумма равна значению этого предела, то есть

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 0,3.$$

*Ответ:* $S = 0,3$.

***Задание № 3.***

С помощью признака Даламбера или Коши исследовать на сходимость данные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

*Решение.*

1) Для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots$ на сходимость используем интегральный признак Коши, согласно которому, если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на множестве натуральных чисел являются значениями непрерывной положительной функции $f(x)$, монотонно убывающей на промежутке $[1;\, +\infty)$, то ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ на $[1;\, +\infty)$. Она непрерывна и положительна на этом промежутке. Значения функции $f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ f(2) = \frac{1}{2},\ f(3) = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \ldots$, то есть $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ монотонно убывает на промежутке $[1;\, +\infty)$.

Значит можно применять интегральный признак Коши. Найдем несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x+2}\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b+2} - 2\sqrt{3}\right) = +\infty.$$

Так как несобственный интеграл расходится, то, согласно интегральному признаку Коши, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ расходится.

*Ответ:* ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ расходится.

2) Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ на сходимость используем признак Даламбера, согласно которому, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если $q<1$; расходится, если $q>1$; требуются дополнительное исследование, если $q=1$.

Для данного ряда $a_n=\frac{n}{3^n}$, $a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}<1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, то, согласно признаку Даламбера, данный ряд сходится.

*Ответ:* ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ сходится.

***Задание № 4.***

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$. Требуется:

1) исследовать его на сходимость по признаку Лейбница,
2) если ряд сходится, исследовать его на абсолютную сходимость,
3) вычислить приближенное значение суммы, взяв три первых члена ряда;
4) оценить допускаемую при этом погрешность.

*Решение.*

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}=\frac{1}{10}-\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}-\frac{4}{10000}+\ldots$ является знакочередующимся.

Проверим, выполняется ли признак Лейбница, согласно которому, если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и предел модуля общего члена ряда при $n\to\infty$ равен нулю, то знакочередующийся ряд сходится.

Члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$ монотонно убывают по абсолютной величине: $\frac{1}{10}>\frac{2}{100}>\frac{3}{1000}>\frac{4}{10000}>\ldots$

Найдем предел модуля общего члена ряда при $n\to+\infty$, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{10^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{10^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{\left(10^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{10^x\ln 10}=0$$

Согласно признаку Лейбница, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$ сходится.

2) Выясним, как сходится знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$, условно или абсолютно. Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}.$$

Исследуем его на сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{10^{n+1}}}{\dfrac{n}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)10^n}{10^{n+1}n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10n}=$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{10}<1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$ сходится. Следовательно, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$ сходится абсолютно.

3) Вычислим приближенное значение суммы ряда, взяв три первых члена:

$$S\approx S_3=\frac{1}{10}-\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}=0{,}1-0{,}02+0{,}003=0{,}983.$$

4) Оценим погрешность вычисления.

Если ряд удовлетворяет признаку Лейбница, то его остаток по модулю не превышает абсолютной величины первого члена остатка.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}=\frac{1}{10}-\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}\underbrace{-\frac{4}{10000}+\frac{5}{100000}+\ldots}_{\text{остаток ряда}};$$

$$|a_4|=\left|-\frac{4}{10000}\right|=0{,}0004.$$

Поэтому погрешность вычислений $\delta\le 0{,}0004$.

***Задание № 5.***

Написать первые три члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

*Решение*

Возьмем последовательно $n$ = 1, 2, 3, …. Тогда данный ряд записывается в виде:

$$\frac{5x}{1^2\cdot 3}+\frac{5^2x^2}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5^3x^3}{3^2\cdot 3^3}+\ldots+\frac{5^nx^n}{n^2\cdot 3^n}+\ldots.$$

Это степенной ряд. Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}x^{n+1}n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1}5^n x^n}\right|=\frac{5}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{5}{3}|x|.$$

Данный ряд сходится абсолютно при тех значениях $x$, которые удовлетворяют неравенству:

$$\frac{5}{3}|x|<1, \text{ или } |x|<\frac{3}{5}, \text{ или } -\frac{3}{5}<x<\frac{3}{5}.$$

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала. При $x=-\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Последний ряд является знакочередующимся. Исследуем его по признаку Лейбница:

1) абсолютная величина его общего члена стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;

2) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине: $1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\ldots$.

Следовательно, по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится. Значит, $x=-\frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

При $x=\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Исследуем сходимость этого ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Значит, $x=\frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

Таким образом, $-\frac{3}{5}\le x\le\frac{3}{5}$ — область сходимости данного степенного ряда.

*Ответ:* $\left[-\frac{3}{5};\ \frac{3}{5}\right)$.

**Задание № 6.**

Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка $y'=2y^2+3x^4+4x-18$ и начальное условие $y(0)=3$. Найти решение задачи Коши в виде ряда Маклорена (ограничиться тремя первыми ненулевыми членами разложения).

*Решение.*

Будем искать решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{y^n(0)}{n!}x^n+...$$

По условию $y(0)=3$.

Найдем $y'(0)$, для этого подставим $x=0$; $y=3$ в уравнение $y'=2y^2+3x^4+4x-18$. Получим

$$y'(0)=2\cdot 9+3\cdot 0+4\cdot 0-18=0.$$

Найдем $y''(0)$:

$$y''(x)=\left(2y^2+3x^4+4x-18\right)'=4y^2y'+12x^3+4;$$

$$y''(0)=4\cdot 3^2\cdot 0+12\cdot 0^3+4=4.$$

Найдем $y'''(0)$:

$$y'''(x)=\left(4y^2y'+12x^3+4\right)'=8y\left(y'\right)^2+4y^2y''+36x^2;$$

$$y'''(0)=8\cdot 3\cdot 0^2+4\cdot 3^2\cdot 4+36\cdot 0=144.$$

Нашли три первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд решения дифференциального уравнения:

$$y(x)=3+\frac{4}{2!}x^2+\frac{144}{3!}x^3+...$$

$$y(x)=3+2x^2+24x^3+...$$

*Ответ:* $y(x)=3+2x^2+24x^3+...$

**Задание № 7.**

Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_0^{0,4} x^2\sin x^2dx$ с точностью δ=0,001.

*Решение.*

Будем использовать разложение в ряд Маклорена функции $y=\sin x$:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\ldots$$

Заменим $x$ на $x^2$, получим разложение в степной ряд функции $y=\sin x^2$:

$$\sin x^2 = x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Умножив обе части последнего равенства на $x^2$, получим разложение в ряд функции $y=x^2\sin x^2$:

$$x^2\sin x^2 = x^4-\frac{x^8}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}-\frac{x^{16}}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Промежуток интегрирования $[0;\,0,4]$ принадлежит области сходимости ряда. В области сходимости ряд можно почленно интегрировать. Получим

$$\int_0^{0,4} x^2\sin x^2 dx = \int_0^{0,4}\left(x^4-\frac{x^8}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}-\frac{x^{16}}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^9}{9\cdot 3!}+\frac{x^{13}}{5!\cdot 13}-\frac{x^{17}}{7!\cdot 17}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{4n-1}}{(4n-1)\cdot(2n-1)!}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,4}=$$

$$=\frac{0,01024}{5}-\frac{0,4^9}{9\cdot 6}+\frac{0,4^{13}}{120\cdot 13}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{4n-1}}{(4n-1)\cdot(2n-1)!}+\ldots$$

После интегрирования получили знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница (члены монотонно убывают по абсолютной величине и предел модуля общего члена ряда при $n\to\infty$ равен нулю).

Находим член ряда, меньший заданной точности:

$$|a_2|=\left|-\frac{0,4^9}{5\cdot 6}\right|\approx 0,000005<0,001$$

Остаток ряда по модулю не превышает абсолютной величины своего первого члена, то есть $|a_2|$.

Итак,

$$\int_0^{0,4} x^2 \sin^2 x dx \approx \frac{0,01024}{5} \approx 0,0020 \approx 0,002.$$

*Ответ:* 0,002.

# 7. САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

### *Конспект №1 «Матрицы, их виды. Действия над матрицами»*

Самостоятельно изучите материал по источникам:

Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Журбенко Л.Н., ред: Данилов Ю.М., ред. – М : ИНФРА-М, 2013. – С. 10, 17–19.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Что называется матрицей?
2. Виды матриц?
3. Как выполняется сложение матриц?
4. Как выполняется умножение матрицы на число?
5. Как выполняется умножение матриц?
6. В каком случае можно выполнять умножение матриц?
7. Обладает ли умножение матриц переместительным свойством?
8. Вычислите сумму элементов первого столбца матрицы $C = 2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 123 \\ 11 & 34 & -56 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 4 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.
9. Найдите матрицу $C = A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
10. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 123 \\ 11 & 34 & -56 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите алгебраические дополнения элементов $a_{21}$, $a_{33}$.

### *Конспект №2 «Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов»*

Самостоятельно изучите материал по источникам:

Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Журбенко Л.Н., ред: Данилов Ю.М., ред. – М : ИНФРА-М, 2013. – С. 21–40.

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. – 4-е изд., испр. и доп. – М : Юрайт, 2013. – С. 277–304.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какие линейные операции выполняются над векторами?

2. Изобразите два произвольных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, найдите векторы $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$; $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$; $2\overline{a}$; $-\frac{1}{2}\overline{b}$.

3. Как выполняются линейные операции над векторами в координатной форме?

4. Даны векторы $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 7\overline{k}$ и $\overline{b} = 6\overline{i} - 8\overline{j} + \overline{k}$. Найдите координаты вектора $\overline{c} = 5\overline{a} - 2\overline{b}$.

5. Что называют скалярным произведением двух векторов?

6. Какими свойствами обладает скалярное произведение?

7. Что называют скалярным квадратом вектора?

8. Как находится скалярное произведение векторов через их координаты?

9. Каково условие перпендикулярности двух векторов?

10. Как с помощью скалярного произведения найти угол между векторами?

11. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если длина вектора $\overline{a}$ равна $5$, длина вектора $\overline{b}$ равна $4$, а угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $60^\circ$.

12. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A(3; -6; 4)$, $B(-4; 0; 3)$, $C(5; -1; 4)$.

13. Найдите косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = (5; -2; 8)$, $\overline{b} = (4; 1; -1)$.

14. Найдите значение $\lambda$, при котором векторы $\overline{a} = (5; -2; \lambda)$ и $\overline{b} = (4; \lambda; -3)$ перпендикулярны.

### *Конспект №3 «Полярная система координат на плоскости»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В. С. Шипачев. – 4-е изд., испр. и доп. – М : Юрайт, 2013. – С. 44–46.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Что называют полярной системой координат на плоскости?

2. Что называют прямоугольными координатами точки на плоскости?

3. Как связаны полярные и прямоугольные координаты точки?

4. Каким уравнением задается линия в полярной системе координат?

5. Построить точку $M\left(1;\dfrac{3\pi}{4}\right)$ в полярной системе координат.

6. Дана точка $A\left(3;\dfrac{5\pi}{4}\right)$ в полярной системе координат. Найти ее координаты в прямоугольной декартовой системе координат.

7. Дана точка $B\left(-\sqrt{3};1\right)$ в прямоугольной декартовой системе координат. Найти ее координаты в полярной системе координат.

8. Построить кривую $r = 1 + \cos\varphi$ в полярной системе координат. Найти в справочнике название этой кривой.

## *Конспект №4 «Поверхности в пространстве»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 76–83.

Составьте таблицу «Поверхности в пространстве»:

*Таблица «Поверхности в пространстве»*

| № | Название поверхности | Уравнение | Изображение |
|---|---|---|---|
| 1 | Эллиптический цилиндр | | |
| 2 | Параболический цилиндр | | |
| 3 | Гиперболический цилиндр | | |
| 4 | Эллипсоид | | |
| 5 | Сфера | | |
| 6 | Однополостный гиперболоид | | |
| 7 | Двухполостный гиперболоид | | |
| 8 | Эллиптический параболоид | | |
| 9 | Гиперболический параболоид | | |
| 10 | Конус второго порядка | | |

Выполните задания:

1. Расположите уравнения поверхностей:

1) $x^2+y^2+z^2=4$, 2) $x^2+y^2-z^2=4$, 3) $x^2+z^2=4$

в следующем порядке: цилиндр, сфера, гиперболоид.

2. Расположите уравнения поверхностей:

1) $y+x^2+1=0$, 2) $x^2+y+z^2=0$, 3) $x^2-y^2+z^2=0$

в следующем порядке: параболоид, цилиндр, конус.

## *Конспект №5. «Основные элементарные функции, их свойства и графики»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] . Ч. 1 : Тридцать шесть лекций / Д. Т. Письменный. – 6-е изд. – М : Айрис-пресс, 2011. – С. 104–106.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Что называют функцией одной переменной?

2. Что называется областью определения функции одной переменной?

3. Что называется множеством значений функции одной переменной?

4. Какая функция называется четной? Приведите пример четной функции. Какова особенность графика четной функции?

5. Какая функция называется нечетной? Приведите пример нечетной функции. Какова особенность графика нечетной функции?

6. Какая функция называется периодической? Приведите пример периодической функции. Какова особенность графика периодической функции?

7. Какой период называют основным?

8. Какая функция называется ограниченной? Приведите пример ограниченной функции.

9. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$;

2) $y=\dfrac{\lg(x+5)}{x}$.

10. Найдите множество значений функции:

1) $y=3\sin x-2$;

2) $y=x^2-6x+5$.

11. Исследуйте на четность (нечетность) функции:

1) $y=x^4\sin 7x$;

2) $y = \lg \cos x + x^2$.

12. Укажите основной период функции:

1) $y = 2\sin 6x$; 2) $y = \cos\dfrac{x}{2}$;

3) $y = -2tg3x + 1$; 4) $y = ctg(4x - 2)$.

13. Какие функции относятся к основным элементарным?

14. Заполните таблицу «Основные элементарные функции».

*Таблица «Основные элементарные функции»*

| Обозначение функции | Область определения $D(y)$ | Область значений $E(y)$ | Четность, нечетность | Монотонность | Периодичность | График функции |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *Степенная функция* | | | | | | |
| $y = x^n$ $n \in N$, $n$ – четное | | | | | | |
| $y = x^n$ $n \in N$, $n$ – нечетное | | | | | | |
| $y = x^{-n}$ $n \in N$, $n$ – четное | | | | | | |
| $y = x^{-n}$ $n \in N$, $n$ – нечетное | | | | | | |
| $y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ $n$ – нечетное | | | | | | |
| $y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ $n$ – четное | | | | | | |
| *Показательная функция* | | | | | | |
| $y = a^x$ $0 < a < 1$ | | | | | | |
| $y = a^x$ $a > 1$ | | | | | | |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Логарифмическая функция* | | | | | | |
| $y=\log_a x$<br>$0<a<1$ | | | | | | |
| $y=\log_a x$<br>$a>1$ | | | | | | |
| *Тригонометрические функции* | | | | | | |
| $y=\sin x$ | | | | | | |
| $y=\cos x$ | | | | | | |
| $y=\mathrm{tg}x$ | | | | | | |
| $y=\mathrm{ctg}x$ | | | | | | |
| *Обратные тригонометрические функции* | | | | | | |
| $y=\arcsin x$ | | | | | | |
| $y=\arccos x$ | | | | | | |
| $y=\mathrm{arctg}x$ | | | | | | |
| $y=\mathrm{arcctg}x$ | | | | | | |

### *Конспект №6 «Вывод некоторых формул дифференцирования»*

Самостоятельно изучите материал по источникам:

Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Журбенко Л.Н., ред: Данилов Ю.М., ред. – М : ИНФРА-М, 2013. – С. 131–161.

Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. – 4-е изд., испр. и доп. – М : Юрайт, 2013. – С. 110–122.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Выведите формулу производной суммы двух функций.
2. Выведите формулу производной произведения двух функций.
3. Выведите формулу производной функции $y=\cos x$.
4. Выведите формулу производной функции $y=\mathrm{tg}\,x$.
5. Выведите формулу производной функции $y=\mathrm{arctg}\,x$.
6. Найдите производную функции:

1) $y=\ln^3 x+\dfrac{1}{4}\mathrm{ctg}^4 x$;

2) $y=3^{\cos^2 x}+\mathrm{arctg}\,5x$,

3) $y=e^{\mathrm{ctg}\,x}\arcsin\sqrt{x}$.

## *Конспект №7 «Несобственные интегралы»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 216–219.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какие интегралы называются несобственными?
2. Как вычисляются несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования?
3. Как вычисляются несобственные интегралы от неограниченных функций?
4. В каком случае несобственный интеграл называется расходящимся? сходящимся?
5. Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$; 4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$;

5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$; 6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

## *Конспект №8 «Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 222–227.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Как вычислить площадь плоской фигуры в декартовых координатах?
2. Как вычислить площадь криволинейной трапеции при параметрическом задании кривой?
3. Как вычислить площадь криволинейного сектора в полярных координатах?
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $xy = 4,\ \ x = 1,\ \ x = 4,\ \ y = 0$;

2) $y = x^2,\ \ y = 2 - x^2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат: $r = a\left(1 + \sin 2\varphi\right)$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

## *Конспект №9 «Применение определенного интеграла для вычисления объемов тел вращения и длины дуги кривой»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 222–227.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Как вычислить объем тела вращения с помощью определенного интеграла?

2. Как вычислить длину дуги в прямоугольной системе координат?

3. Как вычислить длину дуги кривой, заданной в параметрической форме?

4. Как вычислить длину дуги кривой в полярных координатах?

5. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{6}{x}$, прямыми $y = 1$, $y = 6$ и осью $Oy$. Сделать рисунок.

6. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Сделать рисунок.

7. Вычислить длину дуги кривой: $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$, если $0 \le x \le 12$.

## *Конспект № 10 «Касательная плоскость и нормаль к поверхности»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 167–172.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Сформулируйте определение нормали к поверхности и напишите уравнения нормали.

2. Сформулируйте определение касательной плоскости к поверхности и напишите уравнение касательной плоскости.

3. Составьте уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M(1;2;-1)$ к поверхности, заданной уравнением $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$.

4. Составьте уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M(2;1;4)$ к поверхности, заданной уравнением $z = 2x^2 - 4y^2$.

### *Конспект №11 «Физические приложения кратных интегралов»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 285–288, 300–302.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. По каким формулам находятся масса, координаты центра тяжести, моменты инерции относительно координатных осей плоской пластинки *D*, плотность которой $\rho = \rho(x, y)$?

2. Определить координаты центра тяжести квадратной пластинки *D*: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, если плотность $\rho(x, y) = x + y$.

3. Найти момент инерции однородной пластины с $\rho_0 = 2$, ограниченной параболой $y = 9 - x^2$ и осью $Ox$, относительно оси $Oy$.

### *Конспект № 12 «Физические приложения криволинейных интегралов»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 312–314.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Как можно определить работу при перемещении единицы массы по дуге *AB* в поле, образованном силой $\vec{F} = (P, Q)$?

2. Поле образовано силой $\vec{F} = (P, Q)$, где $P = x - y$, $Q = x$. Вычислить работу при перемещении единицы массы по контуру квадрата со сторонами $x = \pm 2$, $y = \pm 2$.

3. Поле образовано силой $\vec{F} = (P, Q)$, где $P = y$, $Q = y - x$. Вычислить работу при перемещении единицы массы по прямой *AB*, где $A(-3;0)$, $B(0;3)$.

### *Конспект №13 «Комплексные числа, действия над ними»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В. С. Шипачев. – 4-е изд., испр. и доп. – М : Юрайт, 2013. – С. 522–524.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Как записывается комплексное число в алгебраической форме?
2. Что называют мнимой и действительной частью комплексного числа?
3. Какие числа называют чисто мнимыми?
4. Какое число называется сопряженным к данному комплексному числу?
5. Как выполняется сложение (вычитание) комплексных чисел в алгебраической форме?
6. Как выполняется умножение комплексных чисел в алгебраической форме?
7. Как выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме?
8. Выполнить действия:

1) $(1+2i)(2+i)$;

2) $\dfrac{2+3i}{1+4i}$;

3) $z_1\overline{z_2}$, если $z_1 = 1-\sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$;

4) $i^3$, $i^4$, $i^5$, $i^{25}$, $i^{15}$.

5) $\dfrac{\overline{z_1}^2}{z_2}$, если $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 2+2i$;

6) $(1-i)^2(5+8i)$;

7) $\dfrac{1}{1+3i} + \dfrac{1}{4-i}$.

### *Конспект № 14 «Уравнения Бернулли»*

Самостоятельно изучите материал, используя информационно-справочные и поисковые системы: Математика Exponenta.ru http://www.exponenta.ru Компания Softline. Образовательный математический сайт. Материалы для студентов: задачи с решениями, справочник по математике, электронные консультации.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какой вид имеют уравнения Бернулли?
2. Каков способ их решения?
3. Решите уравнения:
1) $y' + \frac{2}{x} y = x^2 y^2$;
2) $y' - \frac{y}{x} = \frac{(x-1)^2}{y}$.

## *Конспект № 15 «Основные логические операции»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 466–470.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:
1. Что называют конъюнкцией?
2. Что называют дизъюнкцией?
3. Что называют импликацией?
4. Что называют отрицанием?
5. Что называют эквивалентностью?
6. Составьте таблицу истинности основных логических операций:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $\overline{A}$ | $A \to B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

7. Докажите с помощью таблиц истинности равносильность формул:
1) $A \vee (A \wedge B) = A$;
2) $A \wedge (A \vee B) = A$.

## *Конспект № 16 «Применение степенных рядов в приближенных вычислениях»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 380–382.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:
1. Какой вид имеет ряд Маклорена?
2. Какой вид имеет ряд Тейлора?
3. Запишите разложение в ряд Маклорена следующих функций:

1) $y = e^x$;

2) $y = \sin x$;

3) $y = \cos x$;

4) $y = (1 + x)^m$;

5) $y = \ln(1 + x)$;

6) $y = arctgx$.

4. С помощью выписанных формул разложите в ряд Маклорена функции:

1) $y = \ln(1 + x^2)$;

2) $y = e^{3x}$.

5. Как с помощью рядов можно вычислить приближенное значение функции?

6. Вычислите $e^{0,1}$ с точностью до 0,001.

7. Как с помощью рядов можно вычислить приближенное значение определенного интеграла?

8. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

## *Конспект № 17 «Формула полной вероятности Формула Байеса»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 420.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. По какой формуле можно найти вероятность события $A$, которое может произойти лишь вместе с одним из событий $H_1$, $H_2$, …, $H_n$, образующих полную группу событий?

2. Приведите примеры событий, вероятность которых вычисляется по формуле полной вероятности.

3. Какие вероятности вычисляются по формуле Байеса?

4. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров. Во второй урне 6 белых и 4 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Найдите вероятность того, что этот шар окажется белым.

5. На конвейер поступают детали, производимые тремя станками, при этом первый станок производит 50% всех деталей, второй — 30%, а третий — 20%. Если на конвейер попадает деталь с первого станка, то вероятность того, что она будет исправна, равна 0,98, второй станок выпускает детали с

надежностью 0,95, а третий — с надежностью 0,8. Определите вероятность того, что если с конвейера сошел негодный узел, то деталь к нему изготовлена на первом станке.

### *Конспект № 18 «Виды законов распределения случайных величин»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 432–437.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какой вид имеет плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины $X$, распределённой равномерно?
2. Как находится математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины $X$, распределённой равномерно?
3. Какой вид имеет плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины $X$, имеющей показательное распределение?
4. Как находится математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины $X$, имеющей показательное распределение?
5. В каком случае дискретная случайная величина распределена по биномиальному закону? Привести пример.
6. Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону?
7. В каком случае дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона? Привести пример.
8. Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона?
9. Геометрическое распределение дискретной случайной величины (привести пример). Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, имеющей геометрическое распределение?
10. График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины $X$, распределённой равномерно в интервале $(-1;3)$, имеет вид:

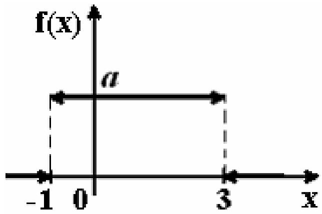


*Рис. 15.* График функции $y = f(x)$

Найдите значение *a*.

11. Все значения равномерно распределенной непрерывной случайной величины *X* принадлежат интервалу (2; 8). Определить:

а) вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (3; 5);

б) математическое ожидание случайной величины *X*;

в) дисперсию случайной величины *X*.

### *Конспект № 19 «Вариационные ряды»*

Самостоятельно изучите материал по источнику: Математика [Текст] : Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2013. — С. 445, 446, 448–453.

Ответьте на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Что называют генеральной совокупностью?
2. Что называют выборочной совокупностью?
3. Что называют объемом выборки?
4. Что называют объемом генеральной совокупности?
5. Что называют дискретным вариационным рядом?
6. Что называют полигоном частот? Что называют полигоном относительных частот?
7. Что называют кумулятой частот? Что называют кумулятой относительных частот?
8. Что называют эмпирической функцией распределения?
9. Как вычисляется размах вариации, выборочная средняя, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение, мода, медиана.
10. Данные об оценках студентов на экзамене по математике выбрали случайным образом из ведомостей студентов второго курса и получили следующий ряд оценок:

5, 4, 3, 4, 5,
3, 4, 3, 2, 4,
3, 4, 4, 2, 5,
3, 4, 3, 4, 5,
4, 3, 5, 4, 4,
3, 3, 4, 4, 3,
4, 2, 4, 4, 5,
5, 3, 4, 5, 4,
3, 5, 4, 5, 4.

1) Построить полигон частот, полигон относительных частот;
2) Построить кумуляту частот, кумуляту относительных частот;
3) Найти размах вариации, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, моду, медиану.

## 8. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

*Основная литература:*

1. Марусич, А.И. Математика [Текст] : учебник для с.-х. вузов / А.И. Марусич ; Костромская ГСХА. Каф. высшей математики. – Караваево : Костромская ГСХА, 2014. – 218 с. – ISBN 978-5-93222-266-9.
2. Математика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Журбенко Л.Н., ред. ; Данилов Ю.М., ред. – М : ИНФРА-М, 2013. – 496 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-002673-2.
3. Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев. – 4-е изд., испр. и доп. – М : Юрайт, 2013. – 607 с. – (Бакалавр. Базовый курс).

*Дополнительная литература:*

1. Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Лекции и практикум [Текст] : учеб. пособие для вузов / Петрушко И.М., ред. – СПб : Лань, 2006. – 608 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – ISBN 5-8114-0633-9.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. [Текст] . Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – 6-е изд. – М : Айрис-пресс, 2011. – 288 с.: ил. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-8112-3250-5.

3. Привалов, И.И. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник для вузов / И.И. Привалов. – 35-е изд., стер. – СПб : Лань, 2005. – 304 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – ISBN 5-8114-0518-9.

**Используемая литература:**

1. Высшая математика [Текст] : методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей сельскохозяйственных высших учебных заведений / Д.Т. Штейнгардт. – М. : Высш. шк., 1967. – 124 с. : ил.

2. Высшая математика [Текст] : программа, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей сельскохозяйственных высших учебных заведений / Д.Т. Штейнгардт. – 2-е изд. – М. : Высш. шк., 1979. – 128 с. : ил.

3. Комплексные числа : учебное пособие по математике для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения / сост. А.И. Марусич. — Кострома : КГСХА, 2007. — 22 с.

3. Основы высшей математики [Текст] : методические указания и контрольные задания для студентов-заочников сельскохозяйственных специальностей высших учебных заведений / Д.Т. Штейнгардт, Н.В. Крылов. – 6-е изд. – М. : Высш. шк., 1987. – 88 с. : ил.

4. Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями [Текст] : учебное пособие / А.С. Шапкин. – М. : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2005. – 432 с. – ISBN 5-94798-570-5.