САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Элементы комбинаторики

- ***Комбинаторика*** — часть математики, которая посвящена решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами.

Основные правила комбинаторики

1. Правило суммы.

Пусть из множества *A* элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 — другими n_2 способами и т.д., элемент a_k — n_k способами, отличными от предыдущих. Тогда выбор одного из элементов a_1, или a_2, или и т.д., a_k можно произвести

$$\boxed{n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

способами.

Пример 1. Пусть в корзине имеется 5 апельсинов, 3 банана и 8 яблок. Тогда выбор одного из фруктов (или апельсина, или банана, или яблока) можно сделать 16 способами ($16 = 5 + 3 + 8$).

2. Правило произведения.

Пусть из множества *A* элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после этого элемент a_2 — n_2 способами и т.д., после элемента a_{k-1} элемент a_k можно выбрать n_k способами. Тогда одновременный выбор элементов a_1, a_2, …, a_k в указанном порядке можно произвести

$$\boxed{n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$$

способами.

Пример 2. Из пункта *A* в пункт *B* можно доехать по пяти дорогам, из *B* в *C* — по трем дорогам, а из *C* в *D* — по четырем дорогам. Сколькими способами можно проехать из *A* в *D* через *B* и *C*?

Решение.

По правилу произведения получаем $n = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$.

Виды соединений

- ***Упорядоченным*** называется множество, в котором указан порядок следования элементов.

1. Размещения.

Дано множество, состоящее из n элементов.

- ***Размещением из n элементов по k элементов*** $(0 \le k \le n)$ называется любое упорядоченное подмножество, содержащее k различных элементов исходного множества.

Все эти подмножества отличаются друг от друга или *составом* элементов, или *порядком* их следования.

Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k и находится по формуле

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читается n факториал).

Принимается, что $0! = 1$, $A_0^0 = 1$.

Пример 3. В футбольной премьер-лиге РФ участвует 16 команд. Сколькими способами можно распределить три первых призовых места?

Решение.

Так как в данном случае порядок команд имеет значение, то имеем дело с размещениями, т.е.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360.$$

Число всех **размещений с повторениями из *n* элементов по *k* элементов** обозначается $\left(A_n^k\right)_{повт}$ и находится по формуле

$$\boxed{\left(A_n^k\right)_{повт} = n^k}.$$

Пример 4. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6?

Решение.

Так как порядок цифр в числе важен и могут быть повторяющиеся цифры, имеем дело с размещениями с повторениями, т.е.

$$\left(A_4^3\right)_{повт} = 4^4 = 64.$$

2. Перестановки.

- ***Перестановкой из n элементов*** называется размещение из n элементов по n элементов.

Так как каждая перестановка содержит все n элементов исходного множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Количество всех перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Итак,

$$\boxed{P_n = n!}$$

Пример 4. Сколькими способами можно расставить на полке четыре книги?

Решение.

Так как из четырех книг берут все четыре, расставляя их по порядку, то количество способов расстановки вычисляем по формуле числа перестановок из четырех элементов:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 .$$

3. Сочетания.

- ***Сочетанием из n элементов по k элементов*** $(0 \le k \le n)$ называется любое неупорядоченное подмножество, содержащее k различных элементов исходного множества.

Все эти подмножества отличаются друг от друга только составом элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k и находится по формуле

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Пример 5. В бригаде 25 человек. Надо выбрать четырех человек для работы в ночную смену. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Так как порядок выбранных четырех рабочих не имеет значения, то имеем

$$C_{25}^4 = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25!}{4! \cdot 21!} = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650 .$$

Задачи для решения на практическом занятии

№ 1. В библиотеке на книжной полке расставлены 10 книг различных авторов. Три студента могут выбрать по одной книге. Сколько всевозможных вариантов выбора книг можно осуществить?

№ 2. Паспорт гражданина Российской Федерации состоит из серии и номера. Серия представляет собой 4 цифры, а номер — 6 цифр, расположенных в произвольном порядке. Определите возможное количество различных паспортов, которое может быть выдано гражданам Российской Федерации.

№ 3. Собрание сочинений А.С. Пушкина издано в шести томах. Книги расставлены на полке в случайном порядке. Сколько существует способов расставить эти тома? Сколько способов гарантирует, что первые три тома будут стоять следующим образом: первый, второй, третий?

№ 4. При заполнении карточки лотереи «Спортлото» игрок должен зачеркнуть 6 из 49 возможных комбинаций чисел от 1 до 49. Сколько возможных комбинаций можно составить из 49 по 6, если порядок чисел безразличен? В скольких вариантах будет угадано три конкретных числа?

Домашнее задание (задачи для самостоятельного решения)

№ 1. Определите количество возможных вариантов кодирования замка, код которого набирается последовательным нажатием четырех разных цифр.

Ответ: 5040.

№ 2. Кодовый замок открывается последовательным набором четырех цифр, при этом цифры в коде могут повторяться. Определите число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Ответ: 10000.

№ 3. Совет группы состоит из 7 студентов, из которых необходимо выбрать председателя совета, его заместителя и секретаря. Сколько имеется различных вариантов выбора случайным образом, если учесть, что шансы быть избранными у всех членов совета одинаковые?

Ответ: 210.

№ 4. Группе из семи студентов поручили дежурить по общежитию три дня. Сколькими различными способами можно случайным образом распределить дежурство, если каждый день дежурит только один студент и один и тот же студент может отдежурить один, два или все три дня.

Ответ: 343.

№ 5. Из группы, в которой учатся 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет факультета. Сколько существует различных способов такого выбора случайным образом?

Ответ: 220.

№ 6. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Ответ: 40320.