ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1-10

Решить систему линейных уравнений (табл.1) тремя способами:

1) по формулам Крамера;
2) с помощью обратной матрицы;
3) методом Гаусса.

Таблица 1. Исходные данные для решения задач

Номер Задания	Система	Номер задания	Система
1	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=7 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ -4x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1-x_3=1, \\ 2x_1+4x_2-x_3=-7, \\ x_1+8x_2-3x_3=12 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=15, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-9, \\ x_1+5x_2+x_3=20 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12, \\ -4x_1-x_2+3x_3=-9 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=12, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=5 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ x_1+5x_2+x_3=-3 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3, \\ 3x_1-x_2+x_3=12 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 7x_1-5x_2=24, \\ 4x_1+11x_3=39, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=33 \end{cases}$

Задание 11-20

Даны координаты точек *A*, *B*, *C*, *D* (табл. 2).

Требуется:

1) найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ и записать их разложение в системе орт;
2) найти угол между векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$;
3) найти площадь треугольника *ABC*;
4) найти объём пирамиды *ABCD*.

Таблица 2. Исходные данные для решения задач

Номер задания	Координаты точек			
	A	*B*	*C*	*D*
11	(3; –1; 2)	(4; –1; –1)	(2; 0; 2)	(1; 2; 4)
12	(2; –1; 2)	(3; –1; –1)	(1; 0; 2)	(0; 2; 4)
13	(3; 0; 2)	(4; 0; –1)	(2; 1; 2)	(1; 3; 4)
14	(2; –1; 3)	(3; –1; 0)	(1; 0; 3)	(0; 2; 5)
15	(3; 1; 2)	(4; 1; –1)	(2; 2; 2)	(1; 4; 4)
16	(2; 1; 2)	(3; 1; –1)	(1; 2; 2)	(0; 4; 4)
17	(1; 1; 2)	(2; 1; –1)	(0; 2; 2)	(–1; 4; 4)
18	(0; 1; 2)	(1; 1; –1)	(–1; 2; 2)	(–2; 4; 4)
19	(0; 2; 2)	(1; 2; –1)	(–1; 3; 2)	(–2; 5; 4)
20	(0; 2; 1)	(1; 2; –2)	(–1; 3; 1)	(–2; 5; 3)

Пример выполнения задания 1-10

Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Решить систему тремя способами:

1) по формулам Крамера;

2) с помощью обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

Решение

1. Решим систему по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Составим определитель системы из коэффициентов при неизвестных и вычислим его по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot3 + 5\cdot(-1)\cdot4 - 4\cdot1\cdot3 - 2\cdot5\cdot1 - 2\cdot(-1)\cdot1 =$$

$$= 1 + 12 - 20 - 12 - 10 + 2 = -27.$$

Составим определитель Δ_1, заменив в определителе системы Δ первый столбец столбцом свободных членов, и вычислим его по правилу треугольников:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot10 + 8\cdot4\cdot(-1) - 10\cdot1\cdot4 - 8\cdot2\cdot1 - 16\cdot2\cdot(-1) =$$

$$= 16 + 40 - 32 - 40 - 16 + 32 = 0\,.$$

Составим определитель Δ_2, заменив в определителе системы Δ второй столбец столбцом свободных членов, и вычислим его, разложив по третьей строке:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 16 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 10\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(16\cdot2 - 8\cdot4) - 10\cdot(1\cdot2 - 4\cdot5) + (1\cdot8 - 5\cdot16) =$$

$$= 0 + 180 - 72 = 108.$$

Составим определитель Δ_3, заменив в определителе системы Δ третий столбец столбцом свободных членов, и вычислим его, получив нули в первом столбце и разложив по нему:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} =$$

умножим элементы первой строки на (-5) и прибавим к соответствующим элементам второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-3) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 0 & -9 & -72 \\ 0 & -7 & -38 \end{vmatrix} =$$

полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -9 & -72 \\ -7 & -38 \end{vmatrix} = -9\cdot(-38) - (-72)\cdot(-7) = 342 - 504 = -162\,.$$

Вычислим x_1, x_2 и x_3 по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-27} = 0\,,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{108}{-27} = -4\,,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-162}{-27} = 6\,.$$

Итак, $(0, -4, 6)$ — решение системы.

Ответ: $(0,-4,6)$.

2. Решим систему матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}.$$

Рассмотрим матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица системы, состоящая из коэффициентов при неизвестных;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ — матрица-столбец неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ — матрица-столбец свободных членов.

Тогда данная система в матричной форме примет вид:

$$AX = B.$$

Матрица X находится по формуле

$$X = A^{-1}B,$$

где A^{-1} — матрица, обратная к матрице A.

Найдем обратную матрицу A^{-1}. Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27 \text{ (вычисление в пункте 1).}$$

Так как $\Delta = -27 \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.
Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(5\cdot 1 - 2\cdot 3) = 1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5\cdot(-1)-1\cdot 3=-8,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(2\cdot 1-4\cdot(-1))=-6,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-4\cdot 3=-11,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(1\cdot(-1)-2\cdot 3)=7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 1=0,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-(1\cdot 2-4\cdot 5)=18,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 5=-9.$$

Составляем матрицу $\tilde{A}$ из алгебраических уравнений:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -8\\ -6 & -11 & 7\\ 0 & 18 & -9\end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу $\tilde{A}$, получаем матрицу $\overline{A}$:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 1 & -11 & 18\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу A^{-1} находим по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\overline{A}.$$

Получаем:

$$A^{-1}=\frac{1}{-27}\cdot\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 1 & -11 & 18\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0\\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3}\\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу X:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 3\cdot 16 + (-6)\cdot 8 + 0\cdot 10 \\ 1\cdot 16 + (-11)\cdot 8 + 18\cdot 10 \\ (-8)\cdot 16 + 7\cdot 8 + (-9)\cdot 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 108 \\ -162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Итак, $(0, -4, 6)$ — решение системы.

Ответ: $(0, -4, 6)$.

3. Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (-5) и прибавим ко второму уравнению; умножим первое уравнение на (-3) и прибавим к третьему. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ \quad -9x_2 - 18x_3 = -72, \\ \quad -7x_2 - 11x_3 = -38. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $\left(-\frac{1}{9}\right)$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 8, \\ \quad -7x_2 - 11x_3 = -38. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 7 и прибавим к третьему. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 8, \\ \quad 3x_3 = 18. \end{cases}$$

Умножим третье уравнение на $\frac{1}{3}$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_3 = 6. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Получили систему ступенчатого вида. Начиная с третьего уравнения, обратным ходом находим неизвестные:

$$x_3 = 6,$$

$$x_2 = 8 - 2x_3 = 8 - 2 \cdot 6 = 8 - 12 = -4,$$

$$x_1 = 16 - 2x_2 - 4x_3 = 16 - 2 \cdot (-4) - 4 \cdot 6 = 16 + 8 - 24 = 0.$$

Итак, $(0, -4, 6)$ — решение системы.

Ответ: $(0, -4, 6)$.Пример выполнения задания 11-20

Даны координаты точек $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 4)$.

Требуется:

1) найти координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ $\overline{AD}$ и записать их разложение в системе орт;

2) найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

3) найти площадь треугольника ABC;

4) найти объём пирамиды $ABCD$.

Решение

1. Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$, зная координаты его начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$, надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты его начала:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тогда

$$\bar{a} = \overline{AB} = (4 - 3; -1 + 1; -1 - 2) = (1; 0; -3),$$

$$\bar{b} = \overline{AC} = (2 - 3; 0 + 1; 2 - 2) = (-1; 1; 0),$$

$$\bar{c} = \overline{AD} = (1 - 3; 2 + 1; 4 - 2) = (-2; 3; 2).$$

Если вектор $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ задан своими координатами, то его можно записать в виде разложения по координатному базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ следующим образом:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}.$$

Тогда разложение векторов $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ имеет вид:

$$\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{k},$$
$$\bar{b} = -\bar{i} + \bar{j},$$
$$\bar{c} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}.$$

2. Косинус угла между векторами $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AC}$ найдем по формуле

$$\cos\angle BAC = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|},$$

где $\bar{a} \cdot \bar{b}$ — скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

$|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$ — произведение длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Скалярное произведение векторов $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ находится по формуле

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Тогда

$$\cos\angle BAC = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Получим

$$\cos\angle BAC = \frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{20}} = -\frac{\sqrt{20}}{20}.$$

3. Площадь треугольника ABC вычислим по формуле

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|,$$

где $\bar{a} \times \bar{b}$ — векторное произведение векторов $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AC}$.

Векторное произведение векторов $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ находится по формуле

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Найдем векторное произведение векторов $\bar{a} = \overline{AB} = (1; 0; -3)$ и $\bar{b} = \overline{AC} = (-1; 1; 0)$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 0 & -3\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}.$$

Тогда

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{3^2+3^2+1^2}=\sqrt{19}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{19}}{2}\ \text{(кв. ед.)}.$$

4. Объем пирамиды $ABCD$ находится по формуле

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|,$$

где $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ — смешанное произведение векторов $\bar{a}=\overline{AB}$, $\bar{b}=\overline{AC}$ и $\bar{c}=\overline{AD}$.

Смешанное произведение векторов $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$ и $\bar{c}=(c_x;c_y;c_z)$ находится по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Найдем смешанное произведение векторов $\bar{a}=\overline{AB}=(1;0;-3)$, $\bar{b}=\overline{AC}=(-1;1;0)$ и $\bar{c}=\overline{AD}=(-2;3;2)$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=2+3=5.$$

Тогда

$$V_{ABCD}=\frac{5}{6}\ \text{(куб. ед.)}.$$